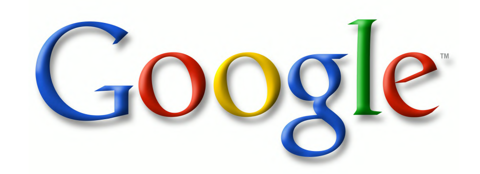
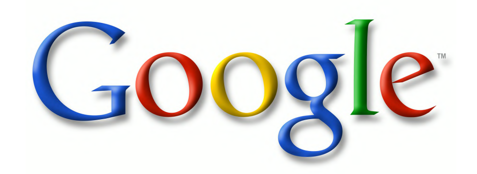
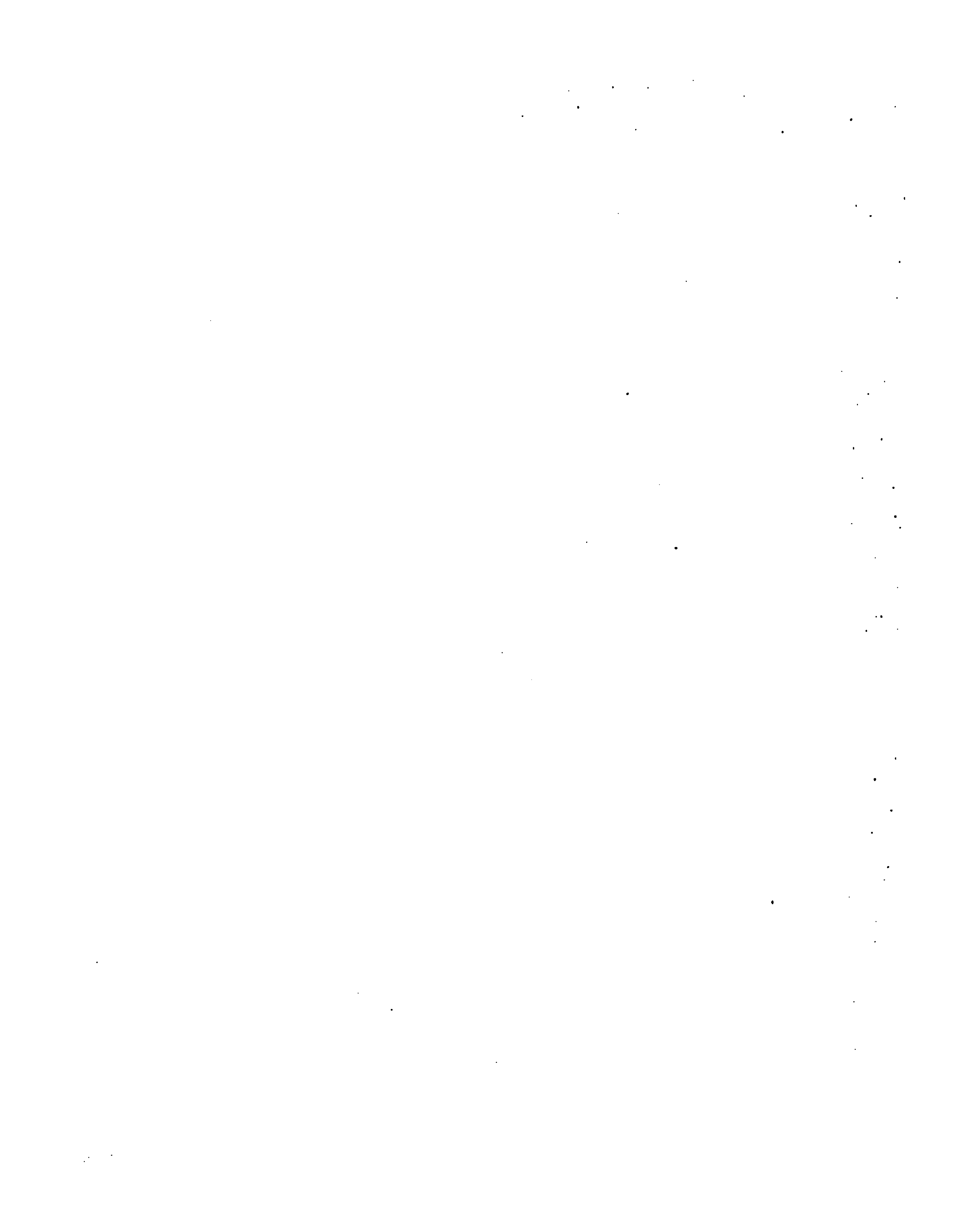






Stanford University Libraries
3 6105 000 993 274



Journal

für die

reine und angewandte Mathematik

gegründet von A. L. Crelle 1826.

Unter Mitwirkung der Herren

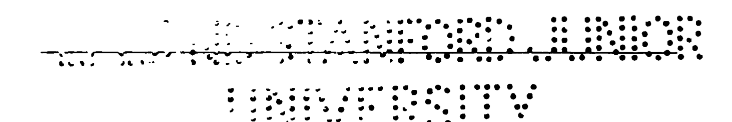
Weierstrass und **von Helmholtz**

herausgegeben

von

L. Fuchs.

Mit thätiger Beförderung hoher Königlich Preussischer Behörden.



Band 114.

In vier Heften.

Mit einer Figurentafel.

Berlin, 1895.

Druck und Verlag von Georg Reimer.

Inhaltsverzeichniss des Bandes 114.

Berichtigung.

S. 245 Z. 6 v. u. und S. 246 Z. 4 v. o. lies „zugleich nicht“ statt „nicht zugleich“.

Ueber den Dreiecksinhalt und sein duales Analogon.

(Von Herrn *E. Busche* in Bergedorf.)

§ 1.

Die reellen Zahlen und die Elemente eines Grundgebildes erster Stufe lassen sich einander so zuordnen, dass jedes Element eindeutig mit einer reellen Zahl bezeichnet ist, dass ferner umgekehrt jeder reellen Zahl mit Einschluss von ∞ ein einziges Element des Grundgebildes entspricht, und dass diese Zuordnung stetig ist, d. h. dass das mit der Zahl b bezeichnete Element durch die mit a und c bezeichneten Elemente von dem mit ∞ bezeichneten Elemente getrennt wird, wenn $a > b > c$ ist. Die zuerst genannte Eigenschaft dieser Zuordnung scheint keines vollständigen Beweises fähig zu sein*), die beiden anderen sind von den Herren *Lüroth, Zeuthen, Killing* u. A. bewiesen worden**). Darauf, wie eine solche Zuordnung ohne Benutzung einer Längeneinheit hergestellt werden kann, gehe ich hier nicht ein***), aber auch ohne dass man eine Methode angiebt, nach der die Bezeichnung der Elemente durch Zahlen vorzunehmen ist, ist es klar, dass die als algebraisch, nicht als transcendent vorausgesetzte Zuordnung vollständig bestimmt ist, wenn drei verschiedene Elemente mit drei verschiedenen Zahlen bezeichnet sind, denn von einer Bezeichnung geht man zu einer anderen durch eine lineare Transformation mit drei Constanten über.

Ein Grundgebilde, dessen Elemente in der angegebenen Weise mit Zahlen bezeichnet sind, möge ein eindeutig bezeichnetes oder auch ein *lineares* Grundgebilde heissen. Beide Benennungen sollen auch auf Grund-

*) Vergl. z. B. die erste Abtheilung des zweiten Bandes der Vorlesungen über Geometrie von *Clebsch-Lindemann*. S. 447.

**) A. a. O. S. 446.

***) Man vergl. darüber ausser der Darstellung a. a. O. und den dort citirten Autoren auch *Poncelets* Abhandlung im 3. Bande dieses Journals: Mémoire sur les centres moyennes harmoniques.

gebilde höherer Stufe übertragen werden, sie sind dann aber nicht mehr gleichbedeutend; ein lineares Grundgebilde höherer Stufe ist ein besonders ausgezeichneter Specialfall eines eindeutig bezeichneten Grundgebildes derselben Stufe.

Wenn a und $b > a$ ganze Zahlen sind, so hat die Differenz $b-a$ die geometrische Bedeutung, dass sie die Anzahl solcher Elemente zwischen a und b angiebt, die mit einer ganzen Zahl bezeichnet sind, wobei entweder a oder b nicht mitgezählt wird. Als zwischen a und b liegend werden die Elemente angesehen, die durch a und b von dem mit ∞ bezeichneten Elemente getrennt sind. Die Differenz $b-a$ liefert also in diesem Falle ein gewisses Maass für die gegenseitige Lage der Elemente a und b, und deshalb soll diese Differenz der *Maassunterschied* der Elemente a und b genannt werden, auch wenn a und b nicht ganze Zahlen sind, und auch wenn $a > b$ ist. Der Quotient $\frac{c-a}{c-b}$ heisst das Verhältniss, nach dem der Maassunterschied der Elemente a und b durch das Element c getheilt wird. Das Doppelverhältniss $(abcd) = \frac{c-a}{c-b} : \frac{d-a}{d-b}$ ist von der Bezeichnung der Elemente unabhängig; es bleibt ungeändert, wenn den mit a, b, c, d bezeichneten Elementen durch eine lineare Transformation andere Zahlen zugeordnet werden. Wenn also c und d zwei auf irgend eine Weise ausgezeichnete feste Elemente des Grundgebildes sind, so liefert das Doppelverhältniss $(abcd)$ ein besseres Maass für den Unterschied in der Lage der Elemente a und b als die Differenz $b-a$. Eine Function eines solchen Doppelverhältnisses wird deshalb bekanntlich von Herrn *F. Klein* im Anschluss an Herrn *Cayley* die Entfernung zwischen den Punkten a und b oder der Winkel zwischen den Strahlen oder Ebenen a und b genannt.

Der Maassunterschied $b-a$ wird nur dann unendlich gross, wenn eins der Elemente a, b mit dem mit ∞ bezeichneten Elemente zusammenfällt. Das ist aber, weil ja der Begriff der Entfernung erst aus dem Maassunterschiede abgeleitet wird, keineswegs gleichbedeutend damit, dass die auf den Begriff des Maassunterschiedes gegründete Geometrie der Grundgebilde erster Stufe mit der *Klein*schen parabolischen Geometrie identisch wäre. Innerhalb der Geometrie des Maassunterschiedes, die nichts anderes ist als die projectivische Geometrie, ist vielmehr noch Raum für alle drei Arten von Maassbestimmungen des Herrn *Klein*. Dasselbe gilt von der im Folgenden zu entwickelnden Geometrie des linearen ebenen Systems, die

ebenfalls nichts anderes ist als die projectivische Geometrie der Ebene, wenn auch die Elemente des Systems mit Zahlen bezeichnet und Begriffe benutzt werden, die dem Maassunterschiede analog sind.

§ 2.

Durch zwei in derselben Ebene liegende lineare Strahlenbüschel mit verschiedenen Scheitelpunkten S und T wird, abgesehen von den Punkten der Linie ST, jedem Punkte der Ebene eindeutig ein Zahlenpaar zugewiesen, wenn man dem Schnittpunkte des Strahles x von S mit dem Strahl y von T die Coordinaten x, y zuordnet. Denn wenn P irgend ein Punkt der Ebene ist, so kann man ihn durch Geraden mit S und T verbinden; diese sind als Strahlen der linearen Büschel mit je einer Zahl bezeichnet, und diese Zahlen sind die Coordinaten von P. Zwei verschiedene Punkte der Ebene sind hiernach auch mit verschiedenen Coordinaten bezeichnet. Umgekehrt entspricht jedem Zahlenpaar ein Punkt der Ebene, wenn der Grundsatz der projectivischen Geometrie festgehalten wird, dass irgend zwei Geraden derselben Ebene sich in einem eigentlichen oder uneigentlichen Punkte schneiden. Ausgenommen ist dabei nur das Zahlenpaar, mit dem die Gerade ST in den beiden Büscheln bezeichnet ist.

Eine Ebene, deren Punkte in dieser Weise mit je zwei reellen Zahlen bezeichnet sind, möge ein eindeutig bezeichnetes Punktfeld heissen. Wenn der Strahl ST in beiden Strahlenbüscheln mit ∞ bezeichnet wird, so geht aus dem eindeutig bezeichneten Punktfeld das *lineare Punktfeld* hervor. Diese besondere Annahme hat zur Folge, dass eine lineare Gleichung zwischen den Coordinaten die Gleichung einer geraden Linie ist, da die beiden Strahlenbüschel S und T durch die lineare Gleichung algebraisch eindeutig, d. h. projectivisch so auf einander bezogen werden, dass sie den Strahl ST entsprechend gemein haben. Jede Gerade trägt in Folge der Bezeichnung ihrer Punkte zwei Punktreihen, nämlich die Reihe der x-Coordinaten und die Reihe der y-Coordinaten ihrer Punkte. Diese Punktreihen sind linear als Schnitte der linearen Strahlenbüschel S und T. Nur die Strahlen der Büschel S und T selbst tragen nur *eine* lineare Punktreihe, da auf ihnen die eine Coördinate einen constanten Werth hat. Die mit ∞ bezeichneten Punkte der beiden linearen Punktreihen einer Geraden fallen beide auf den Schnittpunkt mit der Geraden ST, die als die *Axe* des linearen Punktfeldes

bezeichnet werden soll. Nimmt man auf der Geraden zwei Punkte $x_1|y_1$ und $x_2|y_2$ an, so bilden die Punkte $x = x_1 + \lambda(x_2 - x_1)$ und die Punkte $y = y_1 + \lambda'(y_2 - y_1)$ lineare Punktreihen, wenn λ und λ' alle reellen Werthe annehmen. Da die den Werthen 0, 1, ∞ von λ und λ' entsprechenden Werthe von x und y denselben Punkten der Geraden angehören, so haben für jeden Punkt der ersten Reihe und den mit ihm zusammenfallenden Punkt der zweiten Reihe λ und λ' denselben Werth. Eliminirt man also λ aus den Gleichungen $x = x_1 + \lambda(x_2 - x_1)$ und $y = y_1 + \lambda(y_2 - y_1)$, so giebt die resultirende Gleichung zwischen x und y eine Beziehung zwischen den beiden Coordinaten irgend eines Punktes der Geraden an, und da diese Gleichung linear ist, so ist also bewiesen, dass jede Gerade eine Gleichung vom ersten Grade hat.

Die Bezeichnung der Punkte des linearen Punktfeldes ist stetig, d. h. ein Punkt, der auf der Verbindungslinie von $x_1|y_1$ und $x_2|y_2$ zwischen diesen Punkten liegt oder durch sie von dem Schnittpunkte ihrer Geraden mit der Axe getrennt wird, ist mit Zahlen bezeichnet, die zwischen x_1 und x_2, y_1 und y_2 liegen.

Das Gebilde, das dem linearen Punktfelde dual entspricht, ist das *lineare Strahlenfeld*. Es wird durch zwei lineare Punktreihen s und t erzeugt, die ihren mit ∞ bezeichneten Punkt, das *Centrum* des Strahlenfeldes, gemeinsam haben. Die Verbindungslinie des Punktes X von s mit dem Punkte Y von t wird mit $X|Y$ bezeichnet. Genau dem Vorhergehenden entsprechend zeigt man, dass jeder Punkt des linearen Strahlenfeldes der Träger zweier linearen Strahlenbüschel ist, deren Strahlen die X- und die Y-Coordinaten der durch den Punkt gehenden Strahlen des Strahlenfeldes sind. Diese beiden linearen Strahlenbüschel haben ihren mit ∞ bezeichneten Strahl gemeinsam, nämlich den Verbindungsstrahl des Punktes mit dem Centrum. Ferner ist leicht zu sehen, dass eine lineare Gleichung die Gleichung eines Punktes ist, und dass jeder Punkt eine lineare Gleichung hat. Endlich ist auch die Bezeichnung des Strahlenfeldes stetig, d. h. wenn $X_1|Y_1$ und $X_2|Y_2$ irgend zwei Strahlen sind, so ist ein Strahl, der durch ihren Schnittpunkt geht und zwischen ihnen liegt oder durch sie von dem Centrum getrennt ist, mit zwei Zahlen bezeichnet, die zwischen X_1 und X_2, Y_1 und Y_2 liegen.

Durch das lineare Strahlenfeld wird zugleich ein lineares Punktfeld bestimmt und umgekehrt. Betrachtet man nämlich die Nullpunkte S und T

der erzeugenden linearen Punktreihen t und s als die Scheitelpunkte zweier Strahlenbüschel, deren mit ∞ bezeichnete Strahlen beide mit ST zusammenfallen, deren mit Null bezeichnete Strahlen t und s sind, und deren Strahlen x und y die Punkte $X = -\frac{1}{x}$ und $Y = -\frac{1}{y}$ von s und t treffen, so sind diese Strahlenbüschel linear, und sie erzeugen also, da sie ihren mit ∞ bezeichneten Strahl gemeinsam haben, ein lineares Punktfeld. Eine Ebene, auf der in dieser Weise jeder Punkt und jede Gerade eindeutig mit zwei Zahlen bezeichnet ist, und auf der jedem reellen Zahlenpaar ein Punkt und eine Gerade entspricht, soll ein ***lineares ebenes System*** heissen. Der Punkt st mit den Coordinaten $0|0$ möge das ***Centrum***, die Gerade ST mit den Coordinaten $0|0$ die ***Axe*** des linearen ebenen Systems genannt werden.

Die Gleichung $Xx + Yy + 1 = 0$ ist, wenn X und Y constant sind, die Gleichung der Geraden $X|Y$, und wenn x, y constant sind, die Gleichung des Punktes $x|y$. Alle Geraden und Punkte der Ebene haben eine Gleichung von dieser Form. Für die Geraden durch das Centrum werden X und Y, für die Punkte auf der Axe x und y unendlich; man schreibt deshalb in diesen Fällen die Gleichung besser in der Form $Xx + Yy = 0$ mit endlichen X, Y, x, y, da jetzt das Verhältniss der Coordinaten genügt, um die Gerade oder den Punkt zu bestimmen.

Die analytische Geometrie des linearen ebenen Systems ist offenbar identisch mit der analytischen Geometrie der *Cartes*ischen Punkt- und der *Plücker*schen Liniencoordinaten, solange man von Strecken und Winkeln absehend nur Lagenbeziehungen berücksichtigt. Man kann auch mit Leichtigkeit homogene Coordinaten einführen, indem man diese durch die Proportionen

$$x_1 : x_2 : x_3 = x : y : 1,$$
$$X_1 : X_2 : X_3 = X : Y : 1$$

definirt. Dabei ist aber zu beachten, dass diese homogenen Coordinaten nicht als eine Verallgemeinerung der nicht homogenen zu betrachten sind, wie dies mit den trilinearen und trigonalen Coordinaten in Bezug auf die *Cartes*ischen und *Plücker*schen Coordinaten der Fall ist, sondern nur als ein Mittel, um die Gleichungen homogen zu schreiben und die Punkte S, T und das Centrum, sowie die Geraden s, t und die Axe als gleichberechtigt hinzustellen. Dass die nicht homogenen Coordinaten möglichst allgemein sind, ergiebt sich daraus, dass das lineare ebene System auch durch vier

Punkte oder durch vier Geraden in allgemeiner Lage bestimmt ist, wenn man die vier Elemente mit je zwei Zahlen bezeichnet, die nur der Bedingung genügen, dass nicht drei Paare dieselbe lineare Gleichung erfüllen. Diese Herleitung des linearen ebenen Systems, die ich hier nicht genauer beschreiben will, ist der von *Möbius* im barycentrischen Calcul angewandten Netzconstruction analog.

§ 3.

Der Unterschied zwischen den folgenden Betrachtungen und denen der gewöhnlichen analytischen Geometrie und auch denen von Herrn *Cayley* u. A. besteht darin, dass ich nicht die Begriffe der Entfernung und des Winkels definire, sondern an deren Stelle setze: 1. die Maassunterschiede der in dem linearen System enthaltenen durch die Coordinaten bestimmten linearen Grundgebilde erster Stufe, 2. eine gewisse Beziehung einer Geraden zur Axe (Richtung der Geraden) und die dual entsprechende Beziehung eines Punktes zum Centrum (Declination des Punktes). Dazu kommen 3. die eigentlichen Analoga zu dem Maassunterschiede der Gebilde erster Stufe, nämlich der Punktinhalt eines Dreiecks und dual entsprechend der Strahleninhalt eines Dreiseits.

Um diese Begriffe zu definiren, ist es nothwendig, die nicht homogenen Coordinaten beizubehalten. Wenn man von ihnen ausgehend auf solche Begriffe, wie das Doppelverhältniss von vier Elementen eines Grundgebildes erster Stufe oder dessen Verallgemeinerung auf sechs Elemente eines linearen ebenen Systems kommt, die bei linearer Transformation ungeändert bleiben, so kann man mit Vortheil die homogenen Coordinaten anwenden.

1. Was zunächst die Maassunterschiede der beiden Arten von Grundgebilden erster Stufe anbetrifft, so kann ich mich in Bezug darauf kurz fassen. Es möge nur das eine erwähnt werden, dass sehr viele Relationen, die in der Maassgeometrie für Strecken bewiesen werden, sich auf die Maassunterschiede übertragen lassen, wobei dann einem solchen Satze der Maassgeometrie zwei einander dual gegenüberstehende Sätze entsprechen. So tritt z. B. an die Stelle des Satzes von *Menelaus* der Satz, dass die Producte von drei nicht auf einander folgenden gleichartigen (d. h. sich auf dieselben Coordinaten, z. B. die x-Coordinaten beziehenden) Maassunterschieden zwischen den Ecken eines Dreiecks und den Schnittpunkten einer beliebigen

Geraden mit seinen Seiten ebenso gross ist wie das Product der drei übrigen Maassunterschiede derselben Art. Sind nämlich $x_1|y_1$, $x_2|y_2$, $x_3|y_3$ die Ecken des Dreiecks, ist $u = Xx + Yy + 1 = 0$ die beliebige Gerade, und ist $u_i = Xx_i + Yy_i + 1$, so ist der Maassunterschied zwischen x_1 und der x-Coordinate des Schnittpunktes der Geraden $x_1|y_1 \ldots x_2|y_2$ mit der Geraden $u = 0$ gleich $\frac{(x_1 - x_2)u_1}{u_2 - u_1}$, der Maassunterschied zwischen x_2 und der x-Coordinate desselben Schnittpunktes gleich $\frac{(x_1 - x_2)u_2}{u_2 - u_1}$, und wenn man in derselben Weise die übrigen vier Maassunterschiede berechnet, so ergiebt sich der erwähnte Lehrsatz. Der dual entsprechende Satz, der ebenso bewiesen wird, lautet: Das Product von drei nicht auf einander folgenden gleichartigen Maassunterschieden zwischen den Seiten eines Dreiseits und den Verbindungslinien seiner Ecken mit einem beliebigen festen Punkte ist ebenso gross wie das Product der drei übrigen Maassunterschiede derselben Art.

2. Alle Geraden $X|Y$, für die der Quotient $\varepsilon = \frac{Y}{X}$ constant ist, gehen durch denselben Punkt der Axe, der deshalb zweckmässig mit $\frac{Y}{X}$ bezeichnet wird. Dieser Quotient soll die *erste Richtung* der Geraden heissen, sein reciproker Werth $\varepsilon' = \frac{X}{Y}$ ihre *zweite Richtung*. Alle Punkte ε und ε' bilden je eine lineare Punktreihe auf der Axe. Der Nullpunkt der ersten Reihe und der Unendlichkeitspunkt der zweiten liegen in S, die umgekehrte Bedeutung hat T für beide Reihen. Die Reihen sind in Involution mit den Doppelpunkten ± 1. Unter dem ersten Richtungsunterschiede zweier Geraden versteht man die Differenz $\varepsilon_2 - \varepsilon_1 = \frac{X_1 Y_2 - Y_1 X_2}{X_1 X_2}$, der zweite Richtungsunterschied derselben beiden Geraden ist $\varepsilon_2' - \varepsilon_1' = -\frac{X_1 Y_2 - Y_1 X_2}{Y_1 Y_2}$. Beide Richtungsunterschiede sind gleich, wenn $X_1 X_2 + Y_1 Y_2 = 0$ ist. Zwei Gerade, deren Coordinaten diese Bedingung erfüllen, sollen *normal* zu einander heissen.

Alle Punkte, für die $\delta = \frac{y}{x}$ constant ist, liegen auf demselben Strahl des Centrums, der deshalb mit δ bezeichnet wird; δ heisse die *erste Declination* des Punktes, der reciproke Werth $\delta' = \frac{x}{y}$ seine *zweite Declination*. Alle Strahlen δ und δ' bilden je einen linearen Strahlenbüschel des Cen-

trums. Der Strahl s, der das Centrum mit T verbindet, ist der Nullstrahl des ersten, der Unendlichkeitsstrahl des zweiten Büschels, die umgekehrte Bedeutung hat der Strahl t, der das Centrum mit S verbindet. Beide Büschel sind in Involution mit den Doppelstrahlen ± 1. Die Differenz $\delta_2 - \delta_1 = \frac{x_1 y_2 - y_1 x_2}{x_1 x_2}$ ist der erste, die Differenz $\delta'_2 - \delta'_1 = -\frac{x_1 y_2 - y_1 x_2}{y_1 y_2}$ der zweite Declinationsunterschied der beiden Punkte. Beide Declinationsunterschiede sind gleich, wenn $x_1 x_2 + y_1 y_2 = 0$ ist. Zwei Punkte, deren Coordinaten diese Bedingung erfüllen, werden *normal* zu einander genannt.

Weil ein Strahl des Centrums mit der ersten Richtung $\varepsilon = \frac{Y}{X}$, der durch den Punkt $x|y$ mit der ersten Declination $\delta = \frac{y}{x}$ geht, die Gleichung

$$Xx + Yy = 0 \quad \text{hat, so ist} \quad \varepsilon . \delta = -1,$$

wenn der Strahl δ des Centrums durch den Punkt ε der Axe geht. Der Büschel δ und die Punktreihe ε sind in Involution mit den Doppelelementen $\pm i$, ebenso δ' und ε'. Da für zwei zu einander normale Elemente ebenfalls $\varepsilon_1 \varepsilon_2 = -1$ oder $\delta_1 \delta_2 = -1$ ist, so können sie auch als solche angesehen werden, die durch die Punkte $\pm i$ der Axe oder die Strahlen $\pm i$ des Centrums harmonisch von einander getrennt werden.

3. Nimmt man in der Ebene drei nicht auf der Axe und nicht in gerader Linie liegende Punkte $A = x_1|y_1$, $B = x_2|y_2$, $C = x_3|y_3$ an, so kann man sich von A über B und C zurück nach A auf geraden Linien nur auf eine Weise so bewegen, dass die Axe nicht überschritten wird. Durch die drei Punkte A, B, C ist also eindeutig ein von geraden Linien begrenztes Stück der Ebene bestimmt, das von der Axe nicht durchschnitten wird. Dieses Stück der Ebene soll das Dreieck ABC heissen. Sind A, B, C ganze Punkte, d. h. sind ihre beiden Coordinaten ganze Zahlen, und ist ferner die Hälfte der Determinante

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

eine ganze Zahl, so stimmt diese, abgesehen vom Vorzeichen mit der Anzahl der innerhalb des Dreiecks liegenden ganzen Punkte überein, wobei aber nicht alle auf dem Umfang des Dreiecks liegenden ganzen Punkte mitgezählt werden dürfen. Ein Punkt liegt innerhalb des Dreiecks, wenn

er durch die beiden Schnittpunkte jeder durch ihn gelegten Geraden mit dem Umfang des Dreiecks von dem Schnittpunkte dieser Geraden mit der Axe getrennt wird. Der Beweis des Satzes über die Anzahl der ganzen Punkte im Innern des Dreiecks soll der Kürze wegen nicht ausführlich geführt werden. Er beruht darauf, dass der Satz für solche den gestellten Bedingungen genügende Dreiecke, von denen zwei Seiten auf Strahlen der erzeugenden Büschel S, T liegen, durch eine einfache Abzählung nachgewiesen werden kann, und dass sich die zu bestimmende Anzahl als ein Aggregat solcher besonderen Anzahlen darstellen lässt. Die einfache geometrische Bedeutung, die die aus den Coordinaten der Eckpunkte des Dreiecks gebildete Determinante in dem angegebenen Falle hat, führt dazu, diese Determinante als Maassunterschied für die gegenseitige Lage der drei Punkte auch dann zu benutzen, wenn ihre Coordinaten beliebige reelle Zahlen sind. Die Hälfte der Determinante soll der *Punktinhalt* (ABC) des Dreiecks heissen. Der Punktinhalt kann positiv oder negativ sein. Es ist $(ABC) = (BCA) = (CAB) = -(ACB) = -(CBA) = -(BAC)$. Sagt man von einem Punkte, der sich in irgend einer Linie bewegt, dass seine Bewegung in Bezug auf einen festen Punkt einen positiven Sinn habe, wenn die Verbindungslinie des sich bewegenden Punktes mit dem festen Punkte von kleineren zu grösseren Werthen ihrer ersten Richtung übergeht, so ist der Punktinhalt positiv oder negativ, je nachdem der Umfang des Dreiecks im positiven oder negativen Sinne in Bezug auf jeden im Innern des Dreiecks liegenden Punkt durchlaufen wird*).

Sind $a = X_1|Y_1$, $b = X_2|Y_2$, $c = X_3|Y_3$ drei nicht durch das Centrum und nicht durch einen Punkt gehende Geraden, so kann ein Strahl, der sich erst um den Punkt ab dreht, bis er aus der Lage von a in die von b

*) Das gewöhnliche, auf *Möbius* zurückzuführende Kriterium für das Vorzeichen eines Dreiecksinhaltes, wonach dieser positiv oder negativ ist, je nachdem man beim Umlauf um das Dreieck dessen Inneres zur linken oder rechten Hand hat (oder umgekehrt, je nach der Lage der x-Axe zur y-Axe des zu Grunde gelegten *Cartes*ischen Coordinatensystems) verliert bei der hier angewendeten Definition des Dreiecks seine Gültigkeit, da man bei einem Umlauf um ein Dreieck, dessen Eckpunkte nicht alle auf derselben Seite der Axe liegen, den einen Theil des Innern zur linken, den anderen zur rechten Hand hat. Wollte man, was sich aber auch aus anderen Gründen nicht empfiehlt, dieses Kriterium beibehalten, so müsste man die Annahme machen, dass man beim Ueberschreiten der uneigentlichen (unendlich fernen) Geraden der Ebene von der einen Seite der Ebene auf die andere Seite überginge.

gekommen ist, darauf um bc von b bis c und endlich um ca von c bis a, diese Bewegung nur auf eine Weise so ausführen, dass er niemals das Centrum trifft. Der Strahl beschreibt dabei den Umfang des Dreiseits abc, wo das Wort „Umfang“ aber nicht mit dem Umfang des Dreiecks zu verwechseln ist; der Umfang des Dreiseits ist ein Strahlengebilde, das aus drei Stücken dreier Strahlenbüschel zusammengesetzt ist, ebenso wie der Umfang des Dreiecks ein Punktgebilde ist, das aus drei Stücken von drei Geraden besteht. Ein beliebiger Strahl der Ebene kann innerhalb oder ausserhalb des Dreiseits liegen. Er liegt innerhalb, wenn jeder seiner Punkte mit dem Umfang zwei Strahlen gemeinsam hat, ausserhalb, wenn es Punkte auf ihm giebt, die keinen Strahl mit dem Umfang gemeinsam haben. Die beiden Strahlen, die irgend ein Punkt eines im Innern des Dreiseits liegenden Strahles mit dem Umfang gemeinsam hat, trennen den Strahl von der Verbindungslinie des Punktes mit dem Centrum. Diese Definiton des Dreiseits und der in seinem Innern liegenden Strahlen ist der Definition des Dreiecks und der Punkte innerhalb des Dreiecks reciprok. Da nun das lineare ebene System sich selbst reciprok ist, wenn man solche Geraden und Punkte, deren Coordinaten gleiche Zahlen sind, einander zuordnet, so entspricht jedem Punkte im Innern des Dreiecks ABC ein Strahl im Innern des Dreiseits abc, wenn die Seiten des Dreiseits der Reihe nach dieselben Coordinaten haben, wie die Punkte A, B, C, wenn also $X_i = x_i$, $Y_i = y_i$ $(i = 1, 2, 3)$ ist. Mit der Definition des Punktinhaltes (ABC) ist damit zugleich die Definition des ***Strahleninhaltes*** (abc) eines Dreiseits gegeben. Er ist die Hälfte der Determinante

$$\begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & 1 \\ X_2 & Y_2 & 1 \\ X_3 & Y_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

In dem besonderen Falle, wo a, b, c ganze Strahlen, d. h. X_i, Y_i ganze Zahlen sind, und wo die Hälfte der Determinante eine ganze Zahl ist, giebt sie, abgesehen vom Vorzeichen, die Anzahl der innerhalb des Dreiseits liegenden ganzen Strahlen an, wobei aber die ganzen Strahlen, die zum Umfang gehören, nicht alle mitgezählt werden dürfen.

Von einem beweglichen Strahle möge gesagt werden, dass er sich im positiven Sinne in Bezug auf einen festen Strahl bewege, wenn die erste Declination des Schnittpunktes beider Strahlen von kleineren zu grösseren Werthen übergeht. Dann ist der Strahleninhalt positiv, wenn der

Umfang des Dreiseits von einem beweglichen Strahle im positiven Sinne in Bezug auf jeden im Innern liegenden Strahl beschrieben wird.

Aus der Definition des Punktinhaltes eines Dreiecks und des Strahleninhaltes eines Dreiseits kann man die Inhaltsbegriffe für beliebige geschlossene Figuren ableiten. Da ich aber davon nur vorübergehend Gebrauch machen werde, so ist es überflüssig dabei zu verweilen.

Es sollen jetzt einige Beziehungen zwischen den drei Maassbestimmungen, die durch drei Punkte in allgemeiner Lage gegeben sind, abgeleitet werden. Es seien $A = x_1|y_1$, $B = x_2|y_2$, $C = x_3|y_3$ diese drei Punkte und BC werde mit a, CA mit b, AB mit c bezeichnet. Dann hat a die Coordinaten $\frac{y_2 - y_3}{x_2 y_3 - y_2 x_3} \Big| \frac{x_3 - x_2}{x_2 y_3 - y_2 x_3}$, und die Coordinaten von b und c werden hieraus durch cyklische Vertauschung abgeleitet. Die erste Richtung von a ist also $\frac{x_3 - x_2}{y_2 - y_3}$, die von b $\frac{x_1 - x_3}{y_3 - y_1}$ und der erste Richtungsunterschied zwischen a und b ist

$$\gamma = \frac{x_1 - x_3}{y_3 - y_1} - \frac{x_3 - x_2}{y_2 - y_3} = \frac{2(ABC)}{(y_3 - y_1)(y_2 - y_3)}.$$

Der Punktinhalt des Dreiecks ABC ist demnach

$$(ABC) = \tfrac{1}{2}(y_2 - y_3)(y_3 - y_1) \cdot \gamma.$$

Aus diesem und den beiden anderen Ausdrücken für (ABC), in denen die Richtungsunterschiede α zwischen b und c oder β zwischen c und a vorkommen, folgt die Proportion

$$\alpha : \beta : \gamma = (y_2 - y_3) : (y_3 - y_1) : (y_1 - y_2).$$

Die ersten (zweiten) Richtungsunterschiede zwischen den Seiten eines Dreiecks verhalten sich also wie die zweiten (ersten) Maassunterschiede zwischen den gegenüberliegenden Eckpunkten. Analoge Sätze gelten für den Strahleninhalt (abc) und für die Declinationsunterschiede zwischen den Eckpunkten des Dreiseits und die Maassunterschiede zwischen den gegenüberliegenden Seiten.

§ 4.

Sind x und y oder X und Y Functionen eines reellen Parameters t, so erhält man die auf einander folgenden Punkte oder Tangenten einer Curve, wenn t sich stetig ändernd alle reellen Werthe durchläuft. Bezeichnet man die Ableitungen der als differentiirbar vorausgesetzten Func-

tionen x, y, X, Y durch Striche, so ist $\frac{Y}{X} = -\frac{x'}{y'}$ die erste Richtung der Tangente in dem Punkte $x|y$ und $\frac{y}{x} = -\frac{X'}{Y'}$ die erste Declination des Berührungspunktes auf der Tangente $X|Y$. Für die Curve mit der Gleichung $x^2+y^2 = \text{const.}$ sind also die Richtungen der Tangente und die entsprechenden Declinationen des Berührungspunktes überall einander gleich. Diese Curve möge ein Kreis genannt werden, und diese Bezeichnung möge auf alle Curven übertragen werden, die mit ihr die Eigenschaft gemeinsam haben, dass die durch den Berührungspunkt gezogene Normale der Tangente immer durch denselben festen Punkt, den Mittelpunkt des Kreises, geht. Die Gleichung des Kreises ist dann dieselbe wie in *Cartes*ischen Punktcoordinaten. Reciprok ergiebt sich die Curve, für die die auf der Tangente liegende Normale des Berührungspunktes immer auf derselben festen Geraden liegt. Sie hat in Liniencoordinaten dieselbe Gleichung wie der Kreis in Punktcoordinaten. Alle Kreise gehen durch die Punkte $\pm i$ der Axe, die reciproken Curven werden von den Strahlen $\pm i$ des Centrums berührt.

Als Krümmungsmittelpunkt einer Curve in einem gegebenen Punkte wird der Schnittpunkt der in diesem Punkte, der dem Parameter t entsprechen möge, und in dem Punkte, der zu dem Parameterwerth $t+dt$ gehört, zu den Tangenten gezogenen Normalen definirt. Dual entsprechend findet man eine gerade Linie, die die auf zwei auf einander folgenden Tangenten liegenden Normalen der Berührungspunkte verbindet, und die das duale Analogon der Krümmungsmittelpunktscurve einhüllt.

Für die Verhältnisse zwischen den entsprechenden Maassunterschieden zweier auf einander folgenden Tangenten und Punkte und für die Verhältnisse zwischen ihren entsprechenden Richtungs- und Declinationsunterschieden lassen sich einfache Ausdrücke so leicht ableiten, dass ich sie nicht anzuführen brauche.

Der Punktinhalt des Dreiecks, dessen Ecken den Werthen $t-h$, t, $t+k$ des Parameters entsprechen, ist $\triangle_p = \frac{hk(h+k)}{4}(x'y''-y'x'')$, wenn h und k unendlich kleine Zahlen sind. Der Strahleninhalt des von den Tangenten in denselben Punkten gebildeten Dreiseits ist $\triangle_s = \frac{hk(h+k)}{4}\frac{(x'y''-y'x'')^2}{(xy'-yx')^4}$, das Verhältniss zwischen beiden ist also $\frac{\triangle_s}{\triangle_p} = \frac{x'y''-y'x''}{(xy'-yx')^3}$.

Der Typus einer unabhängigen Variabeln, die alle reellen Werthe

continuirlich annimmt, ist die Zeit. Die unabhängige Variable t kann als Maasszahl der Zeit angesehen werden, und der Punkt $x|y$ als ein solcher, der im Laufe der Zeit seinen Ort stetig verändert oder sich bewegt. Er hat zur Zeit t die Geschwindigkeiten x' und y'. Sind x und y lineare Functionen von t, so bewegt sich der Punkt gleichförmig, d. h. in gerader Linie mit constanten Geschwindigkeiten. Er erreicht den Punkt, in dem die Gerade die Axe schneidet, erst nach unendlich langer Zeit. Die Aenderungen der Geschwindigkeiten bezogen auf die Zeiteinheit, also x'' und y'' heissen die Beschleunigungen des Punktes zur Zeit t. Sind x'' und y'' gegebene Functionen, die beständig die Bedingung $\frac{y''}{x''} = \frac{y}{x}$ erfüllen, d. h. ist das Verhältniss der Beschleunigungen immer gleich der Declination des sich bewegenden Punktes, so soll die Bewegung eine Centralbewegung um das Centrum heissen. In diesem Falle ist $xy''-yx''=0$ oder $d(xy'-yx')=0$, also $xy'-yx' = \text{const.}$ Nun ist aber $xdy-ydx$ der doppelte Punktinhalt des Dreiecks mit den Ecken $0|0$, $x|y$, $x+dx|y+dy$. Der Ausdruck $xy'-yx'$ heisst deshalb die Sectorengeschwindigkeit des Punktes $x|y$. Bei der Centralbewegung ist die Sectorengeschwindigkeit constant.

Alles, was über die Bewegung eines Punktes gesagt ist, lässt sich dual auf die Bewegung einer Geraden übertragen. Eine Gerade bewegt sich gleichförmig, wenn sie sich entsprechend den Gleichungen

$$X = \alpha+\beta t, \quad Y = \gamma+\delta t$$

um einen Punkt mit den constanten Geschwindigkeiten β und δ dreht; sie erreicht das Centrum erst nach unendlich langer Zeit. Allgemein heissen X', Y' die Geschwindigkeiten, X'', Y'' die Beschleunigungen der sich bewegenden Geraden. Die Bewegung eines Punktes ist vollständig bestimmt, wenn die Bewegung der Tangente der von ihm beschriebenen Curve bekannt ist, und umgekehrt. Ein Punkt kann in endlicher Zeit, ohne dass seine Geschwindigkeit oder die seiner Tangente unendlich wird, eine geschlossene Curve nur dann beschreiben, wenn der Punktinhalt und der Strahleninhalt des von der Curve begrenzten Flächenstückes endlich sind, d. h. wenn der Punkt niemals die Axe überschreitet und die Tangente niemals durch das Centrum geht.

Der Centralbewegung eines Punktes steht die Axialbewegung einer Geraden dual gegenüber. So wird die Bewegung einer Geraden genannt, wenn $\frac{Y''}{X''} = \frac{Y}{X}$ ist, wenn also das Verhältniss der Beschleunigungen gleich der

Richtung der Geraden ist. In diesem Falle ist $XY'-YX'$ constant, und da $XdY-YdX$ der Strahleninhalt des von der Axe $0|0$ und den Geraden $X|Y$ und $X+dX|Y+dY$ gebildeten Dreiseits ist, soll $XY'-YX'$ die Segmentgeschwindigkeit heissen. Diese ist also bei der Axialbewegung constant.

Damit bei den folgenden Anwendungen dieser Betrachtungen an Bekanntes angeknüpft werden könne, möge jetzt das lineare ebene System dahin specialisirt werden, dass es in eine Ebene übergeht, deren Punkte durch *Cartes*ische rechtwinklige Coordinaten bezeichnet sind. Die Axe ist dann die unendlich ferne Gerade. Es soll zuerst die Bewegung aufgesucht werden, die zugleich Centralbewegung des beweglichen Punktes um den Nullpunkt und Axialbewegung der Tangente um die unendlich ferne Gerade ist. Zwischen den Coordinaten und Geschwindigkeiten eines Punktes und den Coordinaten und Geschwindigkeiten seiner Tangente bestehen die Gleichungen

$$X = \frac{-y'}{xy'-yx'}, \qquad Y = \frac{x'}{xy'-yx'},$$

$$x = \frac{-Y'}{XY'-YX'}, \qquad y = \frac{X'}{XY'-YX'}.$$

Ist nun $xy'-yx' = c$ und $XY'-YX' = C$, so ist

$$Y = \frac{x'}{c}, \quad \text{also} \quad Y' = \frac{x''}{c} \quad \text{und} \quad x = -\frac{x''}{cC}$$

oder

$$x''+cCx = 0 \quad \text{und ebenso} \quad y''+cCy = 0.$$

Das sind aber bekanntlich die Bewegungsgleichungen für die elliptische Centralbewegung, bei der das Centrum der Bewegung der Mittelpunkt der Ellipse ist, und die Beschleunigung der ersten Potenz des Radiusvector $r = \sqrt{x^2+y^2}$ proportional ist. Diese Bewegung ist also zugleich central und axial.

Eine zweite Anwendung möge die Planetenbewegung betreffen, die nach dem *Newton*schen Gesetze vor sich geht. Es ist wieder

$$x = \frac{-Y'}{XY'-YX'}, \quad \text{also} \quad XY'-YX' = -\frac{Y'}{x},$$

und da

$$Y = \frac{x'}{xy'-yx'} = \frac{x'}{c}$$

ist, weil die Sectorengeschwindigkeit wieder constant ist, so ist

$$Y' = \frac{x''}{c}.$$

Da ferner die erste Bewegungsgleichung in diesem Falle bekanntlich die Form

$$x'' = -\mu \cdot \frac{x}{r^3}$$

hat, wo μ eine Constante ist und r den Radiusvector bedeutet, so ist

$$XY' - YX' = -\frac{x''}{cx} = \frac{\mu}{c} \cdot \frac{1}{r^3}.$$

Die Segmentgeschwindigkeit der Tangente in Bezug auf die unendlich ferne Gerade ist bei der Newtonschen Centralbewegung der dritten Potenz des Radiusvector umgekehrt proportional.

Dieser Satz ist gewissermaassen das duale Analogon zu dem zweiten *Kepler*schen Gesetze der Planetenbewegung. Man kann ihn auch durch die Gleichung

$$XY' - YX' = \sqrt{\frac{c}{\mu}}(X'^2 + Y'^2)^{\frac{3}{2}}$$

ausdrücken.

§ 5.

Für die Geometrie der Grundgebilde erster Stufe ist das Doppelverhältniss von fundamentaler Bedeutung, weil es bei beliebiger linearer Transformation unverändert bleibt. Es sollen deshalb jetzt solche Functionen von Punkt- und Strahleninhalten betrachtet werden, die sich bei linearer Transformation des linearen ebenen Systems nicht verändern. Um die bei solchen Ausdrücken herrschende Reciprocität erkennen zu lassen, möge der folgende Hülfssatz vorangeschickt werden:

Sind $A = x_1|y_1$ und $B = x_2|y_2$ irgend zwei Punkte und $c = X_1|Y_1$, $d = X_2|Y_2$ irgend zwei Geraden des linearen ebenen Systems, und bezeichnet man den Punktinhalt des Dreiecks mit den Ecken A, B, cd mit (A, B, cd), den Strahleninhalt des Dreiseits mit den Seiten AB, c, d mit (AB, c, d), den Ausdruck $x_1y_2 - y_1x_2$ mit (A, B) und $X_1Y_2 - Y_1X_2$ mit (c, d), so ist

$$\frac{(A, B, cd)}{(AB, c, d)} = \frac{(A, B)}{(c, d)}.$$

Die Richtigkeit des Satzes ergiebt sich sofort durch wirkliche Ausrechnung.

Als ***Inhaltsdoppelverhältniss***, abgekürzt $(DV.)$, ***von sechs Punkten*** A, B, C, D, E, F einer Ebene werde ein Ausdruck von folgender Form definirt:

$$\frac{(DBC)(AEF)}{(ABC)(DEF)}.$$

Der Nenner ist ein Product aus zwei Punktinhalten von Dreiecken, die zusammen die sechs Punkte als Eckpunkte haben. Der Zähler geht aus dem Nenner hervor, indem man die ersten Eckpunkte der beiden Dreiecke mit einander vertauscht. Durch die Reihenfolge der Buchstaben im Nenner ist das (*DV.*) vollständig bestimmt und kann deshalb abgekürzt geschrieben werden

$$(ABC,\ DEF).$$

Hiernach ist z. B.

$$(EFB,\ CAD) = \frac{(CFB)(EAD)}{(EFB)(CAD)}.$$

Das (*DV.*) ist absolut invariant bei jeder linearen Transformation. Das ergiebt sich entweder durch directe Ausrechnung oder auch daraus, dass es bekanntlich*) einem gewöhnlichen Doppelverhältniss gleich ist, nämlich

$$(ABC,\ DEF) = (D,\ A,\ BC,\ EF),$$

d. h. gleich dem Doppelverhältniss der Punkte D, A und der Schnittpunkte von DA mit BC und EF. Die Eigenschaft der Invarianz bei linearer Transformation theilt das (*DV.*) übrigens mit jedem Bruch, dessen Zähler und Nenner aus gleich viel Punktinhalten als Factoren derartig gebildet sind, dass jeder Punkt im Zähler ebenso oft vorkommt wie im Nenner.

Von den 720 (*DV.*), die man aus sechs Punkten bilden kann, sind offenbar je acht einander gleich; es ist nämlich

$$(ABC,\ DEF) = (ACB,\ DEF) = (ABC,\ DFE) = (ACB,\ DFE),$$

und ausserdem kann man die Reihenfolge der beiden Tripel vertauschen, es ist $(ABC,\ DEF) = (DEF,\ ABC)$ u. s. w.

Wählt man aus je acht solchen gleichen (*DV.*) eins aus, so lassen sich die 90 (*DV.*), die man so erhält, in 10 Gruppen von je 9 vertheilen, die denselben Nenner haben**). Die erste Gruppe von 9 wird von den folgenden (*DV.*) gebildet:

$$(ABC,\ DEF),\quad (ABC,\ EFD),\quad (ABC,\ FDE),$$
$$(BCA,\ DEF),\quad (BCA,\ EFD),\quad (BCA,\ FDE),$$
$$(CAB,\ DEF),\quad (CAB,\ EFD),\quad (CAB,\ FDE).$$

---

*) S. *Möbius*, barycentrischer Calcul § 221. *Möbius* behält allerdings die gewöhnliche Definition des Dreiecksinhaltes bei, aber bei einem (*DV.*) ist es wegen der Invarianz bei collinearer Umformung einerlei, ob man die allgemeine oder die specielle Definition zu Grunde legt.

**) Das Analoge gilt für das gewöhnliche Doppelverhältniss; die sechs verschiedenen Werthe, die hier bei den verschiedenen Permutationen der vier Punkte vorkommen, zer-

Je drei (*DV.*), die hier in einer Horizontal- oder in einer Verticalreihe stehen, sind zusammen gleich 1, denn es besteht bekanntlich*) die identische Gleichung

$$(DBC)(AEF)+(EBC)(AFD)+(FBC)(ADE) = (ABC)(DEF).$$

Von den sechs Gleichungen zwischen je drei (*DV.*), die sich so ergeben, ist eine die Folge der übrigen, so dass von den neun (*DV.*) vier von einander unabhängig sind. Setzt man z. B.

$$\begin{aligned}(ABC,\ DEF) &= \alpha,\\ (ABC,\ EFD) &= \beta,\\ (BCA,\ DEF) &= \gamma,\\ (BCA,\ EFD) &= \delta,\end{aligned}$$

so ist

$$\begin{aligned}(ABC,\ FDE) &= 1-\alpha-\beta,\\ (BCA,\ FDE) &= 1-\gamma-\delta,\\ (CAB,\ DEF) &= 1-\alpha-\gamma,\\ (CAB,\ EFD) &= 1-\beta-\delta,\\ (CAB,\ FDE) &= \alpha+\beta+\gamma+\delta-1.\end{aligned}$$

Auf dieselbe Weise, wie die ersten neun (*DV.*) aus dem Anfangsgliede (*ABC, DEF*) durch cyklische Vertauschung innerhalb der beiden Tripel abgeleitet werden, ergeben sich die neun übrigen Gruppen von je neun (*DV.*) aus den Anfangsgliedern

(*ABD, CEF*), (*ABE, CDF*), (*ABF, CDE*), (*ACD, BEF*), (*ACE, BDF*), (*ACF, BDE*), (*ADE, BCF*), (*ADF, BCE*), (*AEF, BCD*).

Die neun (*DV.*) irgend einer Gruppe lassen sich aus den (*DV.*) irgend einer anderen Gruppe dadurch ableiten, dass man ein bestimmtes

---

fallen in drei Gruppen von je zwei mit demselben Nenner: λ, $1-\lambda$, $\frac{1}{\lambda}$, $-\frac{1-\lambda}{\lambda}$, $\frac{1}{1-\lambda}$, $-\frac{\lambda}{1-\lambda}$. Ueberhaupt herrscht zwischen dem (*DV.*) und dem gewöhnlichen Doppelverhältniss eine vollkommene Analogie. Aus diesem Grunde wäre es zweckmässiger, wenn man das gewöhnliche Doppelverhältniss so bezeichnete:

$$(AB,\ CD) = \frac{CB.AD}{AB.CD}.$$

Ich habe jedoch die übliche Bezeichnung beibehalten.

*) S. *Möbius*, baryc. Calcul. § 171.

$(DV.)$ dieser Gruppe in die übrigen acht und in die Einheit dividirt. Da z. B. das siebente $(DV.)$ der ersten Gruppe den Zähler

$$(DAB)(CEF) = (ABD)(CEF)$$

hat, so erhält man für die neun $(DV.)$ der zweiten Gruppe der Reihe nach die Werthe:

$$-\frac{\alpha}{1-\alpha-\gamma}, \quad \frac{1-\gamma-\delta}{1-\alpha-\gamma}, \quad \frac{\delta}{1-\alpha-\gamma}, \quad -\frac{\gamma}{1-\alpha-\gamma}, \quad \frac{1-\alpha-\beta}{1-\alpha-\gamma}, \quad \frac{\beta}{1-\alpha-\gamma},$$
$$\frac{1}{1-\alpha-\gamma}, \quad -\frac{1-\beta-\delta}{1-\alpha-\gamma}, \quad -\frac{\alpha+\beta+\gamma+\delta-1}{1-\alpha-\gamma}.$$

Auf diese Weise kann man mit Leichtigkeit alle 90 $(DV.)$ durch α, β, γ, δ ausdrücken. Es ist überflüssig, alle 90 Werthe hinzuschreiben, nur die letzte Gruppe von neun möge noch angeführt werden. Sie ist:

$$-\frac{\gamma}{\alpha}, \quad -\frac{1-\alpha-\gamma}{\alpha}, \quad \frac{1}{\alpha}, \quad \frac{\alpha+\beta+\gamma+\delta-1}{\alpha}, \quad \frac{1-\gamma-\delta}{\alpha},$$
$$-\frac{\beta}{\alpha}, \quad \frac{1-\beta-\delta}{\alpha}, \quad \frac{\delta}{\alpha}, \quad -\frac{1-\alpha-\beta}{\alpha}.$$

Gehören die vier als gegeben betrachteten von einander unabhängigen $(DV.)$ nicht derselben Gruppe von neun an, so kann man die Aufgabe, alle $(DV.)$ durch die vier gegebenen auszudrücken, auf den eben erledigten Fall zurückführen, indem man zunächst α, β, γ, δ durch Auflösung eines Systems von vier linearen Gleichungen durch die gegebenen Werthe ausdrückt und darauf so verfährt wie vorher. Dass in der That vier $(DV.)$ gegeben sein müssen, um alle zu bestimmen, folgt daraus, dass man wegen der Invarianz des $(DV.)$ bei collinearer Umformung vier von den sechs Punkten beliebig in allgemeiner Lage annehmen darf, und dass zur Bestimmung der vier Coordinaten der beiden übrigen Punkte vier Gleichungen nothwendig sind. Man überzeugt sich leicht davon, dass die beiden Punkte zweideutig bestimmt sind. Denn wenn A, B, C, D die beliebig angenommenen, E, F die gesuchten Punkte und die mit α, β, γ, δ bezeichneten $(DV.)$ die gegebenen sind, so ist

$$(ABC,\ DEF) = (D,\ A,\ BC,\ EF) = \alpha$$

und

$$(BCA,\ DEF) = (D,\ B,\ CA,\ EF) = \gamma.$$

Also müssen E und F auf einer Geraden liegen, die durch je einen eindeutig bestimmten Punkt von DA und von DB geht, so dass die Gerade EF eindeutig bestimmt ist. Die eine Coordinate y von E kann also durch

die andere Coordinate x dieses Punktes linear ausgedrückt werden und ebenso die Coordinate y' von F durch die Coordinate x' dieses Punktes. Die Gleichungen

$$(ABC,\ EFD) = \beta \quad \text{und} \quad (BCA,\ EFD) = \delta$$

sind dann zwei bilineare Gleichungen zwischen x und x', aus denen sich im allgemeinen je zwei endliche Werthe für diese Unbekannten ergeben.

Dem $(DV.)$ entspricht dual das $(dv.)$, d. h. das aus Strahleninhalten von Dreiseiten gebildete Doppelverhältniss, das durch sechs Gerade bestimmt ist, z. B.

$$(abc,\ def) = \frac{(dbc)(aef)}{(abc)(def)}.$$

Alles, was über das $(DV.)$ gesagt ist, gilt entsprechend von dem $(dv.)$

Ein System von sechs Punkten oder sechs Geraden einer Ebene soll im Anschluss an die bekannte *v. Staudt*sche Bezeichnung ein ***Wurf*** von sechs Punkten oder sechs Geraden genannt werden, die zugehörigen 720 $(DV.)$ oder $(dv.)$ die ***Werthe*** des Wurfes. Zwei Dreiecke oder Dreiseite, deren Ecken oder Seiten den Wurf bilden, mögen ***complementäre*** Dreiecke oder Dreiseite heissen*). Die Seiten zweier complementären Dreiecke bezeichne man den gegenüberliegenden Ecken entsprechend mit kleinen lateinischen Buchstaben, so dass z. B. aus den complementären Dreiecken ABC und DEF die complementären Dreiseite abc und def erhalten werden. Dann sind die Werthe des Wurfes von sechs Geraden gleich den Werthen des Wurfes von sechs Punkten. Das folgt sofort aus dem oben angegebenen Hülfssatz. Danach ist

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{(DBC)(AEF)}{(ABC)(DEF)} = \frac{(ef,\ B,\ C).(bc,\ E,\ F)}{(bc,\ B,\ C).(ef,\ E,\ F)} \\ &= \frac{(e,\ f,\ BC)\cdot\frac{(B,\ C)}{(e,\ f)}\cdot(b,\ c,\ EF)\cdot\frac{(E,\ F)}{(b,\ c)}}{(b,\ c,\ BC)\cdot\frac{(B,\ C)}{(b,\ c)}\cdot(e,\ f,\ EF)\cdot\frac{(E,\ F)}{(e,\ f)}} \\ &= \frac{(efa)(bcd)}{(bca)(efd)} = \frac{(dbc)(aef)}{(abc)(def)}.\end{aligned}$$

Ebenso zeigt man, dass $(abc,\ efd) = \beta$, $(bca,\ def) = \gamma$, $(bca,\ efd) = \delta$ ist, und daraus folgt, dass der aus den complementären Dreiecken ABC und

---

*) Vergl. *Schröter*, Das *Clebsch*sche Sechseck. Math. Annal. Bd. 28, S. 457.

DEF abgeleitete Wurf von sechs Geraden dieselben Werthe hat wie der Wurf von sechs Punkten. Aber auch wenn man z. B. die complementären Dreiecke *ADE* und *BCF* zu Grunde legt und also *DE* mit a', *EA* mit d', *AD* mit e', *BC* mit f' u. s. w. bezeichnet, folgt in derselben Weise, dass

$$(a'd'e',\ b'c'f') = (ADE,\ BCF)$$

ist u. s. w., so dass auch dieser aus sechs anderen Geraden bestehende Wurf dieselben Werthe hat wie der Wurf von sechs Punkten.

Aus einem Wurfe von sechs Punkten kann man zehn Paare von complementären Dreiecken bilden, denen zehn Würfe von sechs Geraden entsprechen. Alle diese Würfe haben dieselben Werthe wie der Wurf von sechs Punkten.

Umgekehrt kann man aus einem Wurfe von sechs Geraden zehn Würfe von sechs Punkten ableiten, die alle dieselben Werthe haben wie der Wurf von sechs Geraden. Aus einem Wurfe von sechs Punkten kann man danach bloss durch Ziehen von Verbindungslinien und Bestimmen von Schnittpunkten beliebig viele andere Würfe von sechs Punkten ableiten, die dieselben Werthe haben wie der ursprüngliche Wurf.

Ein besonderer Fall des allgemeinen Satzes über die Reciprocität zwischen Würfen von Punkten und Geraden ist der Satz von *Desargues* über perspectivische Dreiecke. Er ergiebt sich, wenn unter den Werthen eines Wurfes der Werth 1 vorkommt.

Unter den 720 Werthen eines Wurfes von sechs Punkten sind die erwähnten 90 Werthe im allgemeinen von einander verschieden, wie man aus ihren Ausdrücken durch α, β, γ, δ sofort erkennt. Wenn aber z. B. $\alpha = 0$ ist, so sind von den 90 Werthen neun gleich 0 und neun gleich ∞, da in neun Gruppen von je neun (*DV.*) α je einmal als Zähler auftritt und in der zehnten Gruppe jedesmal als Nenner. In diesem Falle liegen entweder *B, C, D* oder *A, E, F* in gerader Linie.

Einen sehr merkwürdigen Specialfall erhält man, wenn von den vier unabhängigen Werthen des Wurfes, drei, z. B. α, β, γ gleich $+1$, der vierte, δ, gleich -1 ist. Dann sind nämlich sämmtliche (*DV.*) der ersten Gruppe von neun gleich $+1$ oder gleich -1, und deshalb sind alle 720 Werthe des Wurfes gleich einer dieser Zahlen, und zwar sind 480 gleich $+1$ und 240 gleich -1, da die Summe von je drei passend gewählten den Werth $+1$ haben muss.

Dieser Wurf von sechs Punkten ist von *Clebsch* zuerst bemerkt und

zehnfach *Brianchon*sches Sechsseit genannt worden*). Da *Schröter***) diese von ihm als *Clebsch*sches Sechseck bezeichnete Figur genau untersucht, eine einfache Construction von ihr angegeben und bemerkt hat, dass ein regelmässiges Fünfeck mit seinem Mittelpunkte ein solches Sechseck bildet, so kann ich mich damit begnügen, die folgenden Fundamentaleigenschaften des *Clebsch*schen Sechsecks anzuführen, die aus der hier gegebenen Herleitung unmittelbar folgen und zum Theil von *Schröter* nicht erwähnt worden sind. Daraus, dass die Werthe des Wurfes alle gleich ± 1 sind, folgt wegen der Gleichung

$$(ABC,\ DEF) = (D,\ A,\ BC,\ EF),$$

dass drei Gerade, auf denen je zwei der sechs Punkte liegen, sich entweder in einem Punkte treffen oder so schneiden, dass jedesmal zwei der Punkte durch die Schnittpunkte ihrer Verbindungslinie mit den beiden anderen Geraden harmonisch von einander getrennt werden. Je zwei complementäre Dreiecke liegen auf vierfache Weise perspectivisch. Zwei complementäre Dreiecke ergeben einen Wurf von sechs zu den 15 Seiten des Sechsecks gehörenden Geraden, der ebenfalls die Werthe ± 1 hat. Aus jedem dieser zehn Würfe von sechs Geraden folgen wieder zehn Würfe von sechs Punkten mit den Werthen ± 1, von denen aber einer jedesmal wieder das ursprüngliche Sechseck ist. Da ferner jeder dieser Würfe von sechs Geraden, wie eine etwas eingehendere Betrachtung leicht zeigt, sechs Sechsecke liefert, die von keinem anderen der zehn Würfe von sechs Geraden herrühren, und drei Sechsecke, deren jedes einmal noch von einem anderen Wurfe erzeugt wird, *so erhält man ausser dem ursprünglichen Clebschschen Sechseck noch 75 verschiedene Clebschsche Sechsecke, deren Eckpunkte zu den Schnittpunkten der 15 Seiten des ursprünglichen Sechsecks gehören.*

Als Beispiel für die allgemeine Methode, nach der man aus einem beliebigen Wurfe von sechs Punkten einen anderen mit denselben Werthen findet, möge eins der eben genannten 75 Sechsecke abgeleitet werden. Aus den Punkten A, B, C, D, E, F des *Clebsch*schen Sechsecks (z. B. eines regelmässigen Fünfecks mit seinem Mittelpunkte) bilde man zwei complementäre Dreiecke, etwa ABC und DEF und bezeichne BC mit a, u. s. w., EF mit d u. s. w. Dann bilden die Geraden a, b, c, d, e, f einen Wurf

*) Math. Annalen, Bd. 4, S. 284.

**) Math. Annalen, Bd. 28, S. 457, wo man auch die weitere Litteratur über das *Clebsch*sche Sechseck angegeben findet.

von sechs Geraden mit den Werthen ± 1, also eine Figur, die dem *Clebsch*schen Sechseck reciprok ist. Diese Geraden werden auf eine andere als die schon angegebene Weise zu zwei complementären Dreiseiten angeordnet, etwa *abd* und *cef*. Dann sind die Eckpunkte dieser Dreiseite die sechs Ecken eines neuen *Clebsch*schen Sechsecks.

Ausser den erwähnten 75 *Clebsch*schen Sechsecken giebt es übrigens noch andere, deren Eckpunkte ebenfalls zu den Schnittpunkten der Seiten des ursprünglichen Sechsecks gehören, z. B. das aus dem regelmässigen Fünfeck durch Verlängerung der Seiten abgeleitete Sternfünfeck mit seinem Mittelpunkte. Von diesen lassen sich aber nicht zwei complementäre Dreiecke angeben, deren Seiten alle zu den 15 Seiten des ursprünglichen Sechsecks gehören.

Nach diesem kurzen Hinweise auf den merkwürdigsten besonderen Fall eines Wurfes von sechs Punkten komme ich noch einmal auf das allgemeine (*DV.*) zurück. Lässt man von den sechs Punkten zwei zusammenfallen, so geht das (*DV.*), wenn es in Folge dessen nicht gleich 1 oder gleich $\frac{0}{0}$ wird, in ein gewöhnliches Doppelverhältniss von vier Strahlen über, nämlich den Verbindungsstrahlen des doppelten Punktes mit den vier übrigen Punkten. Es ist

$$\frac{(DBG)(AEG)}{(ABG)(DEG)} = (D,\ A,\ BG,\ EG) = (G;\ D,\ A,\ B,\ E).$$

Analog ergiebt sich das Doppelverhältniss von vier Punkten einer Geraden als das (*dv.*) von sechs Geraden, von denen zwei zusammenfallen in die Gerade, als deren Schnittpunkte mit den vier übrigen Geraden die vier Punkte des Doppelverhältnisses erscheinen.

Weil

$$\frac{(DBC)(AEF)}{(ABC)(DEF)} = \frac{(DBC)(AEC)(DEC)(AEF)}{(ABC)(DEC)(DEF)(AEC)}$$
$$= (C;\ D,\ A,\ B,\ E).(E;\ C,\ F,\ D,\ A)$$

ist, so lässt sich ein allgemeines (*DV.*) als Product von zwei gewöhnlichen Doppelverhältnissen darstellen, und da das offenbar auf verschiedene Weisen möglich ist, so ergeben sich hierdurch Relationen zwischen den Doppelverhältnissen der Verbindungslinien von sechs Punkten.

Zum Schluss will ich noch einige Worte über Verallgemeinerungen des (*DV.*)-Begriffes sagen. Aus neun Punkten einer Ebene kann man das

Inhalts-Tripelverhältniss

$$\frac{(DBC)(GEF)(AHJ)}{(ABC)(DEF)(GHJ)}$$

bilden. Es hat für die Theorie der Curven dritter Ordnung eine ähnliche Bedeutung wie das Doppelverhältniss für die Kegelschnitte. Fallen die drei Punkte C, F, J in einen Punkt K zusammen, so geht das Verhältniss in ein *Möbius*sches Dreiecksschnittverhältniss der Strahlen KA, KB, KD, KE, KG, KH über.

Auch sechs Punkte einer Ebene geben zur Bildung eines Tripelverhältnisses Veranlassung, nämlich

$$\frac{(ABD)(BCE)(CAF)}{(ABE)(BCF)(CAD)},$$

wo jetzt aber die Punkte A, B, C und D, E, F nicht mehr gleichberechtigt sind. Dieses Tripelverhältniss lässt sich ebenfalls als Product zweier gewöhnlichen Doppelverhältnisse darstellen und dadurch und durch die Benutzung des Umstandes, dass von den 720 Werthen, die sich durch die Permutationen der Buchstaben ergeben, jetzt je drei das Product 1 haben, kann man wieder diese 720 Werthe alle durch vier Fundamentalwerthe ausdrücken, aber bei weitem nicht so einfach wie bei dem $(DV.)$.

Gerade so, wie das einstufige Doppelverhältniss $(DV.)_1$ — ich bezeichne die Stufe durch den Index — nicht nur für die Geometrie der Grundgebilde erster Stufe von Wichtigkeit ist, sondern auch für die Geometrie der Grundgebilde höherer Stufe, so ist das $(DV.)_2 = (ABC, DEF)$ auch in der Geometrie des Raumes von drei Dimensionen mit Vortheil zu verwenden. Es möge dafür noch ein Beispiel angeführt werden.

Das $(DV.)_2$ von sechs Strahlen eines Punktes hat denselben Werth wie das $(DV.)_2$ von sechs Punkten einer Ebene, durch die die Strahlen gehen. Dieses $(DV.)_2$ ist ein besonderer Fall des $(DV.)_3$ von acht Punkten, der sich ergiebt, wenn zwei von den acht Punkten zusammenfallen. Das aus Punktvolumen von Tetraedern*) gebildete $(DV.)_3$

$$\frac{(EBCD)(AFGH)}{(ABCD)(EFGH)}$$

geht in das $(DV.)_2$ von sechs Strahlen eines Punktes K über, wenn z. B.

*) Es bedarf wohl keiner Auseinandersetzung darüber, wie das Punktvolumen eines Tetraeders dem Punktinhalte eines Dreiecks entsprechend zu definiren ist.

D mit H in den Punkt K zusammenfällt; es ist

$$\frac{(EBCK)(AFGK)}{(ABCK)(EFGK)} = (K;\ ABC,\ EFG),$$

d. h. gleich dem $(DV.)_2$ der Verbindungsstrahlen des Punktes K mit den Punkten A, B, C, E, F, G.

Ein gleich einer Constanten gesetztes $(DV.)_1$ von vier Strahlen einer Ebene, die durch vier feste nicht in derselben Geraden liegende Punkte gehen und sich in einem variablen Punkte schneiden, liefert bekanntlich eine Curve zweiter Ordnung als geometrischen Ort des veränderlichen Punktes. Ebenso ist

$$\lambda(K;\ ABC,\ EFG)+\mu(K;\ ABC,\ FGE)+\nu(K;\ BCA,\ EFG)=\varkappa,$$

wo $\lambda, \mu, \nu, \varkappa$ constante Zahlen sind, die Gleichung einer allgemeinen Fläche zweiter Ordnung, auf der die festen Punkte A, B, C, E, F, G und der variable Punkt K liegen.

Ueber reguläre Determinanten und die aus ihnen abgeleiteten Systeme.

(Von Herrn *K. Hensel.*)

Es sei

$$A = (a_{gh}) \qquad (g, h = 1, 2, \ldots, n)$$

ein System von n^2 Elementen a_{gh}, welche ganze Zahlen oder ganze Functionen einer Variablen r sein mögen, und es werden durch

$$D_1, \quad D_2, \quad \ldots, \quad D_n$$

die grössten gemeinsamen Theiler aller Subdeterminanten der ersten, zweiten, ..., $n$ten Ordnung bezeichnet, welche man aus dem Systeme A bilden kann.

Es sei ferner A_r eine bestimmte Unterdeterminante $r$ter Ordnung von A, und es mögen

$$A_1, \quad A_2, \quad \ldots, \quad A_{r-1}$$

die grössten gemeinsamen Theiler aller Subdeterminanten bzw. der ersten, zweiten, ..., $(r-1)$-ten Ordnung von A_r sein. Ebenso seien

$$A_{r+1}, \quad A_{r+2}, \quad \ldots, \quad A_n$$

die grössten gemeinsamen Theiler aller der Determinanten bzw. der $(r+1)$-, $(r+2)$-, ..., $n$ten Ordnung, welche aus der Determinante A_r durch Ränderung derselben mit je einer, zwei, ..., $(n-r)$ Zeilen und Colonnen entstehen, und welche die *Superdeterminanten* von A_r genannt werden mögen. Die Determinante A_r ist stets durch den grössten gemeinsamen Theiler D_r aller Determinanten $r$ter Ordnung von A theilbar, und ebenso ist der grösste gemeinsame Theiler A_ϱ aller aus A_r abgeleiteten Determinanten (Subdeterminanten oder Superdeterminanten) einer bestimmten ϱten Ordnung ein Vielfaches des gemeinsamen Theilers D_ϱ *aller* Unterdeterminanten derselben Ordnung von A, weil ja die ersteren Determinanten nur einen Theil der

letzteren ausmachen. Es soll nun die Determinante A_r *regulär* genannt werden, wenn sie dem Determinantentheiler D_r genau gleich ist, und ebenso soll das System der aus A_r abgeleiteten Determinanten einer bestimmten ϱten Ordnung regulär heissen, wenn ihr gemeinsamer Theiler A_ϱ dem grössten gemeinsamen Theiler D_ϱ aller Unterdeterminanten derselben Ordnung von A genau gleich ist. Dann besteht der folgende wichtige Satz:

> Ist A_r eine reguläre Unterdeterminante von A, so sind die Systeme aller aus A_r abgeleiteten Determinanten erster, zweiter, ..., $n$ter Ordnung ebenfalls regulär;

oder, was dasselbe ist:

> Ist $A_r = D_r$, so stimmen die Theiler $A_1, A_2, \ldots, A_n$ der aus A_r abgeleiteten Determinanten mit den entsprechenden Theilern $D_1, D_2, \ldots, D_n$ aller Unterdeterminanten von A überein.

Zum Beweise dieses Satzes nehme ich der Einfachheit wegen an, dass die der Untersuchung zu Grunde gelegte Determinante $r$ter Ordnung A_r die erste Hauptunterdeterminante des Systemes A ist, denn dies kann ja, ohne die Voraussetzungen des Satzes im mindesten zu ändern, durch Vertauschung von Parallelreihen stets erreicht werden. In dieser Anordnung bezeichne ich das ganze System A kurz folgendermaassen:

$$(1.) \qquad A = \left(\frac{a_{ik}}{a_{\varrho k}}\middle|\frac{a_{i\sigma}}{a_{\varrho\sigma}}\right), \qquad \binom{i,\ k = 1, 2, \ldots, r}{\varrho,\ \sigma = r+1, \ldots, n}$$

so dass also einfach die zu Grunde gelegte Unterdeterminante

$$A_r = (a_{ik}) \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, r)$$

ist.

Ich mache nun Gebrauch von dem ebenso einfachen, wie weittragenden Satze, dass jedes System (c_{gh}) von m^2 ganzen Grössen ohne Veränderung seiner Determinantentheiler, nämlich allein durch Composition mit Einheitssystemen in ein „Diagonalsystem"

$$(d_i) = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & d_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \ldots & d_m \end{pmatrix}$$

verwandelt werden kann, von dessen Elementen $d_1, d_2, \ldots, d_m$ jedes ein Theiler des folgenden ist*).

---

*) Der Beweis dieses Fundamentalsatzes beruht bei ganzzahligen Elementen c einfach darauf, dass man das erste Element c_{11} so lange verkleinern kann, bis dasselbe ein

Wir transformiren nun das System A in der soeben charakterisirten Weise so, dass sein erster Bestandtheil $A_r = (a_{ik})$ in ein Diagonalsystem übergeht, und erhalten so das neue System:

$$(1^a.)\qquad \left(\frac{d_i}{a'_{\varrho i}}\middle|\frac{a'_{i\sigma}}{a'_{\varrho\sigma}}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} d_1 & & & a'_{1\sigma} \\ & \ddots & & \vdots \\ & & d_r & a'_{r\sigma} \\ \hline a'_{\varrho 1} & \dots & a'_{\varrho r} & a'_{\varrho\sigma} \end{array}\right), \qquad (\varrho, \sigma = r+1, \dots, n)$$

in welchem jedes Element d_i in dem folgenden d_{i+1} enthalten ist. Da diese Transformation allein durch geeignete Verbindungen der r ersten Parallelreihen erzielt wird, so bleiben die Theiler $A_1, \dots, A_r, \dots, A_n$ der Sub- und Superdeterminanten von A_r dabei ungeändert, und ein Gleiches gilt natürlich auch von den Theilern $D_1, \dots, D_r, \dots, D_n$ aller Unterdeterminanten von A.

In diesem neuen Systeme (1^a.) ist nun jedes der Elemente $a'_{i\sigma}$ bzw. $a'_{\varrho i}$ durch das entsprechende Diagonalglied d_i theilbar, welches mit ihm in derselben Reihe steht. Um nämlich z. B. zu beweisen, dass $a'_{1\sigma}$ durch d_1 theilbar ist, bilden wir die Determinante $r$ter Ordnung:

$$\begin{vmatrix} a'_{1\sigma} & 0 & \dots & 0 \\ a'_{2\sigma} & d_2 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \\ a'_{r\sigma} & 0 & \dots & d_r \end{vmatrix} = a'_{1\sigma} d_2 d_3 \dots d_r,$$

welche aus A_r hervorgeht, wenn man dort die erste Colonne durch die σte ersetzt. Da aber die Determinante A_r selbst in (1^a.) offenbar gleich $(d_1 d_2 \dots d_r)$ ist, und da diese nach der in unserem Satze gemachten Voraussetzung regulär, d. h. ein Theiler aller übrigen Determinanten $r$ter Ordnung ist, so folgt unmittelbar die Theilbarkeit von $a'_{1\sigma}$ durch d_1, und entsprechend wird der Beweis für jedes andere Element $a'_{i\sigma}$ bzw. $a'_{\varrho i}$ geführt. Ist dies aber der Fall, so kann man jedes Element $a'_{1\sigma}$ dadurch zu Null machen, dass man ein geeignetes Vielfaches der ersten Colonne von der σten Colonne abzieht, und auf analoge Art können alle Elemente $a'_{i\sigma}$ und $a'_{\varrho i}$ ebenfalls zu Null ge-

Theiler aller übrigen ist, und dass man dann alle anderen Elemente der ersten Zeile und Colonne zu Null machen kann; alsdann nämlich kann man bei dem übrig bleibenden inneren Systeme $(n-1)$-ter Ordnung genau ebenso verfahren, und gelangt so zu jenem Diagonalsysteme. Sind die Elemente c_{gh} Functionen einer Variablen, so kann der Grad von c_{11} solange verkleinert werden, bis alle c_{gh} durch c_{11} theilbar sind. Entsprechende Ueberlegungen können auch dann angewandt werden, wenn die c_{gh} ganze Grössen eines beliebigen Gattungsbereiches sind, und der hier bewiesene Satz gilt somit auch für solche Fälle. (Vgl. auch *Kronecker*, dieses Journal Bd. 107 S. 135).

macht werden, so dass das System (1ª.) übergeht in das folgende:

$$(1^b.)\qquad \left(\begin{array}{c|c} d_i & 0 \\ \hline 0 & a''_{\varrho\sigma} \end{array}\right). \qquad \left(\begin{smallmatrix} i=1,2,\ldots,r \\ \varrho,\ \sigma=r+1,\ldots,n \end{smallmatrix}\right)$$

Durch diese Transformation wird das System $A_r = (d_i)$, also auch die Theiler seiner Subdeterminanten $(A_1, \ldots, A_{r-1})$ garnicht geändert, aber auch die Theiler $A_{r+1}, \ldots, A_n$ der Superdeterminanten von A_r bleiben dieselben, da die Superdeterminanten in (1ᵇ.) durch die in (1ª.) homogen und linear mit ganzen Coefficienten darstellbar sind, und umgekehrt.

Das so erhaltene System (1ᵇ.) transformiren wir endlich noch dadurch in ein einfacheres, dass wir auch seinen letzten Theil $(a''_{\varrho\sigma})$ in ein Diagonalsystem umformen; auch bei dieser Transformation bleiben sowohl die Theiler $(A_1, \ldots, A_r, \ldots, A_n)$ als auch die Theiler $(D_1, \ldots, D_r, \ldots, D_n)$ offenbar ungeändert. Hierdurch ergiebt sich ein System:

$$(1^c.)\qquad \left(\begin{array}{c|c} d_i & 0 \\ \hline 0 & d_\varrho \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} \begin{matrix} d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_r \end{matrix} & 0 \\ \hline 0 & \begin{matrix} d_{r+1} & & \\ & \ddots & \\ & & d_n \end{matrix} \end{array}\right),$$

in welchem auch jedes Diagonalelement d_ϱ des letzten Theiles in dem folgenden $d_{\varrho+1}$ enthalten ist; jedoch brauchte dasselbe zunächst noch nicht für die beiden Elemente d_r und d_{r+1} zu gelten, welche am Ende des ersten und am Anfang des zweiten Diagonalsystems stehen. Aber auch dies muss nothwendig der Fall sein, denn sonst wäre die Determinante $r$ter Ordnung:

$$\begin{vmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ & \ddots\ d_{r-1} & 0 \\ 0 & 0 & d_{r+1} \end{vmatrix} = d_1 \ldots d_{r-1} d_{r+1}$$

nicht, wie dies vorausgesetzt wurde, durch die reguläre Determinante $A_r = d_1 \ldots d_{r-1} d_r$ theilbar.

In diesem Systeme (1ᶜ.) ist aber der grösste gemeinsame Theiler A_ϱ aller aus A_r abgeleiteten Determinanten ϱter Ordnung, mögen dies nun Sub- oder Superdeterminanten sein, gleich der ersten Hauptunterdeterminante, d. h. es ist:

$$A_\varrho = d_1 d_2 \ldots d_\varrho,$$

denn jede aus A_r abgeleitete Determinante ϱter Ordnung ist durch diese theilbar. Andererseits ist aber überhaupt *jede* Unterdeterminante dieser Ordnung des *ganzen* Systemes (1ᶜ.) durch diese theilbar, d. h. es ist in der

That für dieses und damit auch für das ursprüngliche System:

$$A_\varrho = D_\varrho, \qquad (\varrho = 1, 2, \dots, n)$$

und damit ist der ausgesprochene Satz bewiesen.

Es sei nun p irgend ein Primfactor desjenigen Bereiches, welchem die Coefficienten a_{gh} von A angehören, d. h. eine reelle Primzahl oder ein Linearfactor $(s-a)$; dann heisse eine Unterdeterminante A_r von A regulär in Bezug auf p, wenn sie diesen Primfactor genau ebenso oft enthält als der Theiler D_r *aller* Unterdeterminanten $r$ter Ordnung von A; offenbar besitzt ein System A stets mindestens eine Unterdeterminante A_r, welche in Bezug auf einen beliebigen Primfactor p regulär ist. Ebenso soll das System aller aus A_r abgeleiteten Determinanten ϱter Ordnung (Sub- oder Superdeterminanten) in Bezug auf p regulär heissen, wenn ihr Theiler A_ϱ in Bezug auf p mit dem Theiler D_ϱ aller Unterdeterminanten derselben Ordnung von A übereinstimmt. Dann besteht der folgende Satz, welcher dem oben ausgesprochenen völlig analog ist:

Ist A_r eine in Bezug auf p reguläre Unterdeterminante von A, so sind die Systeme aller aus A_r abgeleiteten Determinanten (Sub- und Superdeterminanten) ebenfalls regulär.

Dieser Satz kann genau ebenso bewiesen werden wie der vorige, wenn man nur hinzunimmt, dass jedes System (c_{ik}) einer beliebigen $m$ten Ordnung durch Composition mit Einheitssystemen in Bezug auf p in ein äquivalentes Diagonalsystem (d_i) transformirt werden kann, dessen Elemente nur Potenzen von p sind, und von denen jedes ein Theiler des folgenden ist. Als Einheitssysteme in Bezug auf p sind aber hier auch diejenigen anzusehen, deren Elemente rationale Brüche sind, wenn nur ihr Nenner p nicht enthält, und deren Determinante ebenfalls durch p nicht theilbar ist. Auch durch Composition mit solchen Einheitssystemen werden die Determinantentheiler von (c_{ik}), soweit sie Potenzen von p sind, nicht geändert, es kann somit der vorher gegebene Beweis wörtlich angewendet werden.

Da ein System von Determinanten ϱter Ordnung dann und nur dann in Bezug auf p regulär ist, wenn es mindestens eine reguläre Determinante enthält, so kann das soeben gefundene Resultat auch folgendermaassen ausgesprochen werden:

Ist A_r irgend eine modulo p reguläre Determinante $r$ter Ordnung des Systemes A, so besitzt sie mindestens eine reguläre

Subdeterminante $(r-1)$-ter Ordnung und mindestens eine reguläre Superdeterminante der $(r+1)$-ten Ordnung.

Dieses Lemma wird in der Arbeit gebraucht, in welcher Herr *Weierstrass* die Theorie der Formenschaaren begründet und die Frage nach der Aequivalenz derselben gelöst hat (Zur Theorie der bilinearen und quadratischen Formen, Berl. Ber. vom Jahre 1868 pag. 310—338). Um nämlich nachzuweisen, dass zwei Formenschaaren $(s\varphi-\psi)$ und $(s\varphi'-\psi')$ dann und nur dann äquivalent sind, wenn die Elementartheiler ihrer Coefficientensysteme:

$$(sa_{ik}-b_{ik}) \quad \text{und} \quad (sa'_{ik}-b'_{ik})$$

übereinstimmen, wird zunächst vorausgesetzt, dass in der Determinante $|sa_{ik}-b_{ik}|$ die Hauptunterdeterminanten

$$S^{(k)} \qquad (k=0,1,2,\ldots,n-1)$$

sämmtlich regulär sind, welche aus der Determinante $|sa_{ik}-b_{ik}|$ durch Weglassung der k ersten Zeilen und Colonnen entstehen. Ist nun diese Voraussetzung für einen Linearfactor $(s-c_\lambda)$ der Determinante $|sa_{ik}-b_{ik}|$ nicht erfüllt, und ist $S^{(r)}$ die erste nicht reguläre Hauptunterdeterminante, während $S^{(0)}, \ldots, S^{(r-1)}$ sämmtlich regulär sind, so formt Herr *Weierstrass* durch eine specielle lineare Transformation die Schaar $(s\varphi-\psi)$ in eine äquivalente $(s\bar{\varphi}-\bar{\psi})$ um, für welche die entsprechende Hauptunterdeterminante

$$\bar{S}^{(r)} = \Sigma S^{(r-1)}_{\alpha\beta} h_\alpha k_\beta$$

ist, während die Elemente (h_α, k_β) beliebige Constanten sind und $S^{(r-1)}_{\alpha\beta}$ die sämmtlichen Unterdeterminanten der regulären Determinante $S^{(r-1)}$ bedeuten. Da nun nach dem soeben bewiesenen Satze unter diesen Determinanten mindestens eine reguläre vorhanden sein muss, so kann man die Constanten (h_α, k_β) auf unendlich viele Arten so bestimmen, dass in der äquivalenten Schaar auch $\bar{S}^{(r)}$ in Bezug auf $(s-c_\lambda)$ regulär wird, und zwar so, dass die vorhergehenden Hauptunterdeterminanten regulär bleiben. In Bezug auf die weiteren Folgerungen aus diesem Satze möchte ich auf die Abhandlung verweisen, welche Herr *Frobenius* soeben in der Akademie der Wissenschaften gelesen hat. (Berl. Ber. vom Jahre 1894 S. 31—44). Aus dem Wunsche, einige der dort bewiesenen schönen Sätze auf einem rein arithmetischen Wege herzuleiten, ist diese und eine folgende Arbeit hervorgegangen.

Berlin, den 29. Januar 1894.

Ueber die *Gauss*sche und *Bessel*sche Differentialgleichung und eine neue Integralform der letzteren.

(Von Herrn *P. Schafheitlin* in Charlottenburg.)

Aus der Form der *Gauss*schen hypergeometrischen Reihe und der Reihenentwickelung der *Bessel*schen Functionen ergiebt sich bekanntlich ohne weiteres, dass die letzteren einen Grenzfall der ersteren darstellen, wenn nämlich die Parameter α, β unendlich gross und die Variable x unendlich klein wird. Ein anderer Uebergang, abweichend vom obigen direct an die Differentialgleichung der hypergeometrischen Reihe anknüpfend, soll im Folgenden gezeigt werden. Im Anschluss hieran fliessen aus einer Grundform mehrere Integralformen der *Bessel*schen Functionen, die sonst einzeln abgeleitet wurden, und aus einer derselben ergeben sich mehrere einfache Folgerungen über die Nullstellen der Functionen $J^0(x)$ und $Y^0(x)$.

1.

Die Differentialgleichung

$$(1.)\qquad (x-\mathfrak{k}_1)(x-\mathfrak{k}_2)\frac{d^2y}{dx^2}+\{(\alpha+\beta+1)x-\gamma(\mathfrak{k}_1+\mathfrak{k}_2)\}\frac{dy}{dx}+\alpha\beta y = 0$$

lässt sich durch Verschiebung des Nullpunktes der Variabeln x stets auf die Form bringen:

$$(2.)\qquad x(x-\mathfrak{k})\frac{d^2y}{dx^2}+\{(\alpha+\beta+1)x-\gamma\mathfrak{k}\}\frac{dy}{dx}+\alpha\beta y = 0.$$

Sind die beiden im Endlichen liegenden singulären Stellen dieser Gleichung von einander verschieden, so kann man, ohne der Allgemeinheit etwas zu schaden, $\mathfrak{k}=1$ setzen, und es geht alsdann (2.) in die bekannte *Gauss*sche Differentialgleichung über. Fallen dagegen die beiden endlichen singulären Punkte zusammen, so kann man (2.) nur dann bestehen lassen,

wenn man dem Parameter γ auch unendlich grosse Werthe beilegt, so dass $\gamma\mathfrak{k} = \delta$ eine endliche Grösse ist. Es geht dann (2.) über in:

$$(3.)\qquad x^2\frac{d^2y}{dx^2}+\{(\alpha+\beta+1)x-\delta\}\frac{dy}{dx}+\alpha\beta y = 0.$$

Man übersieht sofort, dass man der Grösse δ einen willkürlich gegebenen Werth ausser Null — wofür die Lösungen von (3.) die Form $Ax^{-\alpha}$ und $Bx^{-\beta}$ annehmen — beilegen kann, ohne der Allgemeinheit Abbruch zu thun; es wird dadurch ein Vielfaches von x als unabhängige Variable eingeführt. Beide Lösungen von (3.) sind im allgemeinen an der Nullstelle unstetig; in der Umgebung des unendlich fernen Punktes haben die Lösungen die Form $x^{-\alpha}\mathfrak{P}\left(\frac{1}{x}\right)$ und $x^{-\beta}\mathfrak{P}_1\left(\frac{1}{x}\right)$*); nur wenn α und β oder deren Differenz ganze Zahlen sind, brauchen diese beiden Lösungen kein Fundamentalsystem zu bilden. Die Reihen für $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{P}_1$ ergeben sich sehr einfach aus (3.), so dass man erhält:

$$(4.)\qquad \begin{cases} y_1 = x^{-\alpha}\sum\limits_{\lambda=0}^{\infty}(-1)^{\lambda}\dfrac{\Pi(\alpha+\lambda-1)}{\Pi\lambda\,\Pi(\alpha-\beta+\lambda)}\left(\dfrac{\delta}{x}\right)^{\lambda}, \\ y_2 = x^{-\beta}\sum\limits_{\lambda=0}^{\infty}(-1)^{\lambda}\dfrac{\Pi(\beta+\lambda-1)}{\Pi\lambda\,\Pi(\beta-\alpha+\lambda)}\left(\dfrac{\delta}{x}\right)^{\lambda}. \end{cases}$$

Diese beiden Reihen convergiren für jeden von Null verschiedenen Werth von x. Da das Verhalten der Lösungen von (3.) am unendlich fernen Punkte sich einfacher gestaltet als am Nullpunkte, so wird es zweckmässig sein, beide Punkte in (3.) durch die Substitution

$$x = \frac{1}{\xi}$$

zu vertauschen; dann geht (3.) über in:

$$(5.)\qquad \xi^2\frac{d^2y}{d\xi^2}+\{\delta\xi^2-(\alpha+\beta-1)\xi\}\frac{dy}{d\xi}+\alpha\beta y = 0.$$

Setzt man nun:

$$(6.)\qquad y = \eta.z,$$

wo η eine Lösung der Differentialgleichung:

$$(7.)\qquad \xi\frac{d\eta}{d\xi}-(a\xi+b)\eta = 0$$

---

*) Siehe beispielsweise meine Abhandlung, dieses Journal Bd. 106 Satz IX.

ist, so folgt aus (5.)—(7.):

$$\frac{d^2z}{d\xi^2}+\left\{2a+\delta+\frac{2b-(\alpha+\beta-1)}{\xi}\right\}\frac{dz}{d\xi}$$
$$+\left\{a(a+\delta)+\frac{b(2a+\delta)-a(\alpha+\beta-1)}{\xi}+\frac{(\alpha-b)(\beta-b)}{\xi^2}\right\}z = 0.$$

Bestimmt man nun:

$$(8.)\qquad a=-\frac{\delta}{2};\quad b=\tfrac{1}{2};\quad \text{also}\quad \eta=\sqrt{\xi}.e^{-\frac{\delta\xi}{2}},$$

so folgt

$$(9.)\qquad \frac{d^2z}{d\xi^2}+\frac{2-\alpha-\beta}{\xi}\frac{dz}{d\xi}+\left\{-\frac{\delta^2}{4}+\frac{\delta(\alpha+\beta-1)}{2\xi}+\frac{(\alpha-\frac{1}{2})(\beta-\frac{1}{2})}{\xi^2}\right\}z = 0.$$

In dieser Gleichung ist die Differentialgleichung, der die *Bessel*schen Functionen genügen, als specieller Fall enthalten; setzt man nämlich:

$$(10.)\qquad \begin{cases}\delta = \pm 2i,\\ \alpha = \frac{1}{2}+n,\\ \beta = \frac{1}{2}-n,\end{cases}$$

wo n eine beliebige Constante bedeutet, so geht (9.) über in die *Bessel*sche Differentialgleichung:

$$(11.)\qquad \frac{d^2z}{d\xi^2}+\frac{1}{\xi}\frac{dz}{d\xi}+\left(1-\frac{n^2}{\xi^2}\right)z = 0;$$

und es besteht zwischen z und y nach (6.) und (8.) die Beziehung:

$$(12.)\qquad z(\xi)=\frac{1}{\sqrt{\xi}}\cdot e^{\frac{\delta\xi}{2}}y(\xi)=\sqrt{x}.e^{\frac{\delta}{2x}}y\left(\frac{1}{x}\right).$$

Man hat demnach das Resultat:

Sind die singulären Punkte $\mathfrak{k}_1$, $\mathfrak{k}_2$ *der Differentialgleichung* (1.) *von einander verschieden, so führt dieselbe auf die Gausssche hypergeometrische Reihe; sind dieselben einander gleich, so sind die Lösungen bis auf eine Exponentialfunction auf die Lösungen von* (9.) *zurückgeführt. Diese Gleichung enthält als speciellen Fall* $(\alpha+\beta=1)$ *die Besselsche Differentialgleichung.*

2.

Nachdem durch das Vorstehende der Zusammenhang zwischen den *Gauss*schen und *Bessel*schen Functionen charakterisirt ist, sollen im Folgenden nur die letzteren weiter betrachtet werden und zwar unter der Annahme, dass der Index n eine ganze Zahl sei. Manche Ableitungen bleiben auch,

wie man leicht erkennen kann, für andere Werthe gültig. Bezeichnet man wie üblich diejenige Lösung von (11.), deren Entwickelung in eine Potenzreihe mit $\frac{\xi^n}{2^n \Pi n}$ beginnt mit $J^n(\xi)$ und vertauscht wieder ξ mit x, so folgt aus (4.), (10.) und (12.) je nach dem Werthe von δ:

$$J^n(x) = \frac{(2x)^n}{\sqrt{\pi}} e^{ix} \sum_{\lambda=0}^{\infty} (-1)^\lambda \frac{\Pi(n+\lambda-\frac{1}{2})}{\Pi\lambda\,\Pi(2n+\lambda)} (2ix)^\lambda,$$

$$J^n(x) = \frac{(2x)^n}{\sqrt{\pi}} e^{-ix} \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{\Pi(n+\lambda-\frac{1}{2})}{\Pi\lambda\,\Pi(2n+\lambda)} (2ix)^\lambda$$

und hieraus durch Addition die bekannte Gleichung*):

$$(13.)\quad \begin{cases} J^n(x) = \frac{(2x)^n}{\sqrt{\pi}} \Big\{\cos x \sum_{\lambda=0}^{\infty} (-1)^\lambda \frac{\Pi(n+2\lambda-\frac{1}{2})}{\Pi 2\lambda\,\Pi(2n+2\lambda)} (2x)^{2\lambda} \\ \qquad + \sin x \sum_{\lambda=0}^{\infty} (-1)^\lambda \frac{\Pi(n+2\lambda+\frac{1}{2})}{\Pi(2\lambda+1)\Pi(2n+2\lambda+1)} (2x)^{2\lambda+1}\Big\}, \end{cases}$$

und durch Subtraction die *Kummer*sche Gleichung:

$$e^x = \frac{\Sigma \frac{\Pi(n+\lambda-\frac{1}{2})}{\Pi\lambda\,\Pi(2n+\lambda)} x^\lambda}{\Sigma(-1)^\lambda \frac{\Pi(n+\lambda-\frac{1}{2})}{\Pi\lambda\,\Pi(2n+\lambda)} x^\lambda}.$$

Von Wichtigkeit sind die in Gestalt bestimmter Integrale auftretenden Lösungen der Gleichung (11.). Setzt man

$$(14.)\quad \begin{cases} (v-k)\frac{d\varphi}{dv} + \beta\varphi = 0, \\ v(v-1)\frac{d\psi}{dv} - |(\gamma-2)v-(\beta-1)|\psi = 0, \end{cases}$$

so genügt

$$(15.)\quad y(x) = \int_g^h \psi(v)\varphi(vx)\,dv$$

der Differentialgleichung (2.), wie ich an anderem Orte gezeigt habe**), wenn g und h zwei beliebige der Werthe 0, 1, ∞, $\frac{k}{x}$ bedeuten und das Integral selbst endlich ist. Aus (14.) und (15.) folgt:

$$y(x) = \int_g^h v^{\alpha-1}(v-1)^{\gamma-\alpha-1}(k-vx)^{-\beta}\,dv$$

---

*) Siehe beispielsweise *Lommel*, Studien über die *Bessel*schen Functionen § 7.

**) Dieses Journal Bd. 103, S. 89—97.

oder für $vx = ku$

$$(16.) \qquad y(x) = x^{-\alpha}\int_{g_1}^{h_1} u^{\alpha-1}(1-u)^{-\beta}\left(1-\frac{uk}{x}\right)^{\gamma-\alpha-1} du,$$

wo g_1 und h_1 zwei beliebige der Werthe 0, $\frac{x}{k}$, ∞, 1 bedeuten. Lässt man nun (2.) in (3.) übergehen, d. h. setzt man in (2.) $k = \frac{\delta}{\gamma}$ und lässt γ unendlich werden, so geht (16.) über in:

$$y_1(x) = x^{-\alpha}\int_{g_2}^{h_2} u^{\alpha-1}(1-u)^{-\beta} e^{-\frac{u\delta}{x}} du,$$

wo g_2 und h_2 zwei beliebige der Werthe 0, 1, ∞ bedeuten; als Lösung von (9.) findet man hieraus:

$$(17.) \qquad z(\xi) = \xi^{\alpha-\frac{1}{2}} e^{\frac{\delta\xi}{2}} \int_{g_2}^{h_2} u^{\alpha-1}(1-u)^{-\beta} e^{-u\delta\xi} du$$

und auch:

$$(17^a.) \qquad \bar{z}(\xi) = \xi^{\beta-\frac{1}{2}} e^{\frac{\delta\xi}{2}} \int_{g_2}^{h_2} u^{\beta-1}(1-u)^{-\alpha} e^{-u\delta\xi} du,$$

vorausgesetzt, dass die Integrale endlich sind.

Die weiteren Betrachtungen werden an (17.) anknüpfen, und es soll der bequemeren Schreibweise wegen wieder ξ mit x vertauscht werden. Es sei noch erwähnt, dass man ebenso wie (15.) aus (14.) auch (17.) direct ohne Grenzübergang aus den Gleichungen:

$$v^2 \frac{d\varphi}{dv} + (\beta v - \delta)\varphi = 0,$$

$$v(v-1)\frac{d\psi}{dv} + (v+\alpha-1)\psi = 0$$

hätte ableiten können.

Damit das Integral (17.) endlich ist, muss $\alpha > 0$ sein für die Grenze 0, $\beta < 1$ für die Grenze 1 und der reelle Theil von $u\delta x > 0$ für die Grenze ∞.

Für den Fall *Bessel*scher Functionen erhält man für eine Lösung von (11.) die bekannte Form:

$$J^n(x) = A_n x^n \int_0^1 (u-u^2)^{n-\frac{1}{2}} e^{ix(1-2u)} du$$

$$= \frac{1}{2^{2n}} A_n x^n \int_{-1}^{+1} (1-v^2)^{n-\frac{1}{2}} e^{ixv} dv; \qquad (n > -\tfrac{1}{2})$$

und für $\delta = -2i$:

$$J^n(x) = \frac{1}{2^{2n}} A_n x^n \int_{-1}^{+1} (1-v^2)^{n-\frac{1}{2}} e^{-ixv} dv,$$

also:

$$(18.)\qquad J^n(x) = \frac{1}{2^{2n}} A_n x^n \int_{-1}^{+1} (1-v^2)^{n-\frac{1}{2}} \cos vx\, dv,$$

$$(18^a.)\qquad J^n(x) = \frac{1}{2^{2n}} A_n x^n \int_0^{\pi} \cos(x\cos w)\sin^{2n} w\, dw.$$

A_n erhält nach dem Obigen den Werth $\frac{2^n}{\sqrt{\pi}\,\Pi(n-\frac{1}{2})}$. Aus (18.) ergiebt sich durch Reihenentwickelung des Cosinus und Vertauschung von v^2 mit v sofort die bekannte Entwickelung:

$$(19.)\qquad J^n(x) = \frac{x^n}{2^n \Pi n} \sum_0^{\infty} (-1)^{\lambda} \frac{x^{2\lambda}}{2.4\ldots 2\lambda(2n+2)(2n+4)\ldots(2n+2\lambda)}.$$

3.

Bezeichnet man irgend eine Lösung von (11.) mit z_ν^n, so ergiebt sich ferner aus (17.), je nachdem δ seinen negativen oder positiven Werth hat:

$$(20.)\quad \begin{cases} z_1^n = x^n e^{-ix} \int_0^{+i\infty} (u-u^2)^{n-\frac{1}{2}} e^{+2iux} du = x^n e^{-i\left(x-\frac{2n+1}{4}\pi\right)} \int_0^{\infty} (v-iv^2)^{n-\frac{1}{2}} e^{-2vx} dv, \\ z_2^n = x^n e^{-ix} \int_0^{-i\infty} (u-u^2)^{n-\frac{1}{2}} e^{-2iux} du = x^n e^{+i\left(x-\frac{2n+1}{4}\pi\right)} \int_0^{\infty} (v+iv)^{n-\frac{1}{2}} e^{-2vx} dv; \end{cases}$$

diese Formeln gelten nur für solche Werthe von x, deren reeller Theil positiv ist. Durch Addition und Subtraction folgt aus (20.):

$$z_3^n = x^n \cos\left(x-\frac{2n+1}{4}\pi\right) \int_0^{\infty} e^{-2vx} \{(v-iv^2)^{n-\frac{1}{2}} + (v+iv^2)^{n-\frac{1}{2}}\} dv$$
$$-ix^n \sin\left(x-\frac{2n+1}{4}\pi\right) \int_0^{\infty} e^{-2vx} \{v-iv^2)^{n-\frac{1}{2}} - (v+iv^2)^{n-\frac{1}{2}}\} dv,$$

$$z_4^n = x^n \cos\left(x-\frac{2n+1}{4}\pi\right) \int_0^{\infty} e^{-2vx} \{(v-iv^2)^{n-\frac{1}{2}} - (v+iv^2)^{n-\frac{1}{2}}\} dv$$
$$-ix^n \sin\left(x-\frac{2n+1}{4}\pi\right) \int_0^{\infty} e^{-2vx} \{(v-iv^2)^{n-\frac{1}{2}} + (v+iv^2)^{n-\frac{1}{2}}\} dv.$$

Aus diesen Formeln, die vielfach in Abhandlungen über *Bessel*sche Functionen (z. B. *Lipschitz*, dieses Journal Bd. 56; *Hankel*, Math. Ann. Bd. 1; *H. Weber*, Math. Ann. Bd. 37) auftreten, aber anders abgeleitet wurden, er-

geben sich durch eine einfache Substitution neue Integrale, die meines Wissens noch nirgends erwähnt worden sind, aus denen sich aber mit Leichtigkeit bemerkenswerthe Folgerungen ziehen lassen.

Setzt man $v = \operatorname{tg} w$, so wird:

$$z_3^n = 2x^n \left\{ \cos\left(x - \frac{2n+1}{4}\pi\right) \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-2x\operatorname{tg}w} \cdot \frac{\sin^{n-\frac{1}{2}} w \cos(n-\frac{1}{2})w}{\cos^{2n+1} w} dw \right.$$
$$\left. - \sin\left(x - \frac{2n+1}{4}\pi\right) \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-2x\operatorname{tg}w} \cdot \frac{\sin^{n-\frac{1}{2}} w \sin(n-\frac{1}{2})w}{\cos^{2n+1} w} dw \right\}$$

oder:

$$z_3^n = 2x^n \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{n-\frac{1}{2}} w \cos\left(x - \frac{2n+1}{4}\pi + \frac{2n-1}{2} w\right)}{\cos^{2n+1} w} e^{-2x\operatorname{tg}w} dw,$$

und führt man $\frac{\pi}{2} - w$ als Integrationsvariable ein:

$$(21.) \qquad z_3^n = 2x^n \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^{n-\frac{1}{2}} w \sin\left(x - \frac{2n-1}{2} w\right)}{\sin^{2n+1} w} e^{-2x\operatorname{cotg}w} dw,$$

und analog:

$$(21^a.) \qquad z_4^n = 2ix^n \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^{n-\frac{1}{2}} w \cos\left(x - \frac{2n-1}{2} w\right)}{\sin^{2n+1} w} e^{-2x\operatorname{cotg}w} dw.$$

Es wird zu untersuchen sein, in welcher Beziehung diese Functionen zu den *Bessel*schen Functionen stehen. Aus (20.) folgt:

$$z_1^n = x^n \int_0^{\infty} e^{-\left(2vx + ix - \frac{2n+1}{4}\pi\right)} (v - iv^2)^{n-\frac{1}{2}} dv.$$

Bezeichnet man das hier auftretende Integral mit φ_n, so ist:

$$\varphi_n = -\frac{1}{2x} \left[e^{-\left(2vx + ix - \frac{2n+1}{4}\pi\right)} (v - iv^2)^{n-\frac{1}{2}} \right]_0^{\infty}$$
$$+ \frac{2n-1}{4x} \int_0^{\infty} e^{-\left(2vx + ix - \frac{2n+1}{4}\pi\right)} (v - iv^2)^{n-\frac{3}{2}} (1 - 2iv) dv.$$

Ist $n > \frac{1}{2}$, so verschwindet die eckige Klammer und bei Berücksichtigung von $i = e^{\frac{i\pi}{2}}$ folgt:

$$\varphi_n = \frac{2n-1}{4x} \int_0^{\infty} e^{-\left(2vx + ix - \frac{2n-1}{4}\pi\right)} (v - iv^2)^{n-\frac{3}{2}} (i + 2v) dv = -\frac{2n-1}{4x} \varphi'_{n-1},$$

oder:

$$z_1^n = \frac{2n-1}{4}\left\{\frac{n-1}{x} z_1^{n-1} - \frac{dz_1^{n-1}}{dx}\right\}. \qquad (22.) \qquad (n > \tfrac{1}{2})$$

Die nämliche Gleichung ergiebt sich für z_2^n. Setzt man nun:

$$B_\nu^n = \frac{2^n}{\Pi(n-\frac{1}{2})} z_\nu^n \qquad (23.)$$

und setzt in (22.) $n+1$ an Stelle von n, so folgt (zunächst für $\nu = 1, 2$):

$$B_\nu^{n+1} = \frac{n}{x} B_\nu^n - \frac{dB_\nu^n}{dx}, \qquad (24.) \qquad (n > -\tfrac{1}{2})$$

speciell:

$$B_\nu^1 = -\frac{dB_\nu^0}{dx}. \qquad (24^a.)$$

Durch Differentiation von (24.) folgt:

$$\frac{dB_\nu^{n+1}}{dx} = -\frac{n}{x^2} B_\nu^n + \frac{n}{x}\frac{dB_\nu^n}{dx} - \frac{d^2B_\nu^n}{dx^2}. \qquad (25.)$$

Aus (24.) und (25.) folgt mit Rücksicht auf (11.):

$$\frac{n+1}{x} B_\nu^{n+1} + \frac{dB_\nu^{n+1}}{dx} = B_\nu^n,$$

oder:

$$B_\nu^{n-1} = \frac{n}{x} B_\nu^n + \frac{dB_\nu^n}{dx}. \qquad (26.) \qquad (n > \tfrac{1}{2})$$

Aus (24.) und (26.) folgen schliesslich die bekannten Gleichungen:

$$(27.) \qquad \begin{cases} \dfrac{2n}{x} B_\nu^n = B_\nu^{n-1} + B_\nu^{n+1}, \\ 2\dfrac{dB_\nu^n}{dx} = B_\nu^{n-1} - B_\nu^{n+1}. \end{cases}$$

Die Functionen z_3^n und z_4^n, welche nur durch Addition und Subtraction aus z_1^n und z_2^n entstehen, genügen natürlich auch der Gleichung (22.). Bildet man nach (23.) B_3^n und B_4^n, so genügen diese Functionen und alle, welche durch Multiplication mit einer absoluten (d. h. auch von n unabhängigen) Constanten aus denselben entstehen, den Grundgleichungen (27.) der *Bessel*schen Functionen. Multiplicirt man dagegen B_ν^n mit einer von n abhängigen Constanten, so genügt zwar die neue Function der Differentialgleichung (11.), aber nicht mehr den Gleichungen (27.). Hiernach bedürfen einige Resultate des Herrn *Lommel**) und des Herrn *Elsas***) einer Be-

*) *Lommel*, Studien über die *Bessel*schen Functionen. Leipzig 1868, p. 85 ff.

**) Sitzungsberichte der Naturw. Ges. Marburg 1889 p. 40 ff.

richtigung. Die von Herrn *Lommel* mit Y^m bezeichnete Function genügt nicht den Gleichungen (27.). Die richtige Function $\bar{Y}^m$ erhält man aus Y^m durch die Gleichung

$$\bar{Y}^m = Y^m - \psi(m-\tfrac{1}{2})J^m,$$

wo ψ die bekannte *Gauss*sche Transcendente bedeutet.

Aus B_ν^0 sind vermöge (24^a.) und (27.) sämmtliche Functionen B_ν^n eindeutig bestimmt. Es sollen daher zunächst nur B_3^0 und B_4^0 (kurz B_3 und B_4) genauer betrachtet werden. Aus (21.) und (23.) folgt:

$$B_3 = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\left(x+\frac{w}{2}\right)}{\sin w \sqrt{\cos w}} e^{-2x\operatorname{cotg} w} dw,$$

$$B_4 = \frac{2i}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos\left(x+\frac{w}{2}\right)}{\sin w \sqrt{\cos w}} e^{-2x\operatorname{cotg} w} dw$$

oder:

$$B_3 = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left\{ \cos x \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\frac{w}{2}}{\sin w \sqrt{\cos w}} e^{-2x\operatorname{cotg} w} dw + \sin x \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos\frac{w}{2}}{\sin w \sqrt{\cos w}} e^{-2x\operatorname{cotg} w} dw \right\},$$

$$B_4 = \frac{2i}{\sqrt{\pi}} \left\{ \cos x \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos\frac{w}{2}}{\sin w \sqrt{\cos w}} e^{-2x\operatorname{cotg} w} dw - \sin x \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\frac{w}{2}}{\sin w \sqrt{\cos w}} e^{-2x\operatorname{cotg} w} dw \right\}.$$

Setzt man nun $\operatorname{tg}\frac{w}{2} = u$, so folgt:

$$B_3(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left\{ \cos x \int_0^1 \frac{e^{\frac{u^2-1}{u}x}}{\sqrt{1-u^2}} du + \sin x \int_0^1 \frac{e^{\frac{u^2-1}{u}x}}{u\sqrt{1-u^2}} du \right\},$$

$$B_4(x) = \frac{2i}{\sqrt{\pi}} \left\{ \cos x \int_0^1 \frac{e^{\frac{u^2-1}{u}x}}{u\sqrt{1-u^2}} du - \sin x \int_0^1 \frac{e^{\frac{u^2-1}{u}x}}{\sqrt{1-u^2}} du \right\}.$$

Für $x = 0$ ergiebt sich hieraus $B_3(0) = \sqrt{\pi}$; $B_3(x)$ ist also die am Nullpunkte reguläre Lösung, folglich:

$$B_3^0(x) = \sqrt{\pi} J^0(x),$$

also nach dem Obigen

$$B_3^n(x) = \sqrt{\pi} J^n(x).$$

$B_4(x)$ wird für $x = 0$ logarithmisch unendlich; setzt man dem Obigen entsprechend:

$$B_4^0(x) = i\sqrt{\pi}\, Y^0(x) \quad \text{und} \quad B_4^n(x) = i\sqrt{\pi}\, Y^n(x),$$

so hat man für die *Bessel*schen Functionen erster und zweiter Art die neuen Definitionsgleichungen:

$$(28.)\quad \begin{cases} J^n(x) = \dfrac{2^{n+1}.x^n}{\sqrt{\pi}\,\Pi(n-\frac{1}{2})} \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{\cos^{n-\frac{1}{2}} w \sin\left(x - \frac{2n-1}{2} w\right)}{\sin^{2n+1} w} e^{-2x\operatorname{cotg} w} dw, \\[2ex] Y^n(x) = \dfrac{2^{n+1}.x^n}{\sqrt{\pi}\,\Pi(n-\frac{1}{2})} \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{\cos^{n-\frac{1}{2}} w \cos\left(x - \frac{2n-1}{2} w\right)}{\sin^{2n+1} w} e^{-2x\operatorname{cotg} w} dw, \end{cases}$$

und speciell:

$$(28^a.)\quad \begin{cases} J^0(x) = \dfrac{2}{\pi} \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{\sin\left(x + \frac{w}{2}\right)}{\sin w \sqrt{\cos w}} e^{-2x\operatorname{cotg} w} dw, \\[2ex] Y^0(x) = \dfrac{2}{\pi} \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{\cos\left(x + \frac{w}{2}\right)}{\sin w \sqrt{\cos w}} e^{-2x\operatorname{cotg} w} dw. \end{cases}$$

Während unter der Function J bei allen Autoren dieselbe Function verstanden wird, gehen die Bezeichnungen bei der Function zweiter Art auseinander. Es muss untersucht werden, in welcher Beziehung die hier eingeführte Function Y zu anderen gleichbezeichneten Functionen steht, und es soll deshalb das Verhalten der Function $Y^0(x)$ in der Nähe des Nullpunktes ermittelt werden.

Für verschwindend kleine Werthe von x ist nach Obigem zu setzen:

$$\frac{\pi}{2} Y^0(x) = \int_0^1 \frac{e^{\frac{u^2-1}{u}x}}{u\sqrt{1-u^2}} du = \int_0^1 \frac{e^{-\frac{x}{u}}}{u\sqrt{1-u^2}} du + \int_0^1 \frac{e^{-\frac{x}{u}}(e^{ux}-1)}{u\sqrt{1-u^2}} du.$$

Das letzte Integral verschwindet mit x, so dass man erhält:

$$\frac{\pi}{2} Y^0(x) = \int_0^1 \frac{e^{-\frac{x}{u}}}{u\sqrt{1-u^2}} du = \int_0^1 e^{-\frac{x}{u}} \left\{ \frac{\sqrt{1-u^2}}{u} + \frac{u}{\sqrt{1-u^2}} \right\} du$$

$$= \int_0^1 e^{-\frac{x}{u}} \frac{du}{u} + \int_0^1 e^{-\frac{x}{u}} \left\{ \frac{u}{\sqrt{1-u^2}} - \frac{1-\sqrt{1-u^2}}{u} \right\} du,$$

und wenn man $\sqrt{1-u^2}$ im zweiten Integral als Integrationsvariable einführt:

$$\frac{\pi}{2} Y^0(x) = \int_0^1 e^{-\frac{x}{u}} \frac{du}{u} + \log 2 \quad \text{für} \quad x = 0.$$

Hieraus folgt:

$$\frac{\pi}{2}Y^0(x)-\log 2 = e^{-x}\int_0^1 e^{x\left(1-\frac{1}{u}\right)}\frac{du}{u} = e^{-x}\int_0^\infty \frac{e^{-xv}dv}{1+v}.$$

Berücksichtigt man die bekannte *Dirichlet*sche Gleichung*):

$$\log x = \int_0^\infty (e^{-v}-e^{-vx})\frac{dv}{v},$$

so folgt:

$$e^x\left\{\frac{\pi}{2}Y^0(x)-\log 2\right\}+\log x = \int_0^\infty \left\{\frac{e^{-v}}{v}-\frac{e^{-xv}}{v(1+v)}\right\}dv = \psi(0) \quad \text{für} \quad x=0.$$

Also:

$$Y^0(x) = \frac{2}{\pi}\{\psi(0)+\log 2-\log x\} \quad \text{für} \quad x=0.$$

Vergleicht man hiermit die von Herrn *C. Neumann* **) mit $Y^0(x)$, hier zum Unterschiede mit $\overline{Y}^0(x)$ bezeichnete Lösung, nämlich:

$$\overline{Y}^0(x) = J^0(x)\log x-2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{J^{2n}(x)}{n},$$

so folgt:

$$\overline{Y}^0(x) = -\frac{\pi}{2}Y^0(x)+\{\psi(0)+\log 2\}J^0(x)$$

und:

$$\overline{Y}^n(x) = -\frac{\pi}{2}Y^n(x)+\{\psi(0)+\log 2\}J^n(x).$$

Nach der Bezeichnung von Herrn *Lommel****) (hier $\overline{\overline{Y}}$) würde sein:

$$\overline{\overline{Y}}^0(x) = -\frac{\pi}{2}Y^0(x)+\{\psi(0)-\log 2\}J^0(x)$$

und:

$$\overline{\overline{Y}}^n(x) = -\frac{\pi}{2}Y^n(x)+\{\psi(n-\tfrac{1}{2})+\log 2\}J^n(x).$$

Herr *Meissel*†) setzt $Y^0(x) = \vartheta(x)$.

4.

In diesem Abschnitt werden nur die beiden Functionen $J^0(x)$ und $Y^0(x)$ näher untersucht werden für positive reelle x. Aus (28ᵃ.) erkennt

*) Dieses Journal Bd. 15.

**) *C. Neumann,* Theorie der *Bessel*schen Functionen, Leipzig 1867 S. 44 u. flgde.

***) *Lommel,* a. a. O. S. 86 u. flgde.

†) *Meissel,* Progr. Gewerbeschule Iserlohn, 1862 u. Progr. Ober-Realschule Kiel 1890.

man, dass $J^0(x)$ für $x \leqq \frac{3}{4}\pi$ stets positiv ist; und ist ferner $x = k\pi + x'$, wo k eine positive ganze Zahl mit Einschluss der Null und $0 \leqq x' < \pi$ ist, so folgt ohne weiteres, dass $J^0(x)$ positiv oder negativ ist, je nachdem k gerade oder ungerade ist, wenn $x' \leqq \frac{3}{4}\pi$ ist; die Nullwerthe von $J^0(x)$, welche bekanntlich alle reell sind*), liegen mithin zwischen $(k+\frac{3}{4})\pi$ und $(k+1)\pi$. Dieser Bereich kann aber noch verengert werden. Setzt man nämlich in (28ᵃ.)

$$x = (k+\tfrac{3}{4})\pi + \varepsilon,$$

wo ε eine positive Grösse kleiner als $\frac{\pi}{4}$ bedeutet, so folgt:

$$(-1)^k \frac{\pi}{2} J^0(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}-2\varepsilon} \frac{\sin\left(\frac{3}{4}\pi+\varepsilon+\frac{w}{2}\right)}{\sin w \sqrt{\cos w}} e^{-2x\operatorname{cotg} w} dw$$

$$+ \int_{\frac{\pi}{2}-2\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\left(\frac{3}{4}\pi+\varepsilon+\frac{w}{2}\right)}{\sin w \sqrt{\cos w}} e^{-2x\operatorname{cotg} w} dw = \int_0^{\frac{\pi}{2}-2\varepsilon} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}-\varepsilon-\frac{w}{2}\right)}{\sin w \sqrt{\cos w}} e^{-2x\operatorname{cotg} w} dw$$

$$- \int_0^{2\varepsilon} \frac{\sin\left(\varepsilon-\frac{w}{2}\right)}{\cos w \sqrt{\sin w}} e^{-2x\operatorname{tg} w} dw.$$

Beide Integrale sind positiv; bezeichnet man das erste zur Abkürzung mit φ, das zweite mit ψ, so ist:

$$\varphi < \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}-\varepsilon\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}-2\varepsilon\right)}{\sqrt{\cos\left(\frac{\pi}{2}-2\varepsilon\right)}} \int_0^{\frac{\pi}{2}-2\varepsilon} \frac{e^{-2x\operatorname{cotg} w}}{\sin^2 w} dw < \frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\varepsilon\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-\varepsilon\right)}{x\sqrt{\sin 2\varepsilon}} e^{-2x\operatorname{tg} 2\varepsilon},$$

$$(29.) \qquad \varphi < \frac{4\sin^2\left(\frac{\pi}{8}-\frac{\varepsilon}{2}\right)\cos^2\left(\frac{\pi}{8}-\frac{\varepsilon}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-\varepsilon\right)}{x\sqrt{\sin 2\varepsilon}} e^{-2x\operatorname{tg} 2\varepsilon},$$

$$\psi > \frac{e^{-2x\operatorname{tg} 2\varepsilon}}{\sqrt{\sin 2\varepsilon}} \int_0^{2\varepsilon} \sin\left(\varepsilon-\frac{w}{2}\right) dw > \frac{2(1-\cos\varepsilon)}{\sqrt{\sin 2\varepsilon}} e^{-2x\operatorname{tg} 2\varepsilon},$$

$$(30.) \qquad \psi > \frac{4\sin^2\frac{\varepsilon}{2}}{\sqrt{\sin 2\varepsilon}} e^{-2x\operatorname{tg} 2\varepsilon}.$$

Liegt zwischen $(k+\frac{3}{4})\pi$ und x ein Nullwerth von $J^0(x)$, so muss nach

*) Siehe *Hurwitz*, die Nullstellen der *Bessel*schen Functionen, Math. Ann. Bd. 33.

Obigem $\varphi-\psi$ negativ sein; dies ist sicher der Fall, wenn nach (29.) und (30.):

$$(31.)\qquad \sin^2\frac{\varepsilon}{2} > \frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{8}-\frac{\varepsilon}{2}\right)\cos^2\left(\frac{\pi}{8}-\frac{\varepsilon}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-\varepsilon\right)}{x},$$

und um so mehr, wenn:

$$(31^a.)\qquad \begin{cases} \sqrt{x} > \dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{8}-\frac{\varepsilon}{2}\right)}{\sin\frac{\varepsilon}{2}}, \\ \sqrt{x} > \sin\frac{\pi}{8}\cdot\operatorname{cotg}\frac{\varepsilon}{2}-\cos\frac{\pi}{8}. \end{cases}$$

Hieraus folgt für $\varepsilon=\frac{\pi}{8}$:

$$\sqrt{x} > 1,$$

und diese Ungleichheit ist schon für den ersten möglichen Nullwerth ($x>\frac{3}{4}\pi$) erfüllt. *Sämmtliche Nullstellen von $J^0(x)$ liegen mithin zwischen $(k+\frac{6}{8})\pi$ und $(k+\frac{7}{8})\pi$.* Ganz ebenso ergiebt sich: *Die Nullstellen von $Y^0(x)$ liegen zwischen $(k+\frac{2}{8})\pi$ und $(k+\frac{3}{8})\pi$.*

Ferner erkennt man aus (31^a.), dass die Nullstellen von $J^0(x)$ sich mehr und mehr dem Werthe $(k+\frac{3}{4})\pi$ nähern, während die Nullstellen von $Y^0(x)$ gegen $(k+\frac{1}{4})\pi$ convergiren. Diese Annäherung an die Grenzwerthe findet so statt, dass die Differenz je zweier auf einander folgenden Wurzeln der Gleichung $J^0(x)=0$, resp. $Y^0(x)=0$ kleiner als π ist. Um dies zu zeigen, sei $\xi=(k+\frac{3}{4})\pi+\varepsilon$ eine Wurzel von $J^0(x)$, so ist für $k\pi<x<\xi$ der Werth von $(-1)^k J^0(x)$ positiv. Ist die Behauptung richtig, so muss auch $(-1)^k J^0(\xi+\pi)$ positiv sein. Es ist nach Obigem:

$$(32.)\qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}-2\varepsilon}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}-\varepsilon-\frac{w}{2}\right)}{\sin w\sqrt{\cos w}}e^{-2\xi\operatorname{cotg} w}dw = \int_0^{2\varepsilon}\frac{\sin\left(\varepsilon-\frac{w}{2}\right)}{\cos w\sqrt{\sin w}}e^{-2\xi\operatorname{tg} w}dw$$

und:

$$(-1)^k\frac{\pi}{2}J^0(\xi+\pi) = \int_0^{2\varepsilon}\frac{\sin\left(\varepsilon-\frac{w}{2}\right)}{\cos w\sqrt{\sin w}}e^{-2(\xi+\pi)\operatorname{tg} w}dw - \int_0^{\frac{\pi}{2}-2\varepsilon}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}-\varepsilon-\frac{w}{2}\right)}{\sin w\sqrt{\cos w}}e^{-2(\xi+\pi)\operatorname{cotg} w}dw.$$

Nun ist sofort ersichtlich, dass das erste Integral der letzten Gleichung grösser ist als

$$e^{-2\pi \operatorname{tg} 2\varepsilon} \int_0^{2\varepsilon} \frac{\sin\left(\varepsilon - \frac{w}{2}\right)}{\cos w \sqrt{\sin w}} e^{-2\xi \operatorname{tg} w} dw,$$

und das zweite kleiner als:

$$e^{-2\pi \operatorname{tg} 2\varepsilon} \int_0^{\frac{\pi}{2}-2\varepsilon} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4} - \varepsilon - \frac{w}{2}\right)}{\sin w \sqrt{\cos w}} e^{-2\xi \operatorname{cotg} w} dw,$$

und diese beiden Ausdrücke sind nach (32.) einander gleich, somit ist $(-1)^k J^0(\xi+\pi)$ positiv; ganz entsprechend wird der Beweis für $Y^0(x)$ geführt.

Die Resultate dieses letzten Abschnittes sind meines Wissens neu. Man wusste bisher über die Lage der Nullpunkte nur, was schon *Bessel* gezeigt hatte, dass $J^0(x)$ von $x = k\pi$ bis $(k+\frac{1}{2})\pi$ immer positiv ist, wenn k gerade, und negativ, wenn k ungerade ist. Der Bereich für die Möglichkeit eines Zeichenwechsels war demnach ebenso gross wie der für constantes Zeichen. Durch Obiges ist der eines Zeichenwechsels erheblich verengert worden, und zwar um so mehr, je grösser das Argument ist, wie aus (31^a.) folgt.

Dass die Differenz zweier auf einander folgenden Wurzeln gegen π convergirt, war für grosse Werthe des Arguments, ebenso wie der Wurzelgrenzwerth $(k+\frac{3}{4})\pi$ mit Hülfe semiconvergenter Reihen gefunden worden. Dass die Wurzeldifferenz *stets* kleiner als π ist, habe ich noch nicht bewiesen gefunden; es stimmt dieses Resultat mit den von Herrn *Meissel**) berechneten numerischen Werthen der Wurzeln überein.

Charlottenburg, 16. Februar 1894.

---

*) *Meissel,* Abhandl. der Berl. Akademie 1888.

ebenen und räumlichen Curven eine Reihe grösserer Arbeiten veröffentlicht und dadurch unsere Kenntniss derselben vielfach erweitert. Diese geometrischen Abhandlungen sind sehr reichhaltig, aber nicht leicht, grösstentheils sogar recht schwer zu lesen; denn er stellt darin grosse Anforderungen an sich und seine Leser. Acht von diesen Abhandlungen sind synthetisch*), nämlich sechs liniengeometrische und zwei, welche Untersuchungen über höhere Raumcurven und Flächen enthalten. An die letzteren beiden schliessen seine analytisch-geometrischen Arbeiten**) über rationale Curven sich an. Ein grösseres Werk über rationale ebene und räumliche Curven fand sich, leider unvollendet, unter seinen Manuscripten vor.

Eine eingehendere Würdigung seiner wissenschaftlichen Leistungen muss einem anderen Orte vorbehalten bleiben.

Th. Reye.

---

*) Dieses Journal Bd. 91, 92, 93, 94, 95, 97, 99, 101.

**) Dieses Journal Bd. 101, 104 Heft 1 und 4 und Math. Ann. Bd. 38, 40. Dazu kommen eine algebraische Arbeit, Math. Ann. Bd. 35, und noch eine analytisch-geometrische in diesem Journale Bd. 107.

Ueber die von Herrn *Fuchs* gegebene Ausdehnung der *Legendre*schen Relation auf hyperelliptische Integrale.

(Von Herrn *K. Th. Vahlen.*)

Die im Folgenden abgeleite Formel findet sich schon in einer Arbeit von Herrn *Fuchs* im 71. Bande dieses Journals*), sie soll hier jedoch auf einem von dem dort eingeschlagenen verschiedenen Wege abgeleitet werden. Letzterer ist eine Verallgemeinerung eines von Herrn *Jamet* zur Herleitung der *Legendre*schen Relation angewendeten Verfahrens**).

In der n-fachen Mannigfaltigkeit der n reellen Variablen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sei:

$$\frac{x_1^2}{a_1}+\frac{x_2^2}{a_2}+\cdots+\frac{x_n^2}{a_n} = 1 \qquad (0 < a_1 < a_2 \cdots < a_n)$$

die Gleichung einer elliptischen $(n-1)$-fachen Mannigfaltigkeit. Ihr Inhalt ist bekanntlich $\frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\left(\frac{n}{2}\right)!}\sqrt{a_1 a_2 \ldots a_n}$. Wir wollen denselben in anderer Weise, nämlich nach Einführung elliptischer Coordinaten berechnen. Wir setzen also:

$$x_i^2 = a_i \frac{(\mu_1-a_i)(\mu_2-a_i)\ldots(\mu_{n-1}-a_i)}{(a_1-a_i)(a_2-a_i)\ldots(a_{i-1}-a_i)(a_{i+1}-a_i)\ldots(a_n-a_i)}, \qquad (i=1, 2, \ldots, n)$$

wo die reellen Variablen μ_i die Intervalle $a_i, \ldots, a_{i+1}$ durchlaufen. Das Grenzmannigfaltigkeitselement dw wird:

$$dw = \sqrt{\sum_i (dx_1 \ldots dx_{i-1} dx_{i+1} \ldots dx_n)^2} = \sqrt{\sum_i \left(\frac{dx_n}{dx_i}\right)^2} . dx_1 \ldots dx_{n-1},$$

oder, da $\frac{dx_n}{dx_1} = -\frac{a_n}{a_1} \cdot \frac{x_1}{x_n}$ ist, $dw = \frac{\sqrt{\sum_i \frac{x_i^2}{a_i^2}}}{\frac{x_n}{a_n}} dx_1 \ldots dx_{n-1}$. Die Gleichung der

---

*) *Fuchs,* die Periodicitätsmoduln der hyperelliptischen Integrale als Functionen eines Parameters aufgefasst; dieses Journal Bd. 71, S. 91—136.

**) *Jamet,* sur les périodes des intégrales elliptiques; Nouv. ann. de math. 1891.

unsere Mannigfaltigkeit im Punkte $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ berührenden $(n-1)$-fachen ebenen Mannigfaltigkeit ist: $\sum_i \frac{x_i \xi_i}{a_i} = 1$, also sind ihre Richtungscosinus:

$$\frac{x_i}{a_i} : \sqrt{\sum_i \frac{x_i^2}{a_i^2}}.$$

Hat das vom Anfangspunkte auf sie gefällte Loth die Länge p und den Fusspunkt $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$, so werden die Richtungscosinus auch ausgedrückt durch $\frac{\xi_i}{p}$. Setzt man

$$\xi_i = \frac{p \cdot \frac{x_i}{a_i}}{\sqrt{\sum_i \frac{x_i^2}{a_i^2}}} \quad \text{in} \quad \sum_i \frac{x_i \xi_i}{a_i} = 1$$

ein, so erhält man $\frac{1}{p} = \sqrt{\sum_i \frac{x_i^2}{a_i^2}}$. Demnach wird der n-fache Inhalt des Kegels, der seine Spitze im Coordinatenanfang (ein beliebiger anderer Punkt würde nichts Allgemeineres ergeben) und zur Basis das Element dw hat:

$$p \,.\, dw = \frac{dx_1 \dots dx_{n-1}}{\frac{x_n}{a_n}}.$$

Jetzt sind an Stelle der Variablen $x_1, \dots, x_{n-1}$ die Variablen $\mu_1, \dots, \mu_{n-1}$ einzuführen.

Es wird: $\frac{\partial x_i}{\partial \mu_k} = \frac{x_i}{2} \cdot \frac{1}{\mu_k - a_i}$, also die Functionaldeterminante:

$$\left|\frac{\partial x_i}{\partial \mu_k}\right| = \frac{x_1 x_2 \dots x_{n-1}}{2^{n-1}} \left|\frac{1}{\mu_k - a_i}\right| = \frac{x_1 x_2 \dots x_{n-1}}{2^{n-1}} \cdot (-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} \cdot \frac{\Delta(\mu_1, \dots, \mu_{n-1}) \Delta(a_1, \dots, a_{n-1})}{f(\mu_1) \dots f(\mu_{n-1})},$$
$$(i, k = 1, 2, \dots, n-1)$$

wo mit Δ das Differenzenproduct:

$$\Delta(\mu_1, \dots, \mu_{n-1}) = \prod_{(i>k)} (\mu_i - \mu_k) = |\mu_i^k| \qquad \binom{i = 1, 2, \dots, n-1}{k = 0, 1, \dots, n-2}$$

und mit $f(\mu)$ das Product $(\mu - a_1)(\mu - a_2) \dots (\mu - a_{n-1})$ bezeichnet ist.

Also wird:

$$2^{n-1} p\, dw = \frac{x_1 x_2 \dots x_n}{\frac{x_n^2}{a_n}} \frac{(-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} \,.\, \Delta(\mu_1, \dots, \mu_{n-1}) \Delta(a_1, \dots, a_{n-1})}{\prod_i f(\mu_i)} d\mu_1 \dots d\mu_{n-1},$$

oder, nach Einführung der Ausdrücke für die Variablen x_i,

$$2^{n-1} p\, dw = \sqrt{a_1 a_2 \dots a_n} \cdot \frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{4} - (n-1)} \,.\, \Delta(\mu_1, \dots, \mu_{n-1})}{\prod_i \sqrt{(\mu_i - a_1)(\mu_i - a_2) \dots (\mu_i - a_n)}} d\mu_1 \dots d\mu_{n-1}.$$

Demnach wird das Volumen unserer elliptischen Mannigfaltigkeit:

$$\int \frac{2^n p dw}{n} = \frac{2}{n} \sqrt{a_1 a_2 \dots a_n} . (-1)^{\frac{n(n-1)}{4} - (n-1)} \left| \int_{a_i}^{a_{i+1}} \frac{\mu_i^{k-1} d\mu_i}{\sqrt{(\mu_i - a_1)\dots(\mu_i - a_n)}} \right| \quad (i, k = 1, 2, \dots, n-1);$$

setzen wir $\displaystyle\int_{a_{i+1}}^{a_i} \frac{\mu_i^{k-1} d\mu_i}{\sqrt{(\mu_i - a_1)(\mu_i - a_2)\dots(\mu_i - a_i)(a_{i+1} - \mu_i)\dots(a_n - \mu_i)}} = H_{ik}$, so wird das Volumen gleich $\frac{2}{n}\sqrt{a_1 a_2 \dots a_n} . |H_{ik}|$. $(i, k = 1, 2, \dots, n-1)$

Durch Vergleichung mit $\dfrac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\left(\frac{n}{2}\right)!}\sqrt{a_1 a_2 \dots a_n}$ ergiebt sich also die Relation:

$$|H_{ik}| = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}, \quad (i, k = 1, 2, \dots, n-1)$$

die für $n = 3$ in die *Legendre*sche übergeht.

Theorie der eindeutigen periodischen Transformationen in der Ebene.

(Auszug aus einer von der Akademie zu Neapel 1883|84 preisgekrönten Abhandlung: „Premiers fondements pour une théorie des transformations périodiques univoques.“)

(Von Herrn *S. Kantor* in Venedig.)

Die Definition von Transformationen $x_i' = f_i(x_1, \ldots, x_r)$, $i = 1, \ldots, r$, welche für alle Werthe der Variablen der Bedingung $T^n = E$ genügen, lässt sich bereits an die Theorieen der *Abel*schen und *Galois*schen Gleichungen knüpfen. Mit Beschränkung auf die für analytische Fragen allerdings meistens accidentielle Forderung, dass die Transformation unbedingt eindeutig-umkehrbar sein soll, habe ich ohne Vorgänger das Problem der Construction solcher Transformationen in der Ebene und im Raume im Jahre 1880 in Angriff genommen und es in der oben genannten Preisschrift mit aller Vollständigkeit erledigt, die man für die Fälle, in denen solche periodische Transformationen sich bieten oder herbeizuziehen sind, wünschen mag.

Da durch die Arbeiten der Herren *Lüroth* und *Schottky* der *Bertini*schen Resultate über involutorische Transformationen in Deutschland Erwähnung geschehen ist, so halte ich es für geboten, hier anzugeben, was meine Theorie auch für die involutorischen Transformationen Neues zu leisten beansprucht. Abgesehen davon, dass natürlich der Fall des Periodicitätsindexes 2 als speciellster Fall sich in jeder Hinsicht mit erledigen muss und auch mit erledigt, ist meine Reductionsmethode auch für die involutorischen Transformationen die erste, welche frei von der von Herrn *Nöther* hervorgehobenen Unsicherheit in Bezug auf die unendlich nahen Fundamentalpunkte ist. Umgekehrt aber muss ich betonen, dass es meiner Ansicht nach unmöglich ist, in irgend einer Weise die beiden von Herrn *Bertini* gebrauchten Beweise (Ann. d. Mat. VIII und Rend. Ist. Lomb. XIII)

auf die periodischen Transformationen von höherem Index anwendbar zu machen. Ferner ist die von mir in § 5 gegebene Vorschrift, wie man aus dem blossen Anblicke einer involutorischen Transformation erkennen und ablesen könne, zu welchem Typus sie gehöre, ohne jeden Vorgänger.

Ich muss endlich noch den Zusammenhang mit den linearen Substitutionen betonen, wie er sich durch meine Arbeiten herausgestellt hat. Derselbe ist merkwürdiger Weise gleichzeitig ein Enthalten und ein Enthaltensein. Meine Theorie enthält die Theorie der algebraisch existirenden Homographien, welche periodisch sind, ebenso aber auch die *Cauchy*-schen Substitutionen oder Versetzungen, insofern es birationale Transformationen oder Charakteristiken giebt, welche jenen oder diesen äquivalent sind. Sie ist ferner durch die merkwürdige arithmetische Theorie des § 5 zu den ganzzahligen linearen Substitutionen in eine Art Coordination gesetzt. Sie lässt sich aber, wie ich in einer zwar kurzen, aber principiell vollständigen Note der Comptes rendus vom 5. Januar 1885 gezeigt habe, durch eine Variablenvertauschung höheren Grades aus einer besonderen Klasse linearer Substitutionen — nämlich solcher, welche Mannigfaltigkeiten invariant lassen — vollständig herleiten.

Ich citire im Folgenden die Preisschrift mit Pr. F.

I. Theil. Arithmetische Theorie der Charakteristiken. Reduction auf die Typen.

§ 1.

Stellung des Problemes. Ansatz und Integration der Differenzengleichungen.

1. Die Wiederholung einer Transformation T

(1.) $$x'_i = f_i(x_1, \ldots, x_n)^{*)} \qquad (i=1,\ldots,n)$$

lässt sich durch Integration der Differenzengleichung

(2.) $$x_i^{(\mu+1)} = f_i(x_1^{(\mu)}, \ldots, x_n^{(\mu)}) \qquad (i=1,\ldots,n)$$

*) Für die linearen Substitutionen sind solche Ausdrücke berechnet worden und zwar für die orthogonalen von *Cayley, Voss, Frobenius,* für die *Hermite*schen von *Hermite, Rosanes, Frobenius,* für eine andere Klasse von *Jordan* und für die involutorischen sowie für die orthogonalen neuerdings von *F. Prym.*

Ausserdem wären die Ausdrücke für die quadratische Transformation, welche man seit *Magnus* und für die entsprechenden Raumtransformationen, welche man seit langer Zeit (*Salmon, Möbius,* u. A.) kennt, etwa noch zu beherrschen.

bestimmen, wenn man die Form der Function f_i einmal angesetzt hat. Damit T birational sei, ist nothwendig, dass zwei Gleichungen $\Sigma\lambda_i f_i(x) = 0$, $\Sigma\mu_i f_i(x) = 0$ eine Zahl von den Grössen λ, μ unabhängiger Werthesysteme gemeinsam haben. Die Resultante muss sich in Factoren zerlegen, von welchen nur einer thatsächlich von λ, μ abhängt. Da es jedoch nicht allgemein möglich ist (wenigstens bisher), diese Bedingung in den Coefficienten der algebraischen Functionen f explicite zum analytischen Ausdrucke zu bringen, so habe ich zunächst den mehr geometrischen Weg gewählt.

2. Schon in meinen ersten Arbeiten war ich von den zwei Principien ausgegangen, welche ich das der Verkettung der Fundamentalpunkte*) und das der successiven Transformationen nennen will. Hauptbedingung ist nämlich:

Die Fundamentalpunkte des zweiten Systemes müssen entweder mit den Fundamentalpunkten des ersten Systemes coincidiren oder durch successive Transformation nach dem zweiten System in Fundamentalpunkte des ersten Systemes sich zuletzt verwandeln. Ich nenne diese Anordnung die *Charakteristik der Transformation.*

Diese Bedingung ist nothwendig: 1. damit die Reduction in der Ordnung eintrete, weil sie die einzigen Punkte sind, welche eine Reduction in den successiven Ordnungen hervorbringen können, 2. weil sie gemeinsame Punkte des Curvennetzes sind und es in allen Transformirten bleiben und also beseitigt werden müssen, damit das transformirte Feld in sich zurückkehren könne.

Die hernach ausgeführte Anwendung des zweiten Principes, d. h. die Aufstellung des Tableaus der successiven Transformationen lehrt nun einen Schatz von Charakteristiken nebst den zugehörigen Tafeln successiver Transformationen kennen, unter welchen die periodischen Charakteristiken sicherlich enthalten sein müssen, auch wenn die Fundamentalsysteme particularisirt sind. Für diese bleibt zu entscheiden und ist jedesmal (in den nöthigen Fällen) entschieden worden, ob sie mit der Charakteristik und ihren Successionen verträglich sind. Es entsteht also das zweitheilige *„Problem der Charakteristiken“*:

Das gegenseitige Verhalten der Fundamentalsysteme mit Bezug auf

*) Der Berichterstatter Herr *Caporali* übersetzt im Berichte von 1884: „collegamento dei punti fondamentali“.

Coincidenz und Verkettung zu finden, so dass die Reduction in Grad und Singularitäten möglich sei, und für eine gegebene Anordnung zu entscheiden, ob die Reduction bis auf Homographie stattfindet.

3. Auf der Basis einer consequenten Einführung, welche ich im § 2 ausführlich exponire, formulire ich dieses Problem neuerdings als eine Integration eines Systemes von Differenzengleichungen. Es seien $p_1, \ldots, p_\sigma$ die Punkte der Charakteristik, $b_1, \ldots, b_\sigma$ die Vielfachheiten für das zweite und $a_1, \ldots, a_\sigma$ jene für das erste System, unter welchen einige Zahlen Null sein können. Wird dies, sowie dass p_{i_1} mit $p_{k_1}, \ldots, p_{i_\nu}$ mit p_{k_ν} verkettet sei, durch $p_{i_1} = p'_{i_1} = \cdots = p_{i_1}^{(\lambda)} = p_{k_1}, \ldots$ ausgedrückt, bezeichnet man überhaupt die Vielfachheiten einer Curve des zweiten Systemes nach μ Transformationen mit $y_1^{(\mu)}, \ldots, y_\sigma^{(\mu)}$ und die Ordnung mit $n^{(\mu)}$, aber nach $\mu+1$ Transformationen bezüglich mit $y_1^{(\mu+1)}, \ldots, y_\sigma^{(\mu+1)}$ und $n^{(\mu+1)}$, so stellen sich gemäss § 2 die Abhängigkeiten unter den zwei auf einander folgenden Werthesystemen in der Form dar:

$$(3.)\quad \begin{cases} n^{(\mu+1)} = a_{00}n^{(\mu)} + a_{01}y_1^{(\mu)} + a_{02}y_2^{(\mu)} + \cdots + a_{0\sigma}y_\sigma^{(\mu)}, \\ y_1^{(\mu+1)} = a_{10}n^{(\mu)} + a_{11}y_1^{(\mu)} + a_{12}y_2^{(\mu)} + \cdots + a_{1\sigma}y_\sigma^{(\mu)}, \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ y_\sigma^{(\mu+1)} = a_{\sigma0}n^{(\mu)} + a_{\sigma1}y_1^{(\mu)} + a_{\sigma2}y_2^{(\mu)} + \cdots + a_{\sigma\sigma}y_\sigma^{(\mu)}, \end{cases}$$

wo $a_{00} = m$ Ordnung der Transformation, $a_{01} = -b_1$, $a_{02} = -b_2, \ldots, a_{i_1 i_1+1} = 1$, u. s. w. wie in § 2 erklärt ist.

Dies giebt das System von linearen Differenzengleichungen mit constanten Coefficienten:

$$(4.)\quad \begin{cases} \Delta n^{(\mu)} = (a_{00}-1)n^{(\mu)} + a_{01}y_1^{(\mu)} + a_{02}y_2^{(\mu)} + \cdots + a_{0\sigma}y_\sigma^{(\mu)}, \\ \Delta y_1^{(\mu)} = a_{10}n^{(\mu)} + (a_{11}-1)y_1^{(\mu)} + a_{12}y_2^{(\mu)} + \cdots + a_{1\sigma}y_\sigma^{(\mu)}, \\ \Delta y_2^{(\mu)} = a_{20}n^{(\mu)} + a_{21}y_1^{(\mu)} + (a_{22}-1)y_2^{(\mu)} + \cdots + a_{2\sigma}y_\sigma^{(\mu)}, \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ \Delta y_\sigma^{(\mu)} = a_{\sigma0}n^{(\mu)} + a_{\sigma1}y_1^{(\mu)} + a_{\sigma2}y_2^{(\mu)} + \cdots + (a_{\sigma\sigma}-1)y_\sigma^{(\mu)}. \end{cases}$$

Man kann sie auf mehrfache Art integriren. Die *Taylor*sche Reihe liefert als Integral in der Symbolik von Herrn *Frobenius*

$$(5.)\qquad e^{\mu(A-E)},$$

wenn A die lineare Substitution (3.) bezeichnet.

4. Diese Ausdrücke sind also geeignet, die Tafeln zu ersetzen, welche sich für jede willkürlich denkbare Charakteristik geben lassen, wie

ich es an zahlreichen nothwendigen Fällen für die Ordnungen 2, 3, 4 in den Pr. F. gethan habe.

Die Gleichwerthigkeit der eben erwähnten Tafeln mit dieser Integration beruht darauf, dass wenn die Transformation, das ist das Formelsystem (3.) für ein Werthesystem $n = 1$, $y_1 = \cdots = y_\sigma = 0$ periodisch ist, es für alle Werthesysteme ist und mittelst der Zahlen dieser Tableaux die Coefficienten der integrirenden Reihen berechnet werden können. Man kann dies so aussprechen:

Wenn von einer willkürlich combinirten Charakteristik die Reihe der successiven Transformationen mit einer Homographie endigt, so wird die Charakteristik periodisch (Pr. F. p. 270).

5. Ich unterscheide ferner zwischen primitiven und daraus abgeleiteten Charakteristiken, d. h. zwischen solchen, die nur aus Coincidenzen bestehen, und solchen, die hieraus gebildete Verkettungen enthalten.

Unter den Punkten einer primitiven Charakteristik kann man eine Directrix-Substitution herstellen, indem man die beiden Fundamentalsysteme in besonderer Weise und zwar derart bezeichnet, dass man jeden Punkt und den ihm nach dem *Clebsch*schen Gesetze im zweiten Systeme conjugirten Punkt mit gleichen Ziffern bezeichnet und dann in der Substitution einem Punkte a_i jenen folgen lässt, welcher mit dem conjugirten Punkte b_i coincidirt. Hierüber gilt:

Damit zwei Charakteristiken wesentlich verschieden seien, ist nothwendig und hinreichend, dass ihre zwei Directrix-Substitutionen verschieden seien in Bezug auf Grösse der Cyklen, Vertheilung der Gruppen gleicher Vielfachheit auf die Cyklen und Anordnung innerhalb der Cyklen.

Zwei Substitutionen gehören zur selben Charakteristik, wenn die Transposition mittelst intransitiver Substitutionen, welche die Gruppen gleicher Vielfachheit festhalten, die eine in die andere überführt.

Aus einer Substitution geht mittelst Ersetzung der Punkte durch ihre conjugirten und gleichzeitige Umkehrung des Sinnes in den Cyklen eine andere hervor, welche wesentlich zur selben Charakteristik gehört.

Zu einer involutorischen Charakteristik gehört als ausgezeichnete Substitution jene, welche innerhalb der Gruppen gleicher Vielfachheit aus lauter Transpositionen besteht. Ist diese Substitution A, so kann man zwei wie in Theorem IV als S und $A^{-1}S^{-1}A$ bezeichnen.

5. Es kann nicht den Gegenstand eines Problemes bilden, alle

denkbaren Formen von Charakteristiken aufzuzählen. Man kann sich z. B. 1. auf einzelne Ordnungen beschränken, was ein endliches Problem giebt, oder 2. auf Charakteristiken mit einer gegebenen Zahl σ von Punkten, was im allgemeinen ein unendliches Problem giebt, oder 3. man kann Klassen von Fundamentalsystemen in Bezug auf ihre Charakteristiken mit einem Male zu erschöpfen suchen, was wieder ein unendliches Problem ist.

Von der grössten Wichtigkeit aber ist, dass durch die Arbeiten der Analytiker über die Zahlentheorie: *Lagrange, Gauss, Schering, Kronecker, Frobenius,* über die Substitutionsgruppen: *Cauchy, Galois, Jordan,* über die Gruppen linearer Substitutionen: *Jordan, Fuchs, Klein* das Problem als intricat in diese Theorie gebracht wird: die Aequivalenz mittelst zweier reciproker Transformationen, oder wie ich kurz sagen werde, mittelst Transposition des Trägers, zu untersuchen*).

Die Anzahl der gegen solche Transposition nicht äquivalenten Klassen periodischer Charakteristiken zu bestimmen und über die Aequivalenz (Aehnlichkeit) einer periodischen Charakteristik mit einer anderen und mit ihrem Typus (oder Normalform oder ihre Klasse) zu entscheiden, darin soll in zweiter Linie unser Charakteristikenproblem gipfeln.

§ 2.

Neue arithmetische Theorie der birationalen Transformationen und ihrer Charakteristiken**).

1. Ich bezeichne die nach der Höhe der Vielfachheit geordneten Fundamentalpunkte einer birationalen Transformation mit $a_1, \ldots, a_\sigma$, wo σ die Zahl der Punkte in der Charakteristik ist, oder mit Bezug auf die Eintheilung in Gruppen gleicher Vielfachheit, mit a_ω^ν, wo ω der Index des Punktes in seiner Gruppe ist. Die Punkte des zweiten Systemes seien $b_1, \ldots, b_\sigma$, wo die Gleichheit der beiden Zahlen σ sich unmittelbar aus den Gleichungen (1.) hier unten ergiebt.

2. Von einer Curve C_n, welche y_1-, ..., y_σ-mal durch $a_1, \ldots, a_\sigma$ geht, sage ich, sie habe den Singularitätencomplex $n, y_1, \ldots, y_\sigma$, indem ich

*) An Stelle der einfachen Zusammensetzung in der Arithmetik (cf. *Gauss,* Disqu. arithm., *Hermite* und *Jordan*) sowie an der Stelle der von *Weierstrass* eingeführten allgemeinen Aequivalenz $PAQ = B$ in der Theorie der bilinearen Formen und linearen Substitutionen getrennter Träger.

**) Die §§ 2—6 waren im Sommer 1888 vollendet und wurden Ende 1888 der Akademie zu Neapel übergeben.

für die Dauer dieser Untersuchung jene dieser Singularitäten bei Seite lasse, welche sich ausserhalb der Fundamentalpunkte und jener Punkte befinden, welche ich ihnen adjungiren werde. Dann ist der Singularitätencomplex, auch ohne das Substrat der algebraischen Curve, durch die Transformation verwandelt in einen anderen Singularitätencomplex n', $y'_1, \dots, y'_\sigma$. Die Trägercurve des ersten Complexes wird eventuell verwandelt werden in die Trägercurve des zweiten. Die Curve, welche im zweiten Systeme dem Fundamentalpunkte a_i des ersten Systemes entspricht, wird in den Punkten b_k Vielfachheiten besitzen, welche ich mit a_{ik} bezeichne; mehrere der Zahlen a_{ik} werden gleich sein können und müssen. Somit werden die Formeln für die Verwandlung der Singularitätencomplexe wie folgt angesetzt werden:

$$(1.)\quad \begin{cases} n' = mn - a_1 y_1 - a_2 y_2 - \cdots - a_i y_i - \cdots - a_\sigma y_\sigma, \\ y'_1 = b_1 n - a_{11} y_1 - a_{21} y_2 - \cdots - a_{i1} y_i - \cdots - a_{\sigma 1} y_\sigma, \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ y'_k = b_k n - a_{1k} y_1 - a_{2k} y_2 - \cdots - a_{ik} y_i - \cdots - a_{\sigma k} y_\sigma, \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ y'_\sigma = b_\sigma n - a_{1\sigma} y_1 - a_{2\sigma} y_2 - \cdots - a_{i\sigma} y_i - \cdots - a_{\sigma\sigma} y_k. \end{cases}$$

Wenn also die Zahl der Gleichungen nicht der Zahl der Unbekannten gleich wäre, so würde man unvollständige oder übermässige Bestimmung haben und beide Arten widersprechen dem Begriffe einer stetigen Transformation unter den Singularitätencomplexen der zwei Mannigfaltigkeiten.

Anmerkung. Der Fortschritt, welchen ich mit der in den Gleichungen (1.) liegenden, wichtigen Neuerung beabsichtige, beruht darauf, dass man eine birationale Transformation in allem, was sich auf den arithmetischen Charakter der Transformation bezieht, nicht mehr durch die Veränderung einer Geraden, sondern allgemein irgend einer Linie definirt, indem man die zu ändernden Vielfachheitszahlen als arithmetische Variablen definirt. Hiermit werde ich als wahre Quelle dieser Transformationen die Untersuchungen von *Euler, Lagrange, Jordan* und neuerdings von *Frobenius* über lineare Substitutionen aufweisen.

3. *Definition.* Die linearen Substitutionen mit ganzen Coefficienten, welche die zwei ganzzahligen Formen

$$n(n+3) - \Sigma y(y+1) \text{ und } (n-1)(n-2) - \Sigma y(y-1)$$

reproduciren, werden fundamentale oder solche mit birationaler Matrix genannt werden, sobald die Determinante positiv ist.

Theorem I. Die Substitutionen, welche die zwei erwähnten Formen nicht ändern, lassen auch ungeändert die zwei Formen

$$(2.)\qquad \begin{cases} F_1 = 3n - y_1 - y_2 - \cdots - y_i - \cdots - y_\sigma, \\ F_2 = n^2 - y_1^2 - y_2^2 - \cdots - y_i^2 - \cdots - y_\sigma^2.^{*)} \end{cases}$$

Theorem II. Die Determinante $\varDelta$ *einer fundamentalen Substitution ist* $(-1)^\sigma$.

Theorem III. Die Coefficienten a_i *und* a_{ik} *in den Substitutionen* (1.) *müssen in Consequenz der Definition positiv sein.*

Theorem IV. Die Coefficienten der fundamentalen linearen Substitutionen genügen den Bedingungen

$$(3.)\qquad \begin{cases} 3m - b_1 - b_2 - \cdots - b_\sigma = 3, \\ 3a_i - a_{i1} - a_{i2} - \cdots - a_{i\sigma} = 1, \\ m^2 - b_1^2 - b_2^2 - \cdots - b_\sigma^2 = 1, \\ a_i^2 - a_{i1}^2 - a_{i2}^2 - \cdots - a_{i\sigma}^2 = -1, \\ m a_i - b_1 a_{i1} - b_2 a_{i2} - \cdots - b_\sigma a_{i\sigma} = 0, \\ a_i a_j - a_{i1} a_{j1} - a_{i2} a_{j2} - \cdots - a_{i\sigma} a_{j\sigma} = 0. \end{cases}$$

Theorem V. Die fundamentalen linearen Substitutionen transformiren auch in sich selbst die bilineare Form

$$(4.)\qquad F_{12} = mm' - y_1 y_1' - y_2 y_2' - \cdots - y_i y_i' - \cdots - y_\sigma y_\sigma',$$

wenn beide Reihen congruent mittelst (1.) transformirt werden.

Die Beweise für I bis V folgen aus der Einsetzung von (1.)

Fundamentaltheorem VI. Die Substitutionen, welche die zwei Formen F_1 *und* F_2 *reproduciren, genügen auch den folgenden Bedingungen für die Coefficienten* a_{ik}:

$$(5.)\qquad \begin{cases} 3m - a_1 - a_2 - \cdots - a_\sigma = 3, \\ 3b_k - a_{1k} - a_{2k} - \cdots - a_{\sigma k} = 1, \\ m^2 - a_1^2 - a_2^2 - \cdots - a_\sigma^2 = 1, \\ b_k^2 - a_{1k}^2 - a_{2k}^2 - \cdots - a_{\sigma k}^2 = -1, \\ m b_k - a_1 a_{1k} - a_2 a_{2k} - \cdots - a_\sigma a_{\sigma k} = 0, \\ b_k b_l - a_{1k} a_{1l} - a_{2k} a_{2l} - \cdots - a_{\sigma k} a_{\sigma l} = 0. \end{cases}$$

---

*) Verschiedene Geometer welche birationale Transformationen entdeckt und ausführlich untersucht haben, haben nicht verfehlt zu bemerken, dass jene der Ebene sich wesentlich von jenen der höheren linearen Räume unterscheiden. Durch meine neue Definition

Beweis: Der Complex 3, 1, 1, ..., 1 und jener $m, b_1, b_2, \ldots, b_\sigma$ geben F_{12} den Werth 3 wegen der ersten Gleichung (3.) Transformirt durch (1.) geben sie nach dem ersten Systeme hin 1, 0, 0, ..., 0 und $k, c_1, c_2, \ldots, c_\sigma$, welche F_{12} den Werth k geben. Hieraus folgt wegen V $k = 3$. Die Complexe $a_i, a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{i\sigma}$ und 3, 1, 1, ..., 1 geben F_{12} den Werth 1 wegen der zweiten Gleichung (3.) und durch (1.) gehen sie über in 0, ..., 1, ..., 0, und 3, $c_1, \ldots, c_\sigma$, was F_{12} den Werth 1 giebt, folglich $c_i = 1$. Also 3, 1, ..., 1 ist verwandelt in 3, 1, ..., 1. Nun liefern die Gleichungen (1.) durch Einführung von 3, 1, ..., 1 statt $n, y_1, \ldots, y_\sigma$ unmittelbar (5.).

Fundamentaltheorem VII. Die inversen Substitutionen der Substitutionen mit birationaler Matrix liefern

$$(6.)\qquad \begin{cases} n' = mn - b_1 y_1 - b_2 y_2 - \cdots - b_\sigma y_\sigma, \\ y_1' = a_1 n - a_{11} y_1 - a_{12} y_2 - \cdots - a_{1\sigma} y_\sigma, \\ \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot \\ y_\sigma' = a_\sigma n - a_{\sigma 1} y_1 - a_{\sigma 2} y_2 - \cdots - a_{\sigma\sigma} y_\sigma. \end{cases}$$

Beweis: Die Form F_{12} giebt für die zwei Complexe $m, b_1, b_2, \ldots, b_\sigma$ und $1, 0, \ldots, 0$ ferner $a_i, a_{i1}, \ldots, a_{i\sigma}$ und $1, 0, \ldots, 0$ die Werthe m und $a_1, a_2, \ldots, a_\sigma$. Die Gleichungen (1.) verändern diese Complexe nach dem ersten Systeme hin in 1, 0, 0, ..., 0 und $M, A_1, A_2, \ldots, A_\sigma$; ferner in $0, \ldots, -1, \ldots, 0$ und $M, A_1, \ldots, A_\sigma$, aber da die (6.) eben diese Veränderung ausdrücken, so sind die $M, A_1, \ldots, A_\sigma$ die Coefficienten ihrer ersten Colonne; andererseits geben die neuen Complexe F_{12} die Werthe $M, A_1, \ldots, A_\sigma$, was $M = m$, $A_1 = a_1, \ldots, A_\sigma = a_\sigma$ liefert. Die Werthe der anderen Coefficienten von (6.) folgen aus der Betrachtung der Paare von Singularitätencomplexen

$$m,\ b_1,\ \ldots,\ b_\sigma \text{ und } 0,\ 0,\ \ldots,\ -1_k,\ \ldots,\ 0 \text{ oder}$$
$$a_i,\ a_{i1},\ \ldots,\ a_{ik},\ \ldots,\ a_{i\sigma}, \text{ und } 0,\ 0,\ \ldots,\ -1_k,\ \ldots,\ 0$$

als dem zweiten Systeme der y angehörend.

Theorem VIII. Der Minor von m in der Determinante Δ hat den Werth $(-1)^\sigma . m$.

---

scheint dieser Unterschied in das rechte Licht gestellt zu sein. Er ist nicht verschieden von dem besonderen Platze, welchen die quadratischen Formen behaupten in Hinsicht auf die Formen der höheren Grade, in der Algebra wie in der Arithmetik, und um genauer zu sprechen, beruht dieser Unterschied, wie mir scheint, in der Existenz der linearen reproducirenden Substitutionen, deren es für jede gegebene quadratische Form unendlich viele giebt.

Dieser Werth von Δ_{11} ist bereits von *Clebsch* bestimmt worden. In Folge dessen, dass er die Ränderung seiner Determinante unterlassen hat, konnte er nicht den Werth von Δ selbst finden.

Theorem IX. Die einzigen linearen Substitutionen mit reellen ganzen Coefficienten, welche die zwei Formen F_1, F_2 reproduciren, sind

1) *die Permutationen der Buchstaben $y_1, \ldots, y_\sigma$;*

2) *die Substitutionen* (1.) *definirt durch die Bedingungen* (3.).

Theorem X. Jede periodische lineare Substitution mit reellen Coefficienten muss eine Hermitesche Substitution sein. (Vgl. Beweis Pr. F. p. 296)*).

Theorem XI. Jede periodische reelle lineare Substitution muss eine Substitution mit ganzen Coefficienten sein.

Theorem XII. Das mehrfach aufgenommene Problem, die Zahlen b_i auszudrücken, löst sich vollständig durch eine allgemeine von Hermite herrührende Formel, welche gleichzeitig und auf eine einzige Art die Zahlen b_i und a_{ik} als rationale Functionen von $\frac{\sigma(\sigma+1)}{2}$ Parametern giebt.

Die von *Hermite, Rosanes* und *Frobenius* bewiesenen Formeln haben nämlich nur eine Einschränkung in Bezug auf den ganzzahligen Charakter der Coefficienten nöthig, um die gewünschten Formeln zu liefern.

4. Man kann sich denken, dass zwei birationale Transformationen nach einander ausgeführt werden, indem von den Singularitäten y zu den y' und von den y' zu den y'' übergegangen wird. Man wird die unmittelbare Relation yy'' aufstellen, indem man die alten Gleichungen in die neuen einträgt. Die Composition der birationalen Transformationen ist so an die Composition linearer Substitutionen geknüpft. Wenn die zweite Substitution in z', z'' geschrieben ist, verlangt die Composition, z' mit den y' zu identificiren, also Coincidenz der Vielfachheiten z' mit den Vielfachheiten y' vorauszusetzen. Die Reihenfolge dieser Coincidenzen kann verschieden sein. Sobald aber ein Fundamentalpunkt c_i des dritten Systemes mit keinem b_i coincidirt, muss man (1.) vervollständigen durch Hinzunahme von $y'_{\sigma+\lambda}$ und Gleichsetzung desselben mit einem Punkte der nicht coincidirenden c_i. Existirt andererseits ein b_i, der mit keinem c_i coincidirt, so muss man $z'_{\sigma+k} = z''_{\sigma+l}$ hinzufügen zum Systeme der Gleichungen in z, wo $z'_{\sigma+k}$ mit einem der freien Punkte b zu identificiren ist. Unter diesem Gesichtspunkte führt also die

*) Theorem X ist eine Verallgemeinerung des *Lüroth*schen Satzes (Math. Ann. XIII) über cyklische Projectivitäten in der Ebene und im Raume, also für $\sigma = 2$ und 3.

Zusammensetzung zweier Transformationen, welche keinen Fundamentalpunkt gemeinsam haben, von zwei Systemen (1.) in $\sigma+1$ und σ_1+1 Variablen zu einem Systeme in $\sigma+\sigma_1+1$ Variablen.

Theorem XIII. Jede lineare Substitution mit birationaler Matrix kann erreicht werden durch successive Anwendung der einfachsten fundamentalen Substitution

$$\begin{aligned} n' &= 2n-y_1-y_2-y_3, \\ y_1' &= n \quad\;\; -y_2-y_3, \\ y_2' &= n-y_1 \quad\;\; -y_3, \\ y_3' &= n-y_1-y_2. \end{aligned}$$

Beweis 1*). Man kann den Vorgang von *Nöther* anwenden, welcher in der allmählichen Reduction von m besteht, womit die b_i allmählich von selbst wegfallen.

Beweis 2. Eine neue Methode dürfte die sein, dass man statt den Coefficienten m zu reduciren, die ganze Zahl σ der Fundamentalpunkte reducirt. Man nimmt eine willkürliche Fundamentalcurve der zweiten Ebene und richtet ein Fundamentalsystem ein, welches diese Fundamentalcurve enthält und dessen Fundamentalpunkte zum Theil mit den Fundamentalpunkten dieser Fundamentalcurve coincidiren, während die anderen nicht ausserhalb des gegebenen Fundamentalsystemes sind. Diese neue Transformation, ausgeführt auf die gegebene, liefert eine Transformation, welche nothwendig einen Fundamentalpunkt weniger als die gegebene hat. Manchmal wird es sogar möglich sein, gleichzeitig um mehrere Punkte zu vermindern und man gelangt nothwendig zur quadratischen Transformation. Auf diese letzte Art hat man allerdings Componenten höheren als zweiten Grades, aber durch neuerliche Zerlegung dieser kommt man zu quadratischen Transformationen allein**).

5. Die charakteristische Function einer fundamentalen Substitution wird verschieden nach der Ordnung, in welcher man die y' den y ent-

*) Für die linearen Substitutionen ist die Vorsicht wegen der unendlich nahen Punkte unnütz und die zwei verschiedenen Beweise von *Nöther* sind die einfachsten in einer unendlichen Reihe möglicher Beweise.

**) Man kennt bereits eine wichtige lineare Substitution, die *Abel*schen Substitutionen von *Hermite* (cf. *Frobenius,* d. J. Bd. 89). Während diese die bekannte alternirende bilineare Form reproduciren, reproducirt die gegenwärtige die zwei Formen F_1 und F_2. Die Eigenschaft der Zusammensetzbarkeit durch elementare Substitutionen ist ihnen gemeinsam.

dass die Wurzeln der charakteristischen Function Einheitswurzeln seien und diesen Wurzeln einfache Elementartheiler angehören.

Beweis. Der Satz ist eine Uebertragung des von *Frobenius* dieses Journal Bd. 84 § 3 VIII aufgestellten Satzes aus der Theorie der bilinearen Formen.

Corollar. Sobald die Zahl $\sigma < 9$, *kann der Periodicitätsindex der Charakteristik nicht die Zahl* 30 *überschreiten.*

Beweis. Die charakteristische Gleichung muss rationale Polynome enthalten, irreductible Factoren von x^i-1. Die successiven Zahlen $\varphi(i)$ von *Gauss* sind 1, 1, 2, 2, 4, 2, 6, 3, 5, 4, 10, 4, 12, 6, 8, 8, 16, 6, 18, 8, 13, 10, 22, 8, 20, 12, 18, 12, 28, 8, 30, 16, 20, 16, ... und alle Zahlen, welche folgen sind > 8. Für $i = i_1^{a_1} i_2^{a_2} \dots i_\mu^{a_\mu}$ ist es unmöglich, dass $\Sigma\varphi(i_\varrho^{a_\varrho}) < 9$ für $i > 30$.

Theorem XXI. Wenn die Directrixpermutation einer fundamentalen Substitution einen Cyklus enthält, wo mehrere Punkte ganz gleiche Rolle inne haben, so sind die Minoren Δ_{ik}, *welche zu diesen Elementen in* Δ *gehören, gleich.*

Theorem XXII. Ist D *die charakteristische Function der Substitution* (1.) *und bringt man daselbst die Verkettungen an*

$$y'_{\sigma+1} = y_i, \quad y'_{\sigma+2} = y_{\sigma+1}, \quad \dots, \quad y'_{\sigma+\lambda} = y_k,$$

so hat die neue Substitution die charakteristische Function

$$D+(-1)^{\lambda+1}[x+(-x)^{\lambda+1}]\Delta_{ik}.$$

Theorem XXIII. Wenn mehrere Verkettungen existiren, wird die charakteristische Function

$$D+[(-x)^{\lambda_1+1}+x]\Delta_{i_1k_1}+[(-x)^{\lambda_2+2}+x]\Delta_{i_2k_2}+\dots+[(-x)^{\lambda_r+r}+x]\Delta_{i_rk_r}$$
$$+\Sigma[(-x)^{\lambda_1+1}+x][(-x)^{\lambda_2+2}+x]\Delta_{i_1k_1,i_2k_2}+\cdots.$$

Theorem XXIV. In der Determinante $|A-xE|$, *wo* A *die fundamentale Substitution und* $|A| = \Delta$, *haben alle Minoren, welche vom* $(n-1)$*-ten Grade in* x *sind, ausgenommen* Δ_{11}, *den Factor* $(x-1)^v$, $\sigma+1-v$ *ist der Rang der Determinante* $D_{x=1}$.

Die Theoreme XXI—XXIII werden durch Einsetzung bewiesen. Pr. F. p. 299.

7. Die folgenden Theoreme sind die Grundlage für die Theorie der Reductibilität.

Theorem XXV. Wenn die Elemente einer charakterisirten birationalen Matrix rationale ganze Functionen einer Zahl N *von Parametern sind und*

ein Werthesystem dieser Parameter existirt, für welche die lineare Substitution aperiodisch (periodisch) wird, so wird auch die Substitution, welche für jedes grössere (kleinere) Werthesystem der Parameter hervorgeht, aperiodisch (periodisch). Beweis Pr. F. p. 300.

Theorem XXVI. Sobald die Substitutionen (1.) *aperiodisch sind und man bringt Verkettungen an, so werden die neuen Substitutionen wieder aperiodisch.*

Theorem XXVII. Sobald die Substitutionen (1.) *mit Verkettungen periodisch sind, und man bringt eine Verkürzung in einer der Verkettungen an, so können die neuen Substitutionen nicht aperiodisch sein.*

Theorem XXVIII. Es ist unmöglich, dass die Substitutionen (1.) *im allgemeinen eine charakteristische Function besitzen, deren sämmtliche Wurzeln den Modul* 1 *haben.*

Theorem XXIX. Wenn die Substitutionen (1.) *reductibel im Grade m sind durch birationale Aequivalenz und man bringt eine Verkürzung in den Verkettungen an, so ist es unmöglich, dass die Reductibilität aufgehoben werde.*

Theorem XXX. Wenn die Substitutionen (1.) *irreductibel sind im Grade m durch birationale Aequivalenz und man verlängert die Verkettungen, so ist es unmöglich, dass die Irreductibilität aufgehoben werde.*

Theorem XXXI. Wenn die fundamentale Substitution durch birationale Aequivalenz reductibel ist bis zum Grade m und man bringt eine Verkürzung in den Verkettungen an, so ist die neue Charakteristik reductibel bis zu einem Grade $\leqq m$.

Theorem XXXII. Die mit den Systemen 1_3, 2_3, $(2^2)_3$, ..., $(2^\alpha)_3$ *gebildeten Charakteristiken, welche die Identität zur Directrix haben, sind aperiodisch, sobald die Zahl* $\sigma > 8$ *ist.*

Beweis 1. Man kann für $\alpha = 3$ und $\alpha = 4$ das Tableau bilden und findet beidemale den Satz bestätigt. Von hier schliesst man auf das allgemeine α mittelst des Theoremes XXV.

Beweis 2. Man kann die Charakteristiken als Wiederholung der quadratischen Charakteristik a' in $a'_1 \ldots . a'_\alpha = a$, b' in b'_1 in $\ldots b'_\alpha = b$, c' in c'_1 in $\ldots c'_\alpha = c$ betrachten, von der in § 3 bewiesen (vgl. Pr. F. II. Theil), dass von $\alpha = 3$ ab Aperiodicität eintritt.

Theorem XXXIII. Jede Wiederholung einer Charakteristik mit identischer Directrixsubstitution hat ebenfalls die Identität zur Directrixsubstitution, und wenn der Umfang der Gruppe gleicher Vielfachheit > 1, *ist die Gruppe der Wiederholung negativ.*

Beweis. Es sei $a_1, a_2, \ldots, a_\omega$ eine ν-fache Gruppe und $b_1, b_2, \ldots, b_\omega$ die conjugirte ν'-fache Gruppe. Die Curven $C'_{\nu i}$ gehen durch $b_1^\beta, b_2^\beta, \ldots, b_i^{\beta-\delta}, b_\omega^\beta$, wo $\delta = \pm 1$, oder durch $a_1^\beta, a_2^\beta, \ldots, a_i^{\beta+\delta}, \ldots, a_\omega^\beta$ und schneiden $C_{\nu 1}, C_{\nu 2}, \ldots, C_{\nu i}, \ldots, C_{\nu \omega}$ in $k-(\omega\beta\alpha+\alpha\delta+\beta\delta)$, $k-(\omega\alpha\beta+\alpha\delta+\beta\delta), \ldots$, $k-(\omega\alpha\beta+\alpha\delta+\beta\delta+\delta^2), \ldots, k-(\omega\alpha\beta+\alpha\delta+\beta\delta)$ Punkten, und diese Zahlen sind die Vielfachheiten der zweiten Transformirten von $a_1, \ldots, a_\omega$ in $a_1, \ldots, a_\omega$. Man erhält aber für beide Werthe von δ, dass die Gruppe $a_1, \ldots, a_\omega$ sich selbst conjugirt ist.

Theorem XXXIV. Wenn man zwei Charakteristiken der vorher beschriebenen Art hat, mit denselben Zahlen α, und die Gruppen derselben Zahlen sind coincident, so giebt die Zusammensetzung der zwei Charakteristiken neuerdings eine Charakteristik mit identischer Directrixsubstitution.

Allgemeiner, wenn die α einer Charakteristik sämmtlich kleiner sind als die α der anderen, wobei die nicht für beide fundamentalen Punkte für die zweite als unveränderte Punkte gezählt werden, so liefert die Zusammensetzung noch immer eine Charakteristik mit identischer Directrixsubstitution. Aus zwei positiven oder aus zwei negativen Gruppen resultirt eine positive, aus einer positiven und einer negativen Gruppe resultirt eine negative Gruppe.

Theorem XXXV. Dieselben Theoreme haben statt, wenn statt des Wortes coincident das Wort verkettet in XXXIV gesetzt wird.

Theorem XXXVI. Jede Charakteristik mit identischer Substitution wird in eine neue Charakteristik übertragen, welche ebenfalls identische Directrixsubstitution hat oder aus einer solchen Charakteristik abgeleitet ist.

Theorem XXXVII. Jede Charakteristik mit identischer Directrixsubstitution kann erhalten werden als Wiederholung einer Charakteristik, wo jeder Fundamentalpunkt verkettet oder coincident mit dem conjugirten ist, oder aus einer Charakteristik, wo immer gleichvielfache Fundamentalpunkte verkettet oder coincident sind mit gleichvielfachen Fundamentalpunkten.

Theorem XXXVIII. Wenn die Charakteristik eines symmetrischen Fundamentalsystemes identische Directrixsubstitution hat, haben alle Wiederholungscharakteristiken symmetrische Fundamentalsysteme und identische Directrixsubstitution.

Theorem XXXIX. Die Charakteristiken mit identischer Directrixsubstitution, welche mehr als acht Punkte haben, sind aperiodisch, ausgenommen die Fundamentalsysteme von de Jonquières.

§ 3.

Die internen Charakteristiken.

Im § 1 habe ich von den Tableaux gesprochen. Je zwei Fundamentalsysteme, welche gleich weit von der Mitte abstehen, müssen in der Ebene gleiche Ordnung haben. Ueber dieselben gebe ich den folgenden Satz:

Theorem XL. Alle Wiederholungen einer periodischen Charakteristik, welche mit dieser gleichen Index haben, sind äquivalent mit dieser Charakteristik.

Ich habe dies auf der Tafel I der Pr. F. für alle Typen nachgewiesen, und ein arithmetischer Beweis folgt in § 5.

Theorem XLI. Es giebt kein birationales Fundamentalsystem einer Ordnung > 5, *welches nur sechs Fundamentalpunkte enthielte.*

Theorem XLII. Es giebt kein birationales Fundamentalsystem einer Ordnung > 8, *welches nur sieben Fundamentalpunkte enthielte.*

Theorem XLIII. Es giebt kein birationales Fundamentalsystem einer Ordnung > 17, *welches nur acht Fundamentalpunkte enthielte.*

Beweis. Jede Fundamentalcurve ist vollständig bestimmt durch die Fundamentalpunkte, welche sie enthält. Also kann ein Fundamentalsystem mit nur sechs oder sieben oder acht Punkten keine Fundamentalcurve haben, deren Ordnung > 2 oder > 3 oder > 6 wäre, in keinem der zwei conjugirten Systeme kann die Vielfachheit eines Fundamentalpunktes zwei oder drei oder sechs übersteigen, da die Fundamentalcurven der Ordnungen drei vier, sieben mindestens sieben, acht, neun Punkte zur Bestimmung benöthigen. Wenn alle Fundamentalpunkte die Ordnung zwei oder drei oder sechs haben und die Ordnung der Transformation also fünf oder acht oder 17 ist, so sind die Bedingungen für die Vielfachheiten derart, dass, wenn die Anzahl der Punkte dieselbe bleibt, die anderen Lösungen eine Vergrösserung der Vielfachheiten erfordern.

Theorem XLIV. Es giebt nur eine endliche Anzahl birationaler Transformationen, welche in jedem Fundamentalsysteme eine Anzahl von sechs, sieben, acht Punkten haben, dagegen eine unendliche Anzahl Transformationen, wenn die Anzahl der Fundamentalpunkte > 8 *ist.*

Für $\sigma \leqq 8$ sehe man § 10, für $\sigma > 8$ lehrten es die *Jonquières*schen Transformationen für $\sigma = 2\nu + 1$ und andere Beispiele für $\sigma = 2\nu$.

Fundamentaltheorem XLV. Jede Charakteristik mit weniger als neun Punkten liefert ein endliches Tableau successiver Transformationen und ist also periodisch.

Beweis. In dem Tableau kann sich keine Charakteristik in derselben Vertheilung über die acht Punkte wiederholen, denn man könnte denselben Weg in der Reihe der Transformationen zurück machen und müsste auf die ursprüngliche Transformation und die Homographie kommen, die Reihe hätte sich schon früher schliessen müssen. Nach dem vorhergehenden Theoreme giebt es nur eine endliche Anzahl von Fundamentalsystemen, und diese Anzahl kann nur auf eine endliche Anzahl von Arten auf die Punkte der Charakteristik vertheilt werden. Es muss daher das Fundamentalsystem, von welchem man ausgegangen, als Fundamentalsystem der ersten Ebene wieder erscheinen. Dann ist aber die nächste Transformation sicher eine Homographie und die Reihe ist geschlossen*).

*Theorem XLVI. Die Summe aller Vielfachheiten, welche derselbe Punkt der Charakteristik successive erhält, ist dieselbe für alle Punkte, wenn die Charakteristik unseren Charakter des Typus besitzt***). *Die Summe aller successiven Ordnungen, welche in der Reihe erscheinen, ist das Dreifache der vorhergehenden Summe.* Beweis Pr. F. p. 274.

Theorem XLVII. Für jede Charakteristik von σ Punkten kann man eine involutorische Charakteristik mit denselben oder weniger Punkten finden, welche mit jener vertauschbar ist. Beweis Pr. F. p. 272.

Theorem XLVIII. Die Charakteristiken J^8, J^{17} (vgl. unten § 10 Θ_2, Σ_2) sind vertauschbar mit den Charakteristiken, welche sieben, acht Punkte haben, und nur mit diesen.

§ 4.

Die uneigentlichen Gruppen.

1. Jede birationale Transformation besitzt eine bestimmte Anzahl periodischer Gruppen eines vorgelegten Index***). Diese Bestimmung hängt einzig vom Fundamentaltheoreme der Algebra ab, und die Zahl kann daher nur abnehmen durch particuläre Lagen der zwei Fundamentalsysteme. Die Lagen, welche solche Wirkung haben, sind Coincidenz und Verkettung. Wenn a mit einem Punkte b' coincidirt, durch welchen die Fundamental-

*) Man kann den Beweis leicht in die in der Algebra gebräuchliche symbolische Form bringen.

**) Ich hatte dieses Theorem ursprünglich inductiv gefunden. Es ist nunmehr eine Folge von § 6.

***) Ann. di Matematica X.

Ich habe Pr. F. p. 317 und 318 einige Abzählungen uneigentlicher cyklischer Gruppen bei verschiedenen Charakteristiken gegeben.

§ 5.

Die Invarianten der fundamentalen linearen Substitutionen.

Theorem LV. Für zwei Substitutionen (1.) *mit derselben Variablenzahl und birationaler Aequivalenz (Aehnlichkeit durch Substitutionen* (1.)*) sind die beiden charakteristischen Functionen identisch.*

Beweis. Die Wurzeln der charakteristischen Function ändern sich nicht durch Transposition STS^{-1} (vgl. *Frobenius* l. c.), und da der letzte Coefficient in den zwei Gleichungen $(-1)^{\sigma+1}$ ist, hat man das Theorem.

Theorem LVI. Für zwei lineare Substitutionen (1.) *mit derselben Variablenzahl y und mit birationaler Aequivalenz bleibt die Zahl*

$$m-a_{1z_1}-a_{2z_2}-\cdots-a_{iz_i}-\cdots-a_{\sigma z_\sigma}$$

dieselbe, wo angenommen ist, dass

$$y_1, \quad y_2, \quad \ldots, \quad y_i, \quad \ldots, \quad y_\sigma$$

der Reihe nach mit

$$y'_{z_1}, \quad y'_{z_2}, \quad \ldots, \quad y'_{z_i}, \quad \ldots, \quad y'_{z_\sigma}$$

coincidiren.

Beweis. Der Coefficient der σten Potenz von x giebt das Theorem.

Theorem LVIII. Zwei Charakteristiken mit derselben Zahl σ von Punkten, welche äquivalent sind, haben dieselbe Zahl $m-\nu$, wo ν die Zahl der uneigentlichen Doppelpunkte ist.

Dies ist die geometrische Deutung der im vorigen Theoreme aufgeschriebenen Anzahl.

Theorem LIX. Sobald eine Charakteristik eine Zahl $m-\nu$ hat, welche $<+1$, *kann sie nicht äquivalent mit einer Homographie sein.* Pr. F. 302.

Theorem LX. Sobald eine Charakteristik eine Zahl $m-\nu$ hat, welche algebraisch kleiner als -7 ist, ist sie im Falle der Periodicität äquivalent mit einer Jonquièresschen Charakteristik, wo die $(n-1)$-fachen Punkte coincidiren. Pr. F. 302.

Theorem LXI. Es giebt keine periodische Charakteristik, welche eine Zahl $m-\nu$ besitzt, die algebraisch kleiner wäre als $-(\sigma-1)$ oder $-(\sigma-3)$, wenn $\sigma>8$. Pr. F. 303.

Theorem LXII. Es giebt keine periodische Charakteristik, welche eine Zahl $m-\nu$ besitzt, die grösser wäre als $\sigma-1$. Pr. F. 303.

———

Theorem LXIII. Es giebt keine periodische Charakteristik, deren $m-\nu$ algebraisch kleiner wäre als $-(\sigma-1)$ *und abgesehen von den unerweiterten zwei involutorischen Charakteristiken* XLIII_2, XLVIII_2, (§ 11) *kleiner als* $-(\sigma-3)$.

2. Ich habe die Bedeutung des ersten Coefficienten der charakteristischen Function oben in Theorem LVII gegeben. Es sei C_2 der zweite Coefficient, $m'-\nu'$ sei die Zahl $m-\nu$ für die Wiederholungscharakteristik. Dann ist $m'-\nu'$ der Coefficient C_1 für diese Charakteristik, und weil die Wurzeln der charakteristischen Gleichung für diese Wiederholung die Quadrate der Wurzeln für die gegebene Gleichung sind, existirt die Relation

$$m'-\nu' = (m-\nu)^2-2C_2,$$

aber $m'-\nu'$ ist die Anzahl der eigentlichen Doppelpunkte für die Wiederholung, und diese ist die Summe der eigentlichen Doppelpunkte der ursprünglichen Charakteristik und der Zahl $2z_2$, wo z_2 die Zahl der eigentlichen involutorischen Paare der ursprünglichen Charakteristik ist. Also

$$m'-\nu' = (m-\nu)+2z_2,$$

$$C_2 = \frac{(m-\nu)(m-\nu-1)}{2}-z_2,$$

oder mit (z_2) die Anzahl der uneigentlichen Paare bezeichnend und mit Hülfe meiner Formel l. c.

$$C_2 = \frac{(m-\nu)(m-\nu-1)-m(m-1)}{2}-(z_2).$$

Man fährt in derselben Weise fort mit Hülfe der *Newton*schen Formeln und gelangt zum

Theorem LXIV. Die Invarianz des Systemes der Coefficienten C ist identisch mit der Invarianz der Anzahlen $\frac{m(m^{i-1}-1)}{i}-(Z_i)$, *wo* (Z_i) *die Zahl der uneigentlichen Gruppen des Index i.*

Theorem LXV. Wenn die Coefficienten a gleich sind den Coefficienten b in derselben Ordnung und man macht $y'_i \equiv y_i$, *so sind die Substitutionen* (1.) *involutorisch und die Wurzeln der charakteristischen Gleichung sind* $+1$ *oder* -1.

Theorem LXVI. Wenn man die y, welche einer gleichvielfachen Gruppe entsprechen, permutirt, so nimmt die charakteristische Gleichung an Stelle der respectiven Zahl von Factoren $(x+1)$ *Factoren* $x^\nu-1$ *an entsprechend den verschiedenen Cyklen der neuen Permutation.*

3. Indem ich die Begriffe des Theoremes XVIII wieder aufnehme, bezeichne ich die Zahl der unbestimmten Veränderlichen durch v und nenne

sie einfach die Anzahl der Unbestimmtheiten. Die anderen $\sigma+1-v$ Veränderlichen bestimmen sich durch Gleichungen, wo die v unbestimmten Veränderlichen vorkommen. Aber es kann geschehen, dass in diesen Gleichungen nur ein Theil dieser ferneren Variablen vorkommt, etwa $g_{v+\lambda}$, und man wird auf diese Art $\sigma+1-v$ Zahlen $g_{v+\lambda}$ haben. Da man v Variablen willkürlich als unabhängig wählen kann, wird man verschiedene Systeme von Zahlen $g_{v+\lambda}$ finden können und man wird sich jenes bedienen, wo die Zahlen g die kleinsten sind. Sind ferner mehrere der Zahlen $g_{v+\lambda}$ gleich, so kann es geschehen, dass die $g_{v+\lambda}$ unabhängigen Variablen, welche vorkommen, dieselben sind, und es seien j_a die Zahlen der $g_{v+\lambda}$ dieser Art. Man wird eine gewisse Anzahl von solchen Zahlen j_a finden, wo $\Sigma j_a = \sigma+1-v$.

Man führt ferner die Ausdrücke für die Variablen in F_1 und F_2 ein, was zwei Ausdrücke in den v unabhängigen Variablen $z_1, \ldots, z_v$ liefert.

Theorem LXVII. Wenn zwei lineare Substitutionen (1.) *birationale Aequivalenz haben, besitzen sie dieselben zwei Zahlen v und dieselben Formenpaare F_1 und F_2 als Ausdrücke in $z_1, \ldots, z_v$.*

Theorem LXVIII. Wenn zwei lineare Substitutionen (1.) *dieselben Elementartheiler haben und gestatten, wenigstens nach einer linearen Vertauschung der Variablen, dieselben Formen F_1, F_2 für die anallagmatischen Singularitätencomplexe, so sind sie äquivalent durch birationale lineare Substitutionen* (1.).

Theorem LXIX. Jede Wiederholung einer periodischen linearen Substitution (1.), *welche denselben Index hat, ist mittelst Substitutionen* (1.) *ähnlich der ursprünglichen Charakteristik.*

Beweis. Die charakteristischen Functionen dieser Wiederholungen sind identisch den charakteristischen Functionen der ursprünglichen Substitutionen, weil die Wurzeln für die νte Wiederholung die νten Potenzen der ursprünglichen Wurzeln sind. Ueberdies besitzen beide lineare Substitutionen dieselben Zahlen (v, F_1, F_2); es ist also das Theorem LXVIII anwendbar.

Theorem LXX. Wenn eine Charakteristik eine gewisse Anzahl von Unbestimmtheiten besitzt, so ändert sich diese Zahl um eine positive oder eine negative Einheit, wenn man eine Inversion in der Directrixsubstitution anbringt.

Theorem LXXI. Wenn in einer Charakteristik jede Gruppe mit ihrer conjugirten coincidirt, so muss man die positiven und negativen Gruppen unterscheiden. In einer positiven Gruppe bringt jeder Cyklus von geradem Index eine Unbestimmtheit hervor und nur diese. Wenn die Gruppe negativ ist, ist

der einzige Fall, wo keine Unbestimmtheit aus ihr hervorgeht, der, wo die Gruppe einen einzigen Cyklus bildet. Wenn die Gruppe in ν Cyklen zerfällt, so ist die Anzahl der Unbestimmtheiten $\nu-1$.

Beweis Pr. F. p. 305.

Theorem LXXII. Es giebt gewisse fundamentale lineare Substitutionen, wo das System m, $b_1, \ldots, b_\sigma$ als anallagmatischer Singularitätencomplex dienen kann, also wo $m = m^2 - \Sigma a_i b_i$ ist, indem ii' eine gewisse Permutation bezeichnet. Diese Charakteristiken sind birational äquivalent mit Homographieen oder die zugehörigen Subititutionen (1.) *ähnlich mit Versetzungen unter den Variablen y.*

4. Gemäss einem Theoreme von Herrn *Weierstrass* bilden die Coefficienten der charakteristischen Function ein vollständiges System von Invarianten für die Aequivalenz durch willkürliche lineare Substitutionen. Für die gegenwärtigen Untersuchungen ist eigenthümlicher Weise dieses vollständige System besser durch ein anderes zu ersetzen.

Theorem LXXIII. Die ersten Coefficienten der charakteristischen Functionen der $\sigma+1$ ersten Wiederholungen einer linearen Substitution in $\sigma+1$ Variablen, welche eine Hermitesche Substitution ist, bilden ein vollständiges System von Invarianten. Pr. F. p. 305*).

Theorem LXXIV. Damit zwei lineare Substitutionen (1.) *birational äquivalent seien, ist nothwendig und hinreichend, dass die Zahlen $m-\nu$ der $\sigma+1$ ersten Wiederholungen und überdies die Werthe (v, F_1, F_2) dieselben seien für die zwei Substitutionen.* Pr. F. p. 305.

Theorem LXXV. Unter den Zahlen $m-\nu$, gebildet für die successiven Wiederholungen, gelten die Eulerschen Relationen für die symmetrischen Functionen.

Corollar. Der Schluss von der Periodicität unserer Tableaux im § 1 auf die Periodicität der birationalen Matricen beruht auf dem Theoreme, dass, wenn eine lineare Substitution ein freies Werthesystem periodisch transformirt, sie für alle Werthesysteme der Variablen periodisch ist.

Zwei äquivalente Charakteristiken, welche dieselbe Zahl σ von Punkten, die Ordnungen m, m', die Zahlen ν, ν' von uneigentlichen Doppelpunkten haben, genügen der Bedingung $m-\nu = m'-\nu'$ aus algebraischem Grunde, wenn $m > \nu$.

Beweis. Man denkt sich den Charakteristiken Transformationen ent-

*) So konnte man sich im Beweise des Theorems LXIX der Invarianten $m^{(i)}-\nu^{(i)}$ bedienen.

sprechen. Die Doppelpunkte der Transformation sind in der Zahl $m+2$ vorhanden und die eigentlichen Doppelpunkte in der Zahl $m-\nu+2$. Diese Zahl der eigentlichen Doppelpunkte kann durch Transposition ohne Vergrösserung von σ sich nicht ändern, also $m-\nu+2 = m'-\nu'+2$.

Theorem LXXVI. Zwei Charakteristiken mit je σ Punkten, den Ordnungen m, m', den Zahlen a_i, a'_i uneigentlicher Gruppen des Index i, genügen, wenn sie birational äquivalent sind, der Bedingung $Z_{mi}-a_i = Z_{m'i}-a'_i$, wo Z_{mi}, $Z_{m'i}$ die Totalzahlen der Gruppen des Index i sind).*

*Fundamentaltheorem LXXVII. Damit zwei periodische Charakteristiken, welche dieselbe Zahl $\sigma(\sigma \gtreqless i)$ von Punkten haben, äquivalent seien, ist nothwendig und hinreichend, dass die Zahlen der eigentlichen Doppelpunkte in allen successiven Charakteristiken dieselben seien für die zwei Charakteristiken**).*

Theorem LXXVIII. Die Zahlen $m-\nu$, v, i, also Anzahl der eigentlichen Doppelpunkte, Anzahl der Unbestimmtheiten in den anallagmatischen Singularitätencomplexen und Periodicitätsindex, bestimmen die Klasse oder den Typus, welchem eine periodische Charakteristik angehört, ohne Zweideutigkeit, mit alleiniger Ausnahme zweier kubischer Charakteristiken des Index 12, *welche auf der beigegebenen Tafel herausgehoben sind.*

Nimmt man jedoch das vorhergehende Theorem mit zu Hülfe, so verschwindet auch diese eine Zweideutigkeit.

Anmerkung. Ueber diese Vorschrift, aus einer vorgelegten Charakteristik sofort abzulesen, zu welchem Typus sie gehört, werde ich noch ausführlicher im § 11 sprechen und dabei auch auf die involutorischen Charakteristiken, für welche die Vorschrift ebenfalls vollständig neu ist, eingehen.

§ 6.

Die anallagmatischen Singularitätencomplexe und die Reduction der Charakteristiken durch birationale Aequivalenz.

Wie ich bereits im § 1 hervorgehoben habe, ist der Vorgang der Transposition mittelst einer geometrischen Transformation derselbe wie jener, welchen man in der Substitutionentheorie durch STS^{-1} symbolisirt. Diese Uebereinstimmung ist zuerst von Herrn *C. Jordan* consequent hervorgehoben

---

*) Annali di Matematica X.

**) Wie man die Anzahlen σ für zwei äquivalente Charakteristiken gleich machen kann, darüber sehe man § 6.

worden. Ich habe dennoch in der Ueberschrift des Paragraphen nicht von Aehnlichkeit sondern von birationaler Aequivalenz gesprochen, weil ich glaube, dass durch diesen Ausdruck weniger Zweideutigkeit hervorgerufen wird als durch jenen.

I. Methode.

Theorem LXXIX. Die fundamentalen Substitutionen (1.) *gestatten immer die anallagmatischen Singularitätencomplexe* $3s, s, \dots, s$.

Theorem LXXX. Wenn die charakteristische Function von (1.) *ein einziges Mal die Wurzel* $+1$ *gestattet, so gestatten diese Substitutionen keinen anderen anallagmatischen Singularitätencomplex als* $3s, s, s, \dots, s$.

Eine solche Charakteristik will ich äquimultipel nennen.

Theorem LXXXI. Durch eine fundamentale Transposition, welche die Zahl der Variablen nicht vermehrt, wird eine äquimultiple Charakteristik wieder in eine äquimultiple Charakteristik übergeführt.

Wenn eine charakteristische Gleichung ν-mal den Factor $x-1$ besitzt, so nenne ich die Charakteristik, zu welcher die lineare Substitution gehört, vom νten Range.

Theorem LXXXII. Wenn die Charakteristik vom νten Range ist, so wird sie durch eine fundamentale Transposition in eine Charakteristik vom νten Range verwandelt, falls die Zahl der Variablen sich nicht ändert.

Im Ausspruche dieses Theoremes muss man, wenn sich in der neuen Charakteristik Cyklen abgesondert haben, jeden Cyklus als eine Unbestimmtheit zählen. Wenn also die Charakteristik eine Homographie mit einem einzigen Cyklus ist, so muss sie als äquimultipel betrachtet werden. Aber eine Unbestimmtheit besteht in diesem Falle doch, da die Zahl n ganz willkürlich ist. Aus diesem Grunde haben die Charakteristiken, welche einer Homographie mit einem einzigen Cyklus äquivalent sind, die Unbestimmtheit 2.

Theorem LXXXIII. Wenn eine primitive Charakteristik vom νten Range ist, so ist jede durch Verkettung daraus abgeleitete Charakteristik ebenfalls vom νten Range.

Theorem LXXXIV. Wenn die Charakteristik periodisch ist, so ist die Summe der successiven transformirten Complexe von $1, 0, 0, \dots, 0$ *ein anallagmatischer Complex.*

Theorem LXXXV. Jede Substitution (1.) *besitzt die entsprechenden*

Singularitätencomplexe $m+1, b_1, b_2, \ldots, b_k, \ldots, b_\sigma$ *und* $m+1, a_1, a_2, \ldots, a_i, \ldots, a_\sigma$, *und wenn die conjugirten Fundamentalsysteme symmetrisch sind, liefern sie einen anallagmatischen Singularitätencomplex.*

Theorem LXXXVI. Wenn die Summe der Transformirten des Complexes 1, 0, ..., 0 *äquimultipel und die Zahl der Punkte der Charakteristik* >8 *ist, so ist die Charakteristik nothwendig aperiodisch.*

Theorem LXXXVII. Wenn die Summe aller Transformirten des Complexes 1, 0, ..., 0 *Vielfachheiten verschiedener Grössen hat, so gilt für diese Summe, dass ihr Geschlecht*

$$p = \frac{i}{2}(\Sigma\nu + \nu_{\frac{i}{2}}) \quad \text{oder} \quad = \frac{i}{2}\Sigma\nu$$

ist, je nachdem i gerade oder ungerade.

Beweis. Seien zwei Complexe der Reihe mit den Singularitäten und Ordnungen s_i, n_i und s_j, n_j. Man wird haben

$$\begin{aligned}
&\Sigma s_i^2 + \Sigma s_i = n_i(n_i+3)-4, \quad \Sigma s_j^2 + \Sigma s_j = n_j(n_j+3)-4,\\
&\Sigma s_i^2 - \Sigma s_i = (n_i-1)(n_i-2), \quad \Sigma s_j^2 - \Sigma s_j = (n_j-1)(n_j-2),\\
&\Sigma s_i^2 = n_i^2-1, \quad \Sigma s_i = 3n_i-3, \quad \Sigma s_j^2 = n_j^2-1, \quad \Sigma s_j = 3n_j-3,\\
&\Sigma(s_i^2+s_j^2) = n_i^2+n_j^2-2, \quad \Sigma(s_i+s_j)^2 - 2\Sigma s_i s_j = (n_i+n_j)^2 - 2n_i n_j - 2.
\end{aligned}$$

Denn die Complexe sind wenigstens die Transformirten von 1, 0, ..., 0 und die Form F_{12} für diesen und m, a_i hat den Werth m. Wenn die Complexe successiv sind, so sind sie die Transformirten von 1, 0, ..., 0 und m, a_i und geben also F_{12} den Werth m. Wenn die zwei Complexe nicht successiv sind, ändert man leicht den Beweis. Man hat also

$$\begin{aligned}
n_i n_j - \Sigma s_i s_j &= \nu \geqq 2,\\
2n_i n_j - 2\Sigma s_i s_j &= 2\nu \geqq 4,\\
\Sigma(s_i+s_j)^2 + 2\nu &= (n_i+n_j)^2 - 2,\\
\Sigma(s_i+s_j)^2 &= (n_i+n_j)^2 - 2 - 2\nu,\\
\Sigma(s_i+s_j) &= 3(n_i+n_j) - 6,\\
\Sigma[(s_i+s_j)^2 - (s_i+s_j)] &= (n_i+n_j-1)(n_i+n_j-2) - 2(\nu-1),\\
\Sigma[(s_i+s_j)^2 + (s_i+s_j)] &= (n_i+n_j)(n_i+n_j+3) - 2(4+\nu).
\end{aligned}$$

Also: Die Gesammtheit zweier successiven Complexe ist ein Complex, welcher wenigstens die Unbestimmtheit 6 und das Geschlecht $p=2$ hat.

Indem man dies auf mehrere transformirte Complexe ausdehnt, kann

man sagen, dass

$$\Sigma[(s_i+s_j+s_k+\cdots)^2-(s_i+s_j+s_k+\cdots)] \leqq (n_i+n_j+n_k+\cdots-1)(n_i+n_j+n_k+\cdots-2),$$
$$\Sigma[(s_i+s_j+s_k+\cdots)^2+(s_i+s_j+s_k+\cdots)] \leqq (n_i+n_j+n_k+\cdots)(n_i+n_j+n_k+\cdots+3)-12.$$

Insbesondere ist

$$p_{i+j} = p_i+p_j+\nu-1,$$
$$u_{i+j} = u_i+u_j+\nu.$$

Hat man also für mehrere Singularitätencomplexe paarweise die Zahlen ν_1, ν_2, ..., so wird sein

$$p_{i_1+i_2+\cdots+i_{i-1}} = \Sigma p+\Sigma\nu-(i-1),$$
$$u_{i_1+i_2+\cdots+i_{i-1}} = \Sigma u+\Sigma\nu \quad (u \text{ ist die Dimensionenzahl des Complexes})$$

und z. B. für

$$\nu_1 = \cdots = 0, \quad p_1 = \cdots = 0, \quad p_\Sigma = -(i-1), \quad u = i.$$

Wenn aber die Complexe die successiven Transformirten im Tableau einer periodischen Transformation sind, wird man erhalten

$$\Sigma\nu = (i-1)\nu_1+(i-2)\nu_2+\cdots+\nu_{i-1},$$

wo ν_1, ..., ν_i die Grade der successiven Transformationen sind. Wenn k eine zum Periodicitätsindex i relativ prime Zahl und $< i$ ist, so wird die Transformation, welche von der Geraden nach ν_k führt, dieselben successiven Transformirten haben, nur in anderer Folge, ihr $\Sigma\nu$ wird denselben Werth besitzen. Man kann nun, weil $\nu_1 = \nu_i$, $\nu_2 = \nu_{i-1}$, ..., schreiben: für i gerade

$$\frac{i}{2}\left(\Sigma\nu+\frac{\nu_i}{2}\right),$$

für i ungerade

$$\frac{i}{2}(\Sigma\nu).$$

Ich spreche das Zwischenresultat besonders aus als

Theorem LXXXVIII. Der aus der Summe aller successiven Complexe eines Tableaus bestehende Singularitätencomplex hat mindestens $p = 2$.

Theorem LXXXIX. Jeder Singularitätencomplex, welcher eine Zahl $p = 0$ *und eine einfache Unbestimmtheit giebt, ist übertragbar durch Transpositionen, welche nur singuläre Punkte benutzen, in einen Complex* 1, 1, 0, ..., 0 *mit der Unbestimmtheit* 1.

Dieses Theorem rührt von Herrn *Nöther* her (Math. Ann. III).

Theorem XC. Jeder Singularitätencomplex, welcher eine Zahl $p = 1$ *und eine mehr als einfache Unbestimmtheit giebt, ist übertragbar entweder in*

ein lineares System von Curven dritter Ordnung $p = 1$ *oder in ein System von Curven vierter Ordnung mit zwei Doppelpunkten**).

Theorem XCI. Jeder Singularitätencomplex mit $p = 1$ *und einfacher Unbestimmtheit ist birational äquivalent mit dem Singularitätencomplex eines Büschels von Curven dritter Ordnung oder eines Büschels von Curven* C_{3s} *mit neun s-fachen Punkten.*

Dieses Theorem ist neu und auch der Beweis desselben, den ich besitze**).

Theorem XCII. Wenn die Substitutionen (1.) *einen anallagmatischen Singularitätencomplex besitzen und man überträgt sie ohne Hinzufügung neuer Variablen, so wird der Complex in einen anderen übertragen, welcher für die transformirten Substitutionen anallagmatisch ist.*

Theorem XCIII. Wird der in Theorem XV genannte Complex als adjungirter bezeichnet, so besteht zwischen zwei successiven adjungirten Complexen, ausgehend von einem gegebenen Complexe, die Relation

$$p-3(n-3)+\Sigma(s-1) = p',$$

wo p, p' *die Geschlechtszahlen der zwei Complexe sind.*

Beweis.
$$2p = (n-1)(n-2)-\Sigma s(s-1),$$
$$2p' = (n-4)(n-5)-\Sigma(s-1)(s-2)$$

und durch Subtraction das obige Resultat.

Theorem XCIV. Zwischen drei successiven adjungirten Complexen mit den Geschlechtszahlen p, p', p'' *existirt die Relation*

$$2p'-p-p'' = \sigma-9,$$

wo σ *die Anzahl der Singularitäten ist****).

---

*) Das Theorem rührt von *Bertini* her, ist jedoch neuerdings von *Martinetti* (Ist. Lomb. 1886) bewiesen worden. Ueberhaupt haben sich seit 1885 mehrere italienische Geometer mit den Beweisen dieser Hülfstheoreme beschäftigt, so *Jung*, Ann. di Mat. XVI, *Del Pezzo* und Andere.

**) Ich muss ein für alle Mal hervorheben, dass die Theoreme LXXXIX, XC die einzigen Hülfstheoreme dieser Theorie sind, welche sich vor 1885 und auch nur vor 1889 (dem Datum der Drucklegung des IV. Theiles meiner Preisschrift) ausgesprochen finden.

***) Diese beiden wichtigen Relationen habe ich zusammen in meiner C. R.-Note vom 9. Februar 1885 erwähnt. Sechs Jahre nach dem Erscheinen dieser Note findet sich die zweite Relation, aber nur als Ungleichheit und mit Abänderung der Bezeichnungen und aber auch so nur für Systeme algebraischer *Curven* — also eingeschränkte

Beweis. $$p-p' = 3(n-3)-\sum_1^\sigma (s-1),$$
$$p'-p'' = 3(n-6)-\sum_1^\sigma (s-2)$$

und durch Subtraction die Formel des Theoremes.

Theorem XCV. Wenn man für einen Singularitätencomplex mit $p > 2$ die Reihe der adjungirten Complexe bildet, kommt man nothwendig entweder auf einen Complex mit $p = 1$ und Unbestimmtheit oder auf einen Complex mit $p = 0$ und Unbestimmtheit oder auf einen Complex n, 0, 0, ..., 0 mit willkürlichem p und mehr als einfacher Unbestimmtheit oder auf n, $n-2s$, s, s, ..., s.

Beweis. Da die Ordnung des Complexes stets abnimmt, so kann p eine gewisse Grenze nicht überschreiten und man kommt endlich auf $p = 0$ oder 1 und zwar wegen des vorhergehenden Theoremes.

Theorem XCVI. Die Fälle $p = 0$, $p' = 0$ und $p = 1$, $p' = 0$ verlangen $\sigma < 9$.

Theorem XCVII. Es giebt einen Fall, wo alle successiven adjungirten Complexe $p = 1$ haben. Dann ist die Zahl der singulären Punkte 9 und alle Singularitäten sind s, die Ordnung $n = 3s$.

Theorem XCVIII. Jede periodische fundamentale Substitution besitzt wenigstens einen anallagmatischen Complex mit $p \geqq 2$, $u \geqq 2$. Pr. F. 309.

Theorem XCIX. Wenn eine fundamentale Substitution keinen anderen anallagmatischen Singularitätencomplex besitzt, als solche mit $p = 1$, $u = 1$, so ist sie äquimultipel und hat neun Variable. Pr. F. 309.

Theorem C. Eine äquimultiple fundamentale Substitution mit mehr als acht Punkten kann nicht periodisch sein.

Beweis. Da für alle Complexe $p = \frac{(3s-1)(3s-2)}{2} - 9\frac{s(s-1)}{2} = 1$, wäre die Periodicität entgegen dem Theoreme XCVIII. Das Theorem ist verschieden vom Theoreme LXXXVI.

Singularitätencomplexe — in einer Veröffentlichung von *G. Castelnuovo* in den Memorie dell' Accad. di Torino XXXIX (1891): „Ricerche generali sopra i sistemi lineari di curve piane“ abgeleitet. Der obige Passus (aus dem Jahre 1885) wurde März 1889 in Neapel gedruckt.

Ich muss aber im Interesse der Genauigkeit noch hervorheben, dass sogar eine Ungleichung, welche *Castelnuovo* ausspricht, nicht richtig dargestellt ist. Man erkennt dies sofort, wenn man obige Formel, welche dadurch vollständiger und unverhältnissmässig werthvoller ist, dass sie die Zahl σ enthält, von welcher bei *Castelnuovo* sowie den anderen italienischen Verfassern keine Spur zu finden, mit jener zweitheiligen Ungleichheit zusammenstellt, indem die Zahl k'' (la dimensione residuale) einfach $= 9-\sigma$ ist.

Theorem CI. Jede periodische fundamentale Substitution (1.) *besitzt einen anallagmatischen Singularitätencomplex mit* $p = 1$, $u \geqq 2$, *wenn sie nicht einen anallagmatischen Singularitätencomplex mit* $p = 0$, $u = 1$ *oder* $p = 0$, $u = 2$ *besitzt.* Pr. F. 309.

Theorem CII. Wenn eine fundamentale Substitution (1.) *einen anallagmatischen Complex* $n, 0, \ldots, 0$ *zulässt, so ist sie eine Homographie d. h. Versetzung der Variablen.*

Theorem CIII. Wenn eine fundamentale Substitution (1.) *die anallagmatischen Complexe* $n, n-2s, s, \ldots, s$ *zulässt, so hat sie die Coefficienten* $a_i = m-1, 1, \ldots, 1$, *d. h. sie ist eine Substitution von de Jonquières.*

Theorem CIV. Wenn eine fundamentale Substitution (1.) *einen anallagmatischen Complex* $3s, s, s, s, s$ *oder* $3s, s, s, s, s, s$ *oder* $3s, s, s, s, s, s, s$ *oder* $3s, s, s, s, s, s, s, s$ *oder* $3s, s, s, s, s, s, s, s, s$ *gestattet, so kann sie nicht mehr als resp.* 4, 5, 6, 7, 8 *Variable* y *haben.*

Theorem CV. Jede fundamentale Substitution mit weniger als neun Variablen y_i *ist äquivalent einer äquimultiplen Substitution oder einer Homographie oder einer Substitution für eine Charakteristik mit zwei coincidenten* $(m-1)$-*fachen Punkten.* Pr. F. 309.

Theorem CVI. Wenn eine fundamentale Substitution (1.) *einen anallagmatischen Complex* 2, 1, 1 *gestattet, so hat sie nothwendig* $m = 2$ *und entspricht entweder der quadratischen Charakteristik* (aa'), (bb'), c' *in* c'_1 *in* $\ldots c$ *oder* (ab'), (ba'), c' *in* c'_1 *in* $\ldots c$.

Theorem CVII. Alle periodischen fundamentalen Substitutionen können birational äquivalent gemacht werden mit

1. *einer Homographie,* $n' = n$, $y'_k = y_i$,

2. *einer fundamentalen Substitution mit weniger als neun Variablen* y_i, *welche äquimultipel ist,*

3. *einer fundamentalen Substitution, welche die Coefficienten* a_i *gleich* $n-1, 1, 1, \ldots, 1_{2(n-1)}$ *hat oder*

4. *den fundamentalen Substitutionen mit* $m = 2$, *welche* 2, 1, 1 *als anallagmatischen Complex gestatten*).*

---

*) Unter dem arithmetischen Gesichtspunkte sind die Charakteristiken, welche nur mittelst anderer Punkte auf die Typen reducirt werden können, von einem besonderen Interesse, weil es sich um eine Vermehrung der Variablen oder um eine Erhöhung der Dimensionenzahl der bezüglichen Räume handelt, ähnlich, wie eine solche unumgänglich ist zur Entwirrung gewisser Knoten und Schleifen.

Beweis. Durch das Princip der Verminderung der adjungirten Complexe gelangt man zu m, 0, ..., 0 und $u \geqq 2$, dann müsste die Substitution direct eine Homographie sein wegen CII, oder man kommt zu $p = 0$, $u = 2$, dann müsste sie eine Homographie sein wegen VI und IX. Wenn man zu $p = 0$, $u = 1$ gelangt, ist sie äquivalent einer *Jonquières*schen Substitution mit coincidenten $(n-1)$-fachen Punkten wegen LXXXIX und CIII. Wenn man zu $p = 1$, $u > 1$ gelangt, ist sie äquivalent einer Substitution mit weniger als neun Punkten wegen XC und CIV oder einer quadratischen Substitution mit (aa'), (bb') oder (ab'), (ba') wegen XC und CVI. Wenn man direct zu einem Systeme $m = 3$, $p = 1$, $u \geqq 1$ gelangt, so ist die Charakteristik direct eine Charakteristik mit weniger als neun Punkten, und wenn man direct zu m, $m-2s$, s, ..., s gelangt, so ist die Charakteristik direct eine von *de Jonquières* mit coincidenten a, b.

Theorem CVIII. Die fundamentalen Substitutionen mit $m = 2$ *und* 3, 4, 5 *Variablen* y *oder welche den Complex* 2, 1, ..., 1 *zulassen, sind äquivalent mit Homographieen oder mit Charakteristiken von de Jonquières mit coincidenten* (ab).

Theorem CIX. Alle periodischen Substitutionen mit birationaler Matrix sind durch birationale Aequivalenz vertheilbar in nicht äquivalente Klassen, deren Repräsentanten die folgenden sind:

1. *Die Substitutionen*

$$n' = n, \quad y'_\lambda = y_{i_\lambda},$$

2. *Die Substitutionen*

$$\begin{aligned} n' &= mn-(m-1)y_1-y_2-\cdots-y_\varrho, \\ y'_{\varrho+h_i} &= n-y_i, \qquad \begin{pmatrix} i = 1, \ldots, 2(m-1); & \varrho = 2(m-1) \\ h_i = \lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_i; & \sigma = \varrho+\Sigma\lambda \end{pmatrix} \\ y'_{\varrho+h_i-1} &= y_{\varrho+h_i}, \\ y'_{\varrho+h_i-2} &= y_{\varrho+h_i-1}, \\ &\cdots\cdots\cdots \\ y'_i &= y_{\varrho+h_i+1}. \end{aligned}$$

3. *Die Substitutionen, in welche sich diejenigen mit weniger als neun Variablen* y *vertheilen lassen.*

II. Methode.

In Pr. F. IV. Th. § 7 ist die Klasse der *Jonquières*schen Charakteristiken ganz direct behandelt worden. Ebenso könnte man andere Klassen

discutiren, welche wie jene von einem oder mehreren Parametern abhängen, und man würde für jede das obige Aequivalenztheorem und ausserdem Periodicitätstheoreme finden.

Um aber Klassen birationaler Matricen herzuleiten, bediene man sich der successiven Anwendung einer willkürlichen aperiodischen Charakteristik. Die $i$te Wiederholung ist eine Matrix, welche von einem Parameter mehr abhängt als die ursprüngliche Matrix, nämlich von i. Indem man sich der neuen Matrix unter der Form einer aperiodischen Charakteristik bedient, kann man die Zahl der Parameter neuerdings um eine Einheit erhöhen. Indem man so fortfährt, gelangt man nothwendig zu einer Matrix mit $(\sigma+1)\sigma$ Parametern, welche unter Voraussetzung der nothwendigen Vorkehrungen für die Unabhängigkeit der Parameter der durch das Theorem von *Cayley-Hermite* geforderte Ausdruck ist.

III. Methode.

Im Vorhergehenden haben wir gefunden, dass eine Haupteigenschaft der periodischen Charakteristiken die ist, äquivalent zu sein mit äquimultiplen Charakteristiken oder mit solchen der Form (ab) von *de Jonquières*. Es verringert sich also die Anzahl der Variablen durch die Transposition, d. h. die linearen Substitutionen (1.) sind *zerlegbar* in lineare Substitutionen mit weniger Variablen vereinigt mit linearen Substitutionen, welche blosse Versetzungen sind, derart, dass die Variablen der zwei Arten von Substitutionen nie zusammentreten.

Die Reduction der Charakteristiken in der Zahl der Punkte drückt sich also dadurch aus, dass die entsprechenden Substitutionen *zerlegbar sind* durch Aequivalenz mittelst Substitutionen mit birationaler Matrix*). Es ist eine Folge hiervon, dass die charakteristische Function einer in der Punktzahl reducirbaren Charakteristik den Factor $x-1$ mindestens zwei Mal enthält und überhaupt stets Factoren x^i-1 haben muss.

Hieran knüpft sich die dritte Methode: Die allgemeinste und wahre Bedingung, damit eine Charakteristik in eine andere mit einer geringeren Anzahl von Punkten übertragen werden kann, ist die, dass man einen

*) Der Begriff der Zerlegbarkeit rührt, wie mir scheint, von *Kronecker* her. Er findet sich auch bei *C. Jordan, Liouv.* J. 1874 angewendet. In seinem „Traité" hat Herr *Jordan* für die lineare Gruppe den Begriff der Primarität eingeführt, der mit unserem Typenbegriffe coincidirt.

anallagmatischen Singularitätencomplex p, u finden kann, welcher durch Hinzufügung von w neuen Singularitäten zu einem Complexe $p = -w'$, $u = 0$ vervollständigt werden kann*), wo $w' \geqq w$. Denn es gilt das

*Theorem CXII. Jeder Singularitätencomplex mit $p = -w'$, $u = 0$ kann zusammengesetzt werden durch die Summation von $w'+1$ Complexen, welche $p = 0$, $u = 0$ haben und zu zwei und zwei $F_{12} = 0$ machen***), und das andere

Theorem CXIII. Wenn eine fundamentale lineare Substitution eine anallagmatische Reihe von z Complexen $p = 0$, $u = 0$ zulässt, welche paarweise $F_{12} = 0$ geben, so ist ihre Gesammtheit entweder ein Complex mit $p = 0$ oder sie kann zu einem solchen vervollständigt werden.

Wenn aber eine fundamentale lineare Substitution eine Reihe von z Complexen $p = 0$, $u = 0$ zulässt, welche periodisch unter einander transformirt werden und zu zwei und zwei $F_{12} = 0$ machen, so kann man sie als Fundamentalsystem für eine Transposition benutzen, welche die eventuell vervollständigte Substitution um z Variable y_i reducirt.

Da wir nun bereits wissen, dass Periodicität und Aperiodicität identisch sind damit, ob die Charakteristik Singularitätencomplexe $p > 1$ besitzt oder nicht, kommt alles darauf an, das Theorem zu beweisen:

Theorem CXIV. Eine Charakteristik ist entweder: 1. *äquimultipel oder* 2. *sie gestattet nur den Singularitätencomplex n, $n-2s$, s, ..., s oder* 3. *keine hiervon verschiedenen Singularitätencomplexe $p > 1$ oder* 4. *sie gestattet einen anallagmatischen Singularitätencomplex, welcher den Relationen genügt*

$$n^2 - y_1^2 - \cdots - y_\sigma^2 - y_{\sigma+1}^2 - \cdots - y_{\sigma+w}^2 = -w',$$
$$3n - y_1 - \cdots - y_\sigma - y_{\sigma+1} - \cdots - y_{\sigma+w} = -w'+1,$$

wo

$$w' \geqq w,$$

um sofort mittelst einiger Theoreme des § 4 auf das Theorem CIX zu schliessen (Pr. F. p. 312), welches die Aequivalenztheorie abschliesst***).

*) Der hier eingeführte ausserordentlich wichtige Begriff von Singularitätencomplexen, welche durch Hinzufügung neuer Singularitäten in andere Complexe von vorgeschriebenen Zahlen p, u ergänzt werden können, ist neu und findet sich namentlich in den Publicationen italienischer Verfasser über lineare Curvensysteme garnicht.

**) Dieses Theorem ist zu verallgemeinern, z. B.: Jeder Singularitätencomplex $p = \nu-1$, $u = \nu$ gestattet die Zerlegung in die Summe von $2i$ anderen, welche alle $p = 0$, $u = 2$ haben und so, dass je zwei successive $F_{12} = \nu$ geben und sie sich in Paare von gleichem n theilen.

***) Ich erwähne das arithmetisch interessante Corollar von CXIV: *Ein Singulari-*

Nachdem die Reductionstheorie bis zum Theoreme CXIV gediehen ist, entsteht nun die Aufgabe, unter den Matrixcharakteristiken die durch birationale Transposition nicht äquivalenten Typen aufzufinden, was in den nächsten Paragraphen auf Grund der Preisschrift p. 13—293 dargelegt werden soll.

§ 7.

Die quadratischen periodischen Charakteristiken und ihre Typen.

Im II. Theile der Preisschrift habe ich p. 13—177 diese Charakteristiken vollständig untersucht, und zwar habe ich, indem ich mit aa', bb', cc' die zugeordneten Hauptpunktepaare der quadratischen Transformation bezeichne, die drei wesentlich verschiedenen Directrixsubstitutionen (aa'), (bb'), (cc'); (ab'), (ba'), (cc'); (ab'), (bc'), (ca')*) nebst den daraus abgeleiteten Charakteristiken einzeln mittelst ihrer Tableaux geprüft. Das Resultat ist:

Es lässt sich ohne Zuhülfenahme der in § 6 abgeleiteten allgemeinen Aequivalenztheoreme streng nachweisen:

Alle periodischen quadratischen Charakteristiken sind die folgenden theils mit, theils ohne ganzzahligen Parameter:

1.	a' in a, b' in b, c' in c'_1 in $\ldots c'_m = c$	Index $2(m+2)$,
2.	(ab'), a' in b, c' in c'_1 in $\ldots c'_m = c$	$m+4$,
3.	(ab'), a' in a'_1 in b, c' in c'_1 in $\ldots c'_m = c$	$2(m+3)$,
4.	(cc'), a' in a'_1 in $\ldots a'_m = a$, b' in b'_1 in $\ldots b'_n = b$	$m+n+2$,
5.	(cc'), a' in a'_1 in $\ldots a'_m = b$, b' in b'_1 in $\ldots b'_n = a$	$2N$**),
6.	(cc'), (ab'), a' in a'_1 in $\ldots a'_m = b$,	$2(m+1)$,
7.	(aa'), (bb'), c' in c'_1 in $\ldots c'_m = c$	$m+2$,
8.	(ab'), (ba'), c' in $\ldots c'_m = c$	$2(m+2)$ für m gerade, $m+2$ für m ungerade,
9.	a' in b, b' in a, c' in c'_1 in $\ldots c'_m = c$	$2(m+2)$.

---

tätencomplex $3s$, s, $\ldots$, s *mit* 6, 7, 8 *Variablen* y *kann auf keinerlei Art durch neue Singularitäten zu einem Complexe mit* $p=0$, $u=1$ *oder* $p=0$, $u=2$ *vervollständigt werden.*

*) Ich bezeichne durch die Klammer (pq) immer, dass der Punkt p mit dem Punkte q zusammenfällt, und zwar sind p, q in dieser Theorie immer Fundamentalpunkte zweier verschiedenen Systeme.

**) N ist das kleinste Multiplum von $m+1$ und $n+1$.

		Index
1.	a' in a, b' in b'_1 in b, c' in c'_1 in c	12,
2.	a' in a, b' in b'_1 in b'_2 in b, c' in c'_1 in c	18,
3.	a' in a, b' in b'_1 in b'_2 in b'_3 in b, c' in c'_1 in c	30,
4.	a' in a, b' in c, c' in c'_1 in b	9,
5.	a' in a, b' in b'_1 in c, c' in c'_1 in b	12,
6.	a' in a, b' in b'_1 in c, c' in c'_1 in c'_2 in b	20,
7.	a' in a, b' in c, c' in c'_1 in c'_2 in b	14,
8.	a' in a, b' in c, c' in c'_1 in c'_2 in c'_3 in b	24,
9.	a' in a'_1 in a, b' in c, c' in c'_1 in b	14,
10.	a' in a'_1 in a, b' in c, c' in c'_1 in c'_2 in b	24,
11.	a' in b, b' in c, c' in a,	6,
12.	a' in b, b' in b'_1 in c, c' in c'_1 in a	15,
13.	(ab'), a' in a'_1 in a'_2 in b, c' in c,	12,
14.	(ab'), a' in a'_1 in a'_2 in a'_3 in b, c' in c	18,
15.	(ab'), a' in a'_1 in a'_2 in b, c' in c'_1 in c	18,
16.	(ab'), a' in a'_1 in a'_2 in a'_3 in a'_4 in b, c' in c	30,
17.	(ab'), a' in a'_1 in a'_2 in b, c' in c'_1 in c'_2 in c	30,
18.	(ab'), a' in c, c' in c'_1 in b	9,
19.	(ab'), a' in c, c' in c'_1 in c'_2 in b	14,
20.	(ab'), a' in c, c' in c'_1 in c'_2 in c'_3 in b	24,
21.	(ab'), a' in a'_1 in c, c' in c'_1 in c'_2 in b	20,
22.	(ab'), a' in a'_1 in c, c' in c'_1 in b	12,
23.	(ab'), (bc'), a' in c	5,
24.	(ab'), (bc'), a' in a'_1 in c	8,
25.	(ab'), (bc'), a' in a'_1 in a'_2 in c	12,
26.	(ab'), (bc'), a' in a'_1 in a'_2 in a'_3 in c	18,
27.	(ab'), (bc'), a' in a'_1 in a'_2 in a'_3 in a'_4 in c	30,
28.	(aa'), (bb'), (cc')	2,
29.	(ab'), (ba'), (cc')	2,
30.	(ab'), (bc'), (ca')	6,
31.	a' in b, b' in c, c' in c'_1 in c'_2 in a	18,
32.	a' in b, b' in c, c' in c'_1 in a	30,
33.	(ab'), a' in c, c' in b	12.

Theorem CXV. Diese periodischen Charakteristiken sind birational äquivalent den folgenden, welche ich als Typen bezeichnen will:

1.	Typus der Versetzung der y oder Homographie	Index willkürlich,
2.	(cc'), a' in a'_1 in $\ldots a'_m = b$, b' in $\ldots b'_n = a$	$2N$*),
3.	a' in b, b' in a, c' in c'_1 in $\ldots c'_m = c$	$2(m+2)$,
4.	(ab'), a' in c, c' in b	12,
5.	a' in b, b' in c, c' in c'_1 in c'_2 in a	18,
6.	a' in b, b' in c, c' in c'_1 in a	30,
7.	a' in b, b' in c, c' in a	6,
8.	a' in b, b' in b'_1 in c, c' in c'_1 in a	15,
9.	(ab'), a' in c, c' in c'_1 in b	9,
10.	(ab'), a' in a'_1 in c, c' in c'_1 in b	12,
11.	(ab'), a' in c, c' in c'_1 in c'_2 in b	14,
12.	(ab'), a' in a'_1 in c, c' in c'_1 in c'_2 in b	20,
13.	(ab'), a' in c, c' in c'_1 in c'_2 in c'_3 in b	24,
14.	(ab'), (bc'), a' in a'_1 in a'_2 in c	12,
15.	(ab'), (bc'), a' in a'_1 in a'_2 in a'_3 in c	18,
16.	(ab'), (bc'), a' in a'_1 in a'_2 in a'_3 in a'_4 in c	30.

Es ist also hierin eine Bestätigung des allgemeinen Aequivalenzsatzes zu erblicken.

§ 8.

Die periodischen kubischen Charakteristiken und ihre Typen.

Ebenso habe ich im III. Theile von p. 177—219 durch vollständige Discussion bewiesen:

Es ergiebt sich ohne Zuhülfenahme der in § 6 *bewiesenen allgemeinen Aequivalenztheoreme:*

Alle periodischen kubischen Charakteristiken sind die folgenden:

1.	Die Klassen (ab), b_i in b'_i in $\ldots b_i^{h_i} = a_i$	Index doppeltes kleinstes Multiplum aller h_i+1,
2.	b in b' in $\ldots b^{(m)} = a$, $(a_1 b_1)$, $(a_2 b_2)$, $(a_3 b_3)$, $(a_4 b_4)$	Index $2(m+1)$,
3.	b in a, $(a_1 b_1)$, $(a_2 b_2)$, $(a_3 b_3)$, b_4 in a_4	6,
4.	b in a, $(a_1 b_1)$, $(a_2 b_2)$, $(a_3 b_3)$, b_4 in b'_4 in a_4	10,
5.	b in a, $(a_1 b_1)$, $(a_2 b_2)$, $(a_3 b_3)$, b_4 in b'_4 in b''_4 in a_4	18,
6.	b in a, $(a_1 b_1)$, $(a_2 b_2)$, b_3 in a_3, b_4 in a_4	8,

---

*) N ist das kleinste Multiplum von $m+1$ und $n+1$.

7. b in a, (a_1b_1), (a_2b_2), b_3 in a_3, b_4 in b'_4 in a_4 Index 14,
8. b in a, (a_1b_1), b_2 in a_2, b_3 in a_3, b_4 in a_4 12,
9. b in a, (a_1b_1), b_3 in a_2, b_4 in a_3, b_2 in a_4 12,
10. b in b' in a, (a_1b_1), (a_2b_2), (a_3b_3), b_4 in a_4 10,
11. b in b' in b'' in a, (a_1b_1), (a_2b_2), (a_3b_3), b_4 in a_4 18,
12. (ab_1), b in a_1, (a_2b_2), (a_3b_3), (a_4b_4) 6,
13. (ab_1), b in a_1, (a_2b_2), (a_3b_3), b_4 in a_4 8,
14. (ab_1), b in a_1, (a_2b_2), (a_3b_3), b_4 in b'_4 in a_4 14,
15. (ab_1), b in a_1, (a_2b_2), b_3 in a_3, b_4 in a_4 12,
16. (ab_1), b in b' in a_2, (a_1b_3), b_2 in a_3, (a_4b_4) 12,
17. (ab_1), b in b' in a_1, (a_2b_2), (a_3b_3), (a_4b_4) 10,
18. (ab_1), b in b' in a_1, (a_2b_3), (a_3b_4), (a_4b_2) 18,
19. (ab_1), b in b' in a_1, (a_2b_2), (a_3b_3), b_4 in a_4 14,
20. (ab_1), (ba_1), (a_2b_2), (a_3b_3), (a_4b_4) 4,
21. (ab_1), (ba_1), (a_2b_2), (a_3b_3), b_4 in a_4 6,
22. (ab_1), (ba_1), (a_2b_2), (a_3b_3), b_4 in b'_4 in a_4 10,
23. (ab_1), (ba_1), (a_2b_2), (a_3b_3), b_4 in b'_4 in b''_4 in a_4 18,
24. (ab_1), (ba_1), (a_2b_2), b_3 in a_3, b_4 in a_4, 8,
25. (ab_1), (ba_1), (a_2b_2), b_3 in a_3, b_4 in b'_4 in a_4 14,
26. (ab_1), (ba_1), b_2 in a_2, b_3 in a_3, b_4 in a_4 12,
27. (ab_1), (ba_1), b_3 in a_2, b_4 in a_3, b_2 in a_4 12,
28. b in a_1, b_1 in a, (a_2b_2), (a_3b_3), (a_4b_4) 6,
29. b in a_1, b_1 in a, (a_2b_3), (a_3b_4), (a_4b_2) 6,
30. b in a_1, b_1 in a, (a_2b_3), (a_3b_4), b_2 in a_4 12,
31. b in b' in a_1, b_1 in a, (a_2b_2), (a_3b_3), (a_4b_4) 12,
32. b in b' in a_1, b_1 in a, (a_2b_3), (a_3b_4), (a_4b_2) 12,
33. b_1 in a, b in a_2, (a_1b_3), (a_3b_2), b_4 in a_4 10,
34. b_1 in a, b in a_1, (a_2b_2), (a_3b_3), b_4 in a_4 30.

Theorem CXVI. Diese Charakteristiken sind sämmtlich mittelst quadratischer Transpositionen äquivalent den folgenden Typen, wobei die Homographie und die quadratischen Typen bei Seite gelassen werden:

1. (ab), b_i in $b'_i \dots b_i^{h_i} = a_i$ Index doppeltes kleinstes Multiplum aller h_i+1,
2. (ab_1), (ba_1), (a_2b_2), (a_3b_3), (a_4b_4) Index 4,
3. (ab_1), (ba_1), (a_2b_2), (a_3b_3), b_4 in a_4 6,
4. (ab_1), (ba_1), (a_2b_2), (a_3b_3), b_4 in b'_4 in a_4 10,

5. (ab_1), (ba_1), (a_2b_2), (a_3b_3), b_4 in b_4' in b_4'' in a_4 Index 18,
6. (ab_1), (ba_1), (a_2b_2), b_3 in a_3, b_4 in a_4 8,
7. (ab_1), (ba_1), (a_2b_2), b_3 in a_3, b_4 in b_4' in a_4 14,
8. (ab_1), (ba_1), b_2 in a_2, b_3 in a_3, b_4 in a_4 12,
9. (ab_1), (ba_1), b_2 in a_3, b_3 in a_4, b_4 in a_2 12,
10. b in a_1, b_1 in a, (a_2b_2), (a_3b_3), (a_4b_4) 6,
11. b in a_1, b_1 in a, (a_2b_3), (a_3b_4), (a_4b_2) 6,
12. b in a_1, b_2 in a, (a_2b_3), (a_3b_1), b_4 in a_4 10,
13. b_1 in a, b in b' in a_1, (a_2b_2), (a_3b_3), (a_4b_4) 12,
14. b_1 in a, b in b' in a_1, (a_2b_3), (a_3b_4), (a_4b_2) 12,
15. b in a_1, b_1 in a, (a_2b_2), (a_3b_3), b_4 in a_4 30.

§ 9.

Die periodischen biquadratischen Charakteristiken und ihre Typen.

Im zweiten Abschnitte des III. Theiles Pr. F. habe ich ebenfalls die Reductibilität über die Periodicität gestellt. Es sind daher nicht mehr alle periodischen Charakteristiken untersucht worden, sondern nur jene, welche nicht auf Homographieen, quadratische oder kubische Typen reductibel sind, und für sie gilt:

Theorem CXVII. Alle periodischen biquadratischen Charakteristiken sind mittelst quadratischer Transformationen übertragbar in Charakteristiken der §§ 7, 8 *oder in*

1. (ab), b_i in $b_i' \dots b_i^{h_i} = a_i$ Index doppeltes kleinstes Multiplum aller h_i+1,
2. $(d_1\varepsilon_2)$, $(d_2\varepsilon_3)$, $(d_3\varepsilon_1)$, $(e_2\delta_1)$, $(e_3\delta_2)$, $(e_1\delta_3)$ Index 3,
3. $(d_1\varepsilon_2)$, $(d_2\varepsilon_3)$, $(d_3\varepsilon_1)$, $(e_2\delta_1)$, $(e_3\delta_2)$, δ_3 in e_1 6,
4. $(d_1\varepsilon_2)$, $(d_2\varepsilon_3)$, $(d_3\varepsilon_1)$, $(e_2\delta_1)$, $(e_3\delta_2)$, δ_3 in δ_3' in e_1 12,
5. $(d_1\varepsilon_2)$, $(d_2\varepsilon_3)$, $(e_2\delta_1)$, $(e_3\delta_2)$, ε_1 in d_3, δ_3 in e_1 9,
6. $(d_1\varepsilon_2)$, $(d_2\varepsilon_3)$, $(e_2\delta_1)$, $(e_3\varepsilon_1)$, δ_3 in d_3, δ_2 in e_1 8,
7. (ab_1), (ba_1), (a_2b_2), (a_3b_3), (a_4b_4), (a_5b_5), (a_6b_6) 6,
8. (ab_1), (ba_1), (a_2b_2), (a_3b_3), (a_4b_4), (a_5b_5), b_6 in a_6 10.

Hierbei sind mit d_1, d_2, d_3, e_1, e_2, e_3; δ_1, δ_2, δ_3, ε_1, ε_2, ε_3 die Fundamentalsysteme und zwar mit $d_i\varepsilon_i$, $\delta_i e_i$ je Paare conjugirter Fundamentalpunkte bezeichnet.

Es bleiben unter Bezug auf das Aequivalenztheorem noch 25 von den 30 möglichen Fundamentalsystemen mit weniger als neun Punkten zu

discutiren, wofür ich auf die Preisschrift verweise. Der Leser findet die sich ergebenden 15 Typen in der Tabelle des § 10 angegeben.

§ 10.

Das Aequivalenztheorem für die periodischen Charakteristiken.

1. Das Theorem CIX über die linearen Substitutionen (1.) und die in den §§ 7, 8, 9 berichteten Discussionen setzen uns nunmehr in den Stand, die als im Grade irreductibel befundenen und als nicht äquivalent erwiesenen Typen zusammenzustellen. Vorher sollen jedoch zwei Methoden angegeben werden, um für eine solche Charakteristik die charakteristische Function $|A-xE|$ der zugehörigen fundamentalen linearen Substitution, die in dieser Arbeit eingeführt wurde, zu berechnen.

1. Methode. Die Zahlen $m-\nu$ des Theoremes LXXIV kann man leicht aus der Tafel II meiner Preisschrift ablesen, mittelst ihrer dann durch die *Euler*schen Relationen die symmetrischen Functionen der Wurzeln x und damit die Coefficienten der charakteristischen Function berechnen.

2. Methode. Mittelst der Tafel I meiner Preisschrift kann man die successiven Transformationen verfolgen und die Wurzeln dieser als Potenzen der Wurzeln der Ausgangscharakteristik berechnen. Nun kennt man aber beinahe a priori die charakteristischen Functionen und die Wurzeln selbst für die internen Charakteristiken, welche die Indices 2, 3, 4, 5 besitzen, und hieraus findet sich mittelst einer raschen Discussion, in welcher Weise sich die Function aus irreductiblen Factoren zusammensetzt.

So sind die charakteristischen Functionen des folgenden Theoremes berechnet worden.

Theorem CXVIII. Alle Charakteristiken aus birationalen Transformationen oder also alle fundamentalen linearen Substitutionen (1.), *welche periodisch sind, sind transponirbar mittelst quadratischer Transpositionen auf die folgenden typischen oder Stammformen:*

1. *Die Homographieen, welche sich also durch eine supponirte Versetzung oder Permutation unter einer endlichen Anzahl von Punkten ausdrücken,*

2. *Die Charakteristiken von Jonquières mit zwei coincidenten* $(n-1)$-*fachen und verketteten conjugirten einfachen Punkten, also* (ab), b_i *in* $b'_i \ldots$ *in* $b_i^{h_i} = a_i$, *jedoch im allgemeinen zusammen mit einer willkürlichen Zahl willkürlicher homographischer Cyklen unter fremden Punkten,*

3. ***Die folgenden* 48 *isolirten Typen und alle daraus durch Hinzufügung fremder homographischer Cyklen abgeleiteten Klassen***

I_6 — b' in c, c' in a, a' in b — $(x-1)(x^2-x+1)^2(x^2+x+1)$,

II_9 — (ab'), a' in c, c' in c_1' in b — $(x-1)(x^6+x^3+1)$,

III_{12} — (ab'), (bc'), a' in a_1' in a_2' in c — $(x-1)(x^4-x^2+1)(x^2+x+1)$,

IV_{14} — (ab'), a' in c, c' in c_1' in c_2' in b — $(x-1)(x^7+1)$,

V_{12} — (ab'), a' in a_1' in c, c' in c_1' in b — $(x^2-1)(x^2-x+1)(x^4-x^2+1)$,

VI_{18} — (ab'), (bc'), a' in a_1' in a_2' in a_3' in c — $(x^2-1)(x^6-x^3+1)$,

VII_{15} — b' in c, c' in c_1' in a, a' in a_1' in b — $(x-1)(x^8-x^7+x^5-x^4-x^3-x+1)$,

VIII_{20} — (ab'), a' in a_1' in c, c' in c_1' in c_2' in b — $(x-1)(x^8-x^6+x^4-x^2+1)$,

IX_{24} — (ab'), a' in c, c' in c_1' in c_2' in c_3' in b — $(x-1)(x^8-x^4+1)$,

X_{30} — (ab'), (bc'), a' in a_1' in a_2' in a_3' in a_4' in c — $(x-1)(x^8+x^7-x^5-x^4-x^3+x+1)$,

(XI_{12}) — (ab'), a' in c, c' in b — $(x-1)(x^2-x+1)(x^2+1)(x+1)$,

(XII_{18}) — b' in c, c' in a, a' in a_1' in a_2' in b — $(x-1)(x^6-x^3+1)(x^2-x+1)$,

(XIII_{30}) — b' in c, c' in a, a' in a_1' in b — $(x^2-1)(x^2-x+1)(x^4-x^3+x^2-x+1)$,

XIV_6 — (ab_1), (ba_1), (a_2b_2), (a_3b_3), b_4 in a_4 — $(x^2-1)(x+1)(x^2-x+1)^2$,

XV_6 — b_1 in a, b in a_1, (a_2b_2), (a_3b_3), (a_4b_4) — $(x-1)(x^2-x+1)^2(x+1)^3$,

XVI_6 — b_1 in a, b in a_1, (a_2b_3), (a_3b_4), (a_4b_2) — $(x-1)(x+1)(x^2-x+1)^2$,

XVII_{10} — b_1 in a, b in a_2, (a_1b_3), (a_3b_2), b_4 in a_4 — $(x-1)(x^4-x^3+x^2-x+1)^2$,

XVIII_{12} — (ab_1), (ba_1), b_3 in a_4, b_4 in a_2, b_2 in a_3 — $(x-1)(x^4-x^2+1)^2$,

(XIX_{12}) — b_1 in a, b in b' in a_1, (a_2b_2), (a_3b_3), (a_4b_4) — $(x-1)(x^2-x+1)^2(x^2+1)^2$,

(XX_{12}) — b_1 in a, b in b' in a_1, (a_2b_3), (a_3b_4), (a_4b_2) — $(x-1)(x^4-x^2+1)(x^2-x+1)^2$,

(XXI_{12}) — (ab_1), (ba_1), b_2 in a_2, b_3 in a_3, b_4 in a_4 — $(x-1)(x^4-x^2+1)(x^2+1)^2$,

(XXII_8) — (ab_1), (ba_1), (a_2b_2), b_3 in a_3, b_4 in a_4 — (x^8-1),

(XXIII_{10}) — (ab_1), (ba_1), (a_2b_2), (a_3b_3), b_4 in b_4' in a_4 — $(x-1)(x+1)^3(x^4-x^3+x^2-x+1)$,

(XXIV_{18}) — (ab_1), (ba_1), (a_2b_2), (a_3b_3), b_4 in b_4' in b_4'' in a_4 — $(x-1)(x^6-x^3+1)(x+1)^2$,

(XXV_{30}) — b_1 in a, b in a_1, (a_2b_2), (a_3b_3), b_4 in a_4 — $(x-1)(x^2-x+1)(x+1)^2(x^4-x^3+x^2-x+1)$,

(XXVI_{14}) — (ab_1), (ba_1), (a_2b_2), b_3 in a_3, b_4 in b_4' in a_4 — $(x^2-1)(x^7+1)$,

XXVII_3 — $(d_1\varepsilon_2)$, $(d_2\varepsilon_3)$, $(d_3\varepsilon_1)$, $(e_1\delta_2)$, $(e_2\delta_3)$, $(e_3\delta_1)$ — $(x-1)(x^2+x+1)^3$,

XXVIII_8 — $(d_1\varepsilon_2)$, $(d_2\varepsilon_3)$, $(e_3\varepsilon_1)$, $(e_2\delta_1)$, δ_2 in e_1, δ_3 in d_3 — $(x-1)(x^4+1)^2$,

XXIX_6 — $(d_1\varepsilon_2)$, $(d_2\varepsilon_3)$, $(d_3\varepsilon_1)$, $(e_1\delta_2)$, $(e_2\delta_3)$, δ_1 in e_3 — $(x^2-1)(x^2-x+1)(x^2+x+1)^2$,

(XXX$_9$) $(d_1\varepsilon_2)$, $(d_2\varepsilon_3)$, $(d_3\varepsilon_1)$, $(e_1\delta_2)$, δ_3 in e_2, δ_1 in e_3
$(x-1)(x^6+x^3+1)(x^2+x+1)$,

(XXXI$_{12}$) $(d_1\varepsilon_2)$, $(d_2\varepsilon_3)$, $(d_3\varepsilon_1)$, $(e_1\delta_2)$, $(e_2\delta_3)$, δ_1 in δ_1' in e_3
$(x-1)(x^4-x^2+1)(x^2-x+1)(x+1)^2$,

(XXXII$_6$) (ab_1), (ba_1), (a_2b_2), (a_3b_3), (a_4b_4), (a_5b_5), (a_6b_6)
$(x-1)(x^2-x+1)(x+1)^5$,

(XXXIII$_{10}$) (ab_1), (ba_1), (a_2b_2), (a_3b_3), (a_4b_4), (a_5b_5), b_6 in a_6
$(x-1)(x^4-x^3+x^2-x+1)(x+1)^4$,

XXXIV$_4$ $(c\alpha_1)$, $(a_1\gamma)$, $(b_1\beta_1)$, $(b_2\alpha_2)$, $(b_3\alpha_3)$, $(a_2\beta_2)$, $(a_3\beta_3)$
$(x^2-1)(x^2+1)^2(x+1)^2$,

XXXV$_6$ γ_1 in c_1, $(b_1\alpha_2)$, $(b_2\alpha_3)$, $(b_3\alpha_1)$, $(a_1\beta_2)$, $(a_2\beta_3)$, $(a_3\beta_1)$
$(x-1)(x^2-x+1)^4$,

XXXVI$_6$ γ_1 in c_1, $(b_1\alpha_2)$, $(b_2\alpha_3)$, $(b_3\alpha_1)$, $(a_1\beta_1)$, $(a_2\beta_2)$, $(a_3\beta_3)$
$(x-1)(x^2-x+1)^3(x+1)^2$,

XXXVII$_6$ γ_1 in c_1, $(b_1\alpha_1)$, $(b_2\alpha_2)$, $(b_3\alpha_3)$, $(a_1\beta_1)$, $(a_2\beta_2)$, $(a_3\beta_3)$
$(x-1)(x^2-x+1)^2(x+1)^4$,

(XXXVIII$_8$) $(c\alpha_1)$, γ in a_1, $(b_1\beta_1)$, $(b_2\alpha_2)$, $(b_3\alpha_3)$, $(a_2\beta_2)$, $(a_3\beta_3)$
$=(c\alpha_1)$, $(a_1\gamma)$, β_1 in b_1, $(b_i\alpha_i)$, $(a_i\beta_i)=(c\alpha_1)$, $(a_1\gamma)$, $(b_1\beta_1)$,
α_2 in b_2, $(b_3\alpha_3)$, $(a_2\beta_2)$, $(a_3\beta_3)$ $(x-1)(x^4+1)(x+1)^4$,

XXXIX$_8$ γ_1 in c_1, $(c_2\beta_1)$, $(a\gamma_2)$, $(b_1\alpha)$, $(b_2\beta_3)$, $(b_3\beta_4)$, $(b_4\beta_2)$
$(x-1)(x^2-x+1)^2(x^2+x+1)^2$,

(XL$_6$) $(a_1\delta)$, $(b\beta_1)$, $(a_2\beta_2)$, $(a_3\beta_3)$, $(a_4\beta_4)$, $(c_1\alpha_1)$, $(c_2\alpha_2)$, $(c_3\alpha_3)$
$(x-1)(x^2+x+1)^2(x+1)^4$,

XLI$_5$ $(d\alpha_1)$, $(a_1\delta)$, $(b_1\beta_2)$, $(c_1\beta_1)$, $(b_3\gamma_1)$, $(b_2\beta_3)$, $(c_2\alpha_2)$, $(a_2\gamma_2)$
$(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)^2$,

(XLII$_{12}$) γ_1 in c_1, $(c_2\alpha)$, $(a\gamma_2)$, $(b_1\beta_2)$, $(b_2\beta_3)$, $(b_3\beta_4)$ $(b_4\beta_1)$
$(x-1)(x^2-x+1)(x^2+1)(x+1)^2$,

XLIII$_2$ $(c_i\gamma_i)$, $(i=1,\dots,7)$ $(x-1)(x+1)^7$,

(XLIV$_6$) $(c_1\gamma_1)$, $(c_2\gamma_2)$, $(c_3\gamma_3)$, $(c_4\gamma_4)$, $(c_5\gamma_5)$, $(c_6\gamma_6)$, γ_7 in c_7
$(x-1)(x+1)^6(x^2-x+1)$,

XLV$_4$ $(b_1\delta_1)$, $(b_2\delta_2)$, $(b_3\delta_3)$, $(c_1\gamma_1)$, $(c_2\gamma_2)$, $(c_3\gamma_3)$, $(d\beta)$, $(e\alpha)$ $(x-1)(x^2+1)^4$,

(XLVI$_4$) $(e_1\gamma_1)$, $(e_2\alpha)$, $(c_1\gamma_2)$, $(b\delta_1)$, $(c_2\delta_2)$, $(c_3\delta_3)$, $(c_4\delta_4)$, $(c_5\delta_5)$
$(x-1)(x^2+1)^2(x+1)^4$,

XLVII$_3$ $(f\gamma)$, $(e_1\delta_2)$, $(e_2\delta_3)$, $(e_3\delta_1)$, $(c\eta)$, $(d_1\varepsilon_2)$, $(d_2\varepsilon_3)$, $(d_3\varepsilon_1)$
$(x-1)(x^2+x+1)^4$,

XLVIII$_2$ $(f_i\eta_i)$, $(i=1,\dots,8)$ $(x-1)(x+1)^8$.

Anmerkung. Ich habe in meiner ersten Tafel, die ich auf p. 313 der Preisschrift gegeben habe, diese 48 Typen der Reihe nach B_6, B_9, B_{12}, B_{14}, B'_{12}, B_{18}, B_{15}, B_{20}, B_{24}, B_{30}, (B_{12}), (B_{18}), (B_{30}), Γ_6, Γ'_6, Γ''_6, Γ_{10}, Γ_{12}, $(\Gamma_{12})'$, $(\Gamma_{12})''$, $(\Gamma_{12})'''$, (Γ_8), (Γ_{10}), (Γ_{18}), (Γ_{30}), (Γ_{14}), Δ_3, Δ_8, Δ_6, (Δ_9), (Δ_{12}), (Δ_6^1), (Δ_{10}^1), E_4, E_6, E'_6, E''_6, $(E_8)_{1,2,3}$, H_6, (H_6^1), Z_5, (H_{12}), Θ_2, (Θ_6), I_4, (K_4), N_3, Σ_2 genannt, wo die Stellung des Buchstabens im griechischen Alphabete zugleich die Ordnung der Charakteristik, der untere Index den Periodicitätsindex bezeichnet.

2. In der Tafel IV Pr. F. sind für die Typen die drei Zahlen i, v, $m-\nu$ gegeben und hiermit hat man ein Mittel, um sofort zu entscheiden, welchem dieser Typen die gegebene Charakteristik mit acht Punkten äquivalent ist.

3. Wenn der Index gleich 2 ist, was man durch den blossen Anblick erkennt, kann man sogar die Zahlen $m-\nu$ und v durch eine allgemeine Formel ausdrücken.

Wenn die Anzahl der Punkte > 8, so findet man für die involutorischen Homographieen (Versetzungen des Index 2 unter den σ Punkten), die Charakteristiken (ab), $(a_i b_i)$, die Charakteristik XLIII_2 und XLVIII_2, jedesmal bereichert um z_2 involutorische Paare und δ Doppelpunkte

$$\begin{array}{llll}
\text{I.} & \sigma = 2z_2+\delta, & \text{II.} & \sigma = 2n-1+2z_2+\delta, \\
 & v = 1+z_2+\delta, & & v = 2+z_2+\delta, \\
 & m-\nu = 1+\delta, & & m-\nu = 4-2n+\delta, \\
\text{III.} & \sigma = 7+2z_2+\delta, & \text{IV.} & \sigma = 8+2z_2+\delta, \\
 & v = 1+z_2+\delta, & & v = 1+z_2+\delta, \\
 & m-\nu = -6+\delta, & & m-\nu = -7+\delta.
\end{array}$$

Es zeigt sich, dass die Zahlentripel σ, v, $m-\nu$ in verschiedenen dieser Systeme gleichzeitig erscheinen können, dass aber die Hinzunahme von F_1, F_2 die Zweideutigkeit aufhebt.

4. Für den Index 3 hat man nur die Homographie, dann XXVII_3 und XLVII_3 in Betracht zu ziehen mittelst der Formeln

$$\begin{array}{llllll}
\text{I.} & \sigma = 3z_3+\delta, & \text{II.} & \sigma = 6+3z_3+\delta, & \text{III.} & \sigma = 8+3z_3+\delta, \\
 & v = 1+z_3+\delta, & & v = 1+z_3+\delta, & & v = 1+z_3+\delta, \\
 & m-\nu = 1+\delta, & & m-\nu = -2+\delta, & & m-\nu = -3+\delta.
\end{array}$$

5. Für 4 kommen XXXIV_4, XLV_4, XLVI_4, die Typen (ab), die involutorischen Typen mit Hinzunahme von vierpunktigen Cyklen in Betracht.

Ich habe für die sämmtlichen Indices die Typen, zwischen welchen die Entscheidung zu fällen ist, zusammengestellt. Pr. F. p. 320.

II. Theil. Constructionsmethoden für die Typen. Die nicht äquivalenten Klassen periodischer Transformationen.

§ 1.

Ueber Constructibilität.

Indem wir nun dazu übergehen, die gefundenen periodischen Charakteristiken und ihre Stammformen in der Ebene wirklich zu construiren, was denselben Werth hat als ihre algebraischen Formeln $x'_1 : x'_2 : x'_3 = f_1(x) : f_2(x) : f_3(x)$ aufzustellen, begegnen wir einer merkwürdigen Erscheinung, über welche einige Worte zu sprechen sind. Die willkürliche Combination von Charakteristiken kann nämlich zu solchen führen, welche zwar periodisch sind, aber dennoch nicht zu wirklich existirenden Transformationen gehören, sie sind unconstruirbar oder illusorisch. Die Frage nach der Construirbarkeit einer Charakteristik ist übrigens ganz unabhängig von der Periodicität, und der Grund für die Nichtconstruirbarkeit kann sein: 1. Die Theile der Charakteristik sind nicht von einander unabhängig, einige der Verkettungen sind unverträglich mit anderen, indem jene als nothwendige Consequenz diesen widersprechende Verkettungen nach sich ziehen z. B. (XIII_{30}). 2. Fügt man einer constructiblen Charakteristik homographische Cyklen von Indices hinzu, welche dem Hauptindex widersprechen, so entsteht gewiss eine inconstructible Charakteristik. 3. Es können unter den Punkten eines und desselben Fundamentalsystemes mit Bezug auf das andere solche Relationen bestehen, welche geometrisch gewisse Coincidenzen und Verkettungen unmöglich machen. Dieser Fall ist nur möglich für Fundamentalsysteme, deren Ordnung > 2. So entsteht also das neue und eigentlich geometrische Problem:

Die sämmtlichen existirenden und geometrisch construirbaren periodischen Transformationen in nicht äquivalente Klassen einzutheilen.

Hier ist zu bemerken, dass jede Uebertragung einer construirbaren Charakteristik mittelst successiver quadratischer Transformationen wieder eine construirbare Charakteristik ist und dass man aussprechen kann:

Theorem I. Wenn in einer Klasse von Charakteristiken eine einzige

unconstruirbar ist, so sind alle Charakteristiken der Klasse unconstruirbar; wenn eine einzige construirbar ist, so sind alle construirbar.

Es ist also nur nothwendig, die construirbaren Typen zu bestimmen, um das ganze Problem der Klassen construirbarer (periodischer) Transformationen gelöst zu haben. Dies ist diejenige Behandlungsweise, auf welcher sich meine Preisschrift aufbaut. Eine andere directe Methode für die Transformationen ist durch meine Noten in den C. R. vom 5. Januar und 9. Februar 1885 geliefert. Ich erwähne noch:

Theorem II. Wenn eine Charakteristik construirbar sein soll, so müssen alle durch die uneigentlichen Gruppen verlangten Relationen geometrisch erfüllbar sein.

§ 2.

Correspondenzen (1, 1) in elliptischen Curven.

Es war zum ersten Male in meiner Preisschrift, dass in vollständiger Weise, nämlich auch für die Curven mit singulärem Modul diese Correspondenzen in den geometrischen Gebrauch eingeführt worden sind und ihre grosse Wichtigkeit klar gemacht wurde, und bis heute ist es die einzige geometrische Anwendung, die davon gemacht worden ist*).

Da es mir hier nicht auf Einförmigkeit der Methode ankommt, so werde ich die Symbolik der elliptischen Parameter zur Untersuchung des elliptischen Gebietes verwenden. Die Correspondenzen sind

$$(1.)\qquad u'+ru \equiv \gamma,$$

wo in der C_3 mit willkürlichem Modul $r=\pm 1$ sein muss, in der harmonischen C_3, welche ich C_h nenne, $r=i$ und in der äquianharmonischen C_3, welche ich C_a nenne, $r=\pm\varepsilon$ sein muss, wo $\varepsilon^3=1$. Die Berechnung der Doppelpunkte liefert sofort:

Theorem III. Wenn eine Transformation unter den Punkten der Ebene eine Curve dritter Ordnung $p=1$ *reproducirt, indem sie daselbst eine eindeutige Correspondenz mit* 0, 1, 2, 3, 4 *Doppelpunkten hervorbringt, so wird die*

*) Cf. überdies dieses Journal Bd. 95: „Ueber eine eindreideutige Abbildung einer Fläche dritter Ordnung“ und in den Atti dell' Accademia di Torino 1893 vom 19. November meine Note: „Les correspondances dans les courbes elliptiques déduites géométriquement“ nebst der meine Priorität bezüglich der geometrischen Behandlung anerkennenden Vorbemerkung von Herrn *C. Segre.*

Correspondenz bezüglich sein

$$u'-u \equiv \gamma; \quad u'+\varepsilon u \equiv \gamma, \quad u'+iu \equiv \gamma, \quad u'-\varepsilon u \equiv \gamma, \quad u'+u \equiv \gamma,$$

und die C_3 muss im zweiten und vierten Falle äquianharmonisch, im dritten Falle harmonisch sein.

Von diesem Theoreme wird die grösste Anwendung gemacht.

Theorem IV. Für jede Correspondenz existirt ein ∞^2 System von quadratischen Transformationen, welche diese Correspondenz als Bestandtheil enthalten.

Beweis. Sollen a, a' zwei gepaarte Hauptpunkte sein, so muss

$$a+u_1+u_2 \equiv 0,$$
$$a'+u_1'+u_2' \equiv 0$$

sein, woraus $ra+a' \equiv -2\gamma$ folgt, und da der Schnittpunkt von $b'c'$ mit C_3 dem Punkte a entsprechen muss, so ist $-(b'+c')+ra \equiv \gamma$, oder insgesammt $a'+b'+c' \equiv -3\gamma$ und $a+b+c \equiv 3\gamma$, welches die hinreichenden Bedingungen sind. Zugleich folgt:

Theorem V. In allen Fällen existirt zwischen den Hauptpunkten und den Schnittpunkten der gegenüberliegenden Hauptgeraden mit C_3 eine Correspondenz $u'-u \equiv \gamma$.

Theorem VI. Zwischen zwei gepaarten Hauptpunkten existirt eine Correspondenz, die stets von derselben Art ist, wie die gegebene Correspondenz, aber so, dass die Doppelpunkte die Tangentialpunkte der Doppelpunkte der gegebenen Correspondenz sind, also $\gamma' \equiv -2\gamma$. Ausserdem habe ich bewiesen*):

Theorem VII. Für jede der fünf Correspondenzen bilden die ∞^2 quadratischen Transformationen ein Netz, also ein System, wo durch ein beliebiges Punktepaar der Ebene eine einzige Transformation bestimmt ist.

Dieselben Rechnungen müssen mittelst der Parameter für C_3^3 durchgeführt werden und dies um so mehr, als diese Curve die am häufigsten in den Typen auftretende invariante kubische Curve ist. Es lässt sich überdies für jede birationale Transformation aussprechen:

Theorem VIII. Durch Auflösung linearer Congruenzen mit irrationalen und complexen Moduln kann man für jede birationale Charakteristik die Lage der Punkte in einer Curve C_3 berechnen, welche sämmtliche durch die Charakteristik ausgedrückten und geforderten geometrischen Relationen befriedigt.

*) Man vergl. die vorerwähnte Note.

Und umgekehrt:

Theorem IX. Wenn für keine der sechs Correspondenzen die linearen Congruenzen zu einer eigentlichen Charakteristik von σ Punkten führen, so ist die Charakteristik geometrisch überhaupt nicht construirbar.

Man beweist diesen letzteren Satz zuerst für $\sigma < 9$ und dann durch Uebertragung für beliebige σ.

Ich werde die Rechnung für einige Fälle bis auf die Angabe der Parameterwerthe durchführen, während sie in Pr. F. für alle Typen geführt ist.

§ 3.

Einige Constructionsmethoden für quadratische Charakteristiken.

1. XI_{12}, XII_{18}, XIII_{30} besitzen in a, b zwei uneigentliche und daher noch zwei eigentliche Doppelpunkte d_1, d_2. Unter den Nachbarpunkten jedes derselben entsteht eine Projectivität, welche die drei Paare da, da'; db, db'; dc, dc' enthält. Diese liefern aber hier ersichtlich ein Quadrupel successiver Strahlen.

Theorem X. In allen drei Fällen ist die Verwandtschaft unter den zwei Doppelpunkten d_1, d_2 eine Inversion, welche den Punkt $a'a$, $c'c$ als Centrum und den Kegelschnitt, der $a'a$, $c'c$ in a, c' berührt und durch $(a'c', ac)$ geht, als Directrix hat.

Es ist nun der Ort des Punktes d so zu finden, dass die vorhin erwähnte Projectivität periodisch wird, und zwar wird bewiesen, dass für XIII_{30} der eine Doppelpunkt den Index 30, der andere den Index 5 haben muss. Der Ort für d_1 besteht somit*) aus vier Kegelschnitten $R(\varepsilon_{30})$, $R(\varepsilon_{30}^7)$, $R(\varepsilon_{30}^{11})$, $R(\varepsilon_{30}^{13})$ und jener für d_2 aus zwei Kegelschnitten $R(\varepsilon_5)$, $R(\varepsilon_5^2)$. Diese, durch die Inversion übertragen, liefern zwei neue Kegelschnitte und hiermit durch den Schnitt mit $R(\varepsilon_{30})$, ... acht Punkte, indem sich ergiebt, dass jeder $R(\varepsilon_5)$ mit zwei $R(\varepsilon_{30})$ verbunden ist, nämlich $R(\varepsilon_{30})$ und $R(\varepsilon_{30}^{11})$ gehören zu $R(\varepsilon_{30}^6)$.

Theorem XI. Das Problem der d_i löst sich also mittelst quadratischer Gleichungen und ausserdem für XII_{18} *einer kubischen und für* XIII_{30} *einer biquadratischen Gleichung.*

---

*) Cf. *S. Kantor:* „Ueber die allgemeinsten linearen Systeme linearer Transformationen bei Coincidenz der Träger und successiver Anwendung der Transformation". Wiener Denkschriften Bd. XL.

2. In den erwähnten drei Charakteristiken hängt die Periodicität von einem einzigen eingeschalteten Punkte ab. Also:

Problem. Es sind die Hauptpunkte a', (ab'), (bc'), c gegeben, man verlangt, den Punkt a'_1 so zu construiren, dass a'_m auf den Punkt c fällt. Allgemeiner ist die Verwandtschaft zwischen a'_1 und a'_m zu suchen).*

Ich werde hier nur die Verwandtschaft für $m=2$ herleiten. Den Geraden des Systemes a'_m entsprechen die Curven Ψ eines Netzes von a'_1, und ich werde mich der drei Constituenten bedienen, welche den Geraden $b'c'$, $c'a'$, $a'b'$ entsprechen, um die Singularitäten der Curven Ψ zu prüfen.

$$\left.\begin{array}{ll} b'a' & b'a'+ac+bc \\ b'c' & b'c'+ab+ac \end{array}\right\} \text{ im Büschel } ac+B_2.$$

Die B_2 berühren in a, b die Geraden $a'a$, $c'c$.

$$\left.\begin{array}{ll} c'b' & c'b'+ac+ab \\ c'a' & c'a'+cb+ab \end{array}\right\} \text{ im Büschel } ab+C_2.$$

Die C_2 gehen durch c und $\delta=(a'c', ac)$ und berühren in c' die Gerade $b'c'$.

$$\left.\begin{array}{ll} a'b' & a'b'+bc+ac \\ a'c' & a'c'+bc+ab \end{array}\right\} \text{ im Büschel } bc+A_2.$$

Die A_2 gehen durch a' und δ und berühren in b' die Gerade $b'c$. Also:

Den Geraden des Systemes a'_2 entsprechen C_3, welche durch δ gehen und in (ab'), (bc') die Geraden $b'c'$, $c'c$ berühren.

Die Verwandtschaft $[a'_2-a'_1]$ ist $(1, 3)$. Es giebt drei Punkte a'_1, welche $a'_2=c$ machen, von denen einer δ ist. Die zwei anderen sind in der Geraden $(a'c, ab)\delta$ und sind imaginär, wenn $a'ac'c$ reell sind.

Mit einem dieser zwei Punkte a'_1 kann man nun eine Transformation XI_{12} vervollständigen. Die Constructionen für $a'_3=c$, $a'_4=c$ finden sich Pr. F. p. 151.

§ 4.

Die Transformationen I_6, II_9, III_{12}, XXVII_3.

1. *Die Transformation* I_6. Der Directionskegelschnitt für aa' geht durch $k=(ac, a'b)$, $\alpha=(a'c, ab')$ und berührt $a'b$ in a', ac' in α, und die Tangenten in a, a' schneiden sich auf der Geraden, welche $(ak, a'\alpha)$, $(a'k, a\alpha)$

*) Dieses Problem ist eine Verallgemeinerung des von mir eingeführten Problemes für successive lineare Transformationen. Wiener Sitzungsberichte 1880.

verbindet. Demnach convergiren $a'b$, $b'c$, $c'a$ gegen einen Punkt σ', die Dreiecke $a'b'c'$ und bca sind also perspectiv in der geschriebenen Ordnung. Aus dem Vierecke a, k, a', $(ab, a'c')$ sieht man, dass auch $(ac, a'c')$, $(ab, a'b')$, $(ac', a'b)$ alineirt sind und vermöge bb', dass auch $(bc, b'c')$, $(ba, b'a')$, $(ba', b'c)$ alineirt sind. Aber die dritten Punkte dieser zwei Tripel sind identisch, und hieraus folgt, dass $(ab, a'b')$, $(bc, b'c')$, $(ca, c'a')$ alineirt sind oder dass $a'a$, $b'b$, $c'c$ gegen einen Punkt σ und hernach, dass $a'c$, $b'a$, $c'b$ gegen σ' convergiren und überdies: Die zu σ gehörige Perspectivitätsaxe geht durch σ' also:

Das Tripel der Perspectivitätsaxen von σ, σ', σ'' *geht bezüglich durch* σ', σ'', σ. Dies ist die nothwendige und hinreichende Bedingung für die sechs Punkte.

Die Punktepaare $a'b$ und $b'c$ bilden zwei uneigentliche involutorische Paare (s. oben § 5), es existiren daher ∞^1 in einer C_3, welche in Bezug auf das Viereck der Doppelpunkte sich selbst conjugirt ist. Diese Curve (J_3) tangirt bc in b, ca in c, ab in a, $b'c'$ in c', $c'a'$ in a', $a'b'$ in b'. Es sind also bca, $b'c'a'$ zwei Tangentialcyklen, welche zu demselben Wendepunktsdreiecke gehören. J_3 enthält auch $\sigma\sigma'\sigma''$ und es ist σ'' ein Doppelpunkt, $\sigma'\sigma''$ sind ein involutorisches Paar. Es existirt eine Collineation, welche c in c' in b in b' transformirt und aa' als involutorisches Paar enthält*).

Durch die drei anderen Doppelpunkte $d_2d_3d_4$ geht eine Curve D_3 des durch die Charakteristik bestimmten Netzes, welche ersichtlich invariant ist und die Schnittpunkte $(aa', b'c)$, $(a'b, c'c)$, $(b'b, c'a)$ enthält. Sie ist äquianharmonisch mit einer Correspondenz $u'-\varepsilon u\equiv\gamma$. Die Transformation enthält also auch ∞^1 periodische Tripel. Alle Curven des von D_3 und $aa'+bb'+cc'$ nebst $a'b+b'c+c'a$ constituirten Büschels sind äquianharmonisch, und es giebt zwei C_3^0, deren Spitzen ein involutorisches Paar von J_3 bilden.

Die zweite invariante Curve S_3 dieses Büschels geht durch σ'' und schneidet in einem involutorischen Paare die J_3. Sie ist äquianharmonisch mit $u'+\varepsilon u\equiv\gamma$. J_3 und $a'c+b'a+c'b$ constituiren einen Büschel vom Index 3, J_3 und D_3 einen Büschel vom Index 6. S_3 und $a'c+b'a+c'b$ bilden einen Büschel mit Osculation in σ''. Alle Curven dieses Büschels sind invariant und äquianharmonisch mit $u'+\varepsilon u\equiv\gamma$. Die periodischen Tripel dieser Correspon-

*) Hier ergiebt sich auch der Satz, den ich in der Note zu meiner Abhandlung, dieses Journal Bd. 95 ausgesprochen habe.

denzen sind die Schnittpunktetripel mit D_3. Im Büschel sind drei C_3^3 enthalten, deren Spitzen d_2, d_3, d_4 sind. Man findet (Pr. F. p. 91):

Theorem XII. Die Curven D_3, S_3, $a'c+b'a+c'b$ constituiren ein Netz von äquianharmonischen Curven.

2. *Die Transformation II_9.* Die directiven Projectivitäten für aa', bb', cc' liefern, dass alineirt sind

$$c,\ (b'c',\ ab),\ c_1';\ c,\ (b'c_1',\ a'c'),\ b;\ c,\ (a'c_1',\ b'b),\ c';$$

$(bc_1', b'c')$, $(bc', b'a')$, $(b'c_1', bc)$; $(bc_1', b'c')$, c, a'; $(bc_1', b'c')$, $(bc', b'c)$, $(b'c_1', ba')$; $(ca', c'c_1')$, $(cc_1', c'a')$, b; $(ca', c'c_1')$, $(cc_1', c'b')$, $(c'b, cb')$; $(ca', c'c_1')$, $(cb, c'b')$, $(cb', c'a')$.

Daher: Die Dreiecke $a'ca$ und $c'c_1'b$ sind dreifach perspectiv:

$$\begin{matrix} a'ca, & a'ca, & a'ca, \\ bc_1'c', & c'bc_1', & c_1'c'b, \end{matrix}$$

und die drei Axen gehen durch drei bestimmte der neun Seitenschnitte. Die zwei Tripel $a'b'b$ und $cc_1'c'$ sind ebenfalls dreifach perspectiv und derart, dass die drei Axen durch drei bestimmte der neun Seitenschnitte gehen, und durch weitere Untersuchung (l. c.):

Die sechs Punkte bilden zwei sechsfach perspective Dreiecke $a'c'c$, $b'bc_1'$. Man findet hier drei uneigentliche periodische Tripel, daher ∞^1 und der Ort ist eine C_a durch die drei eigentlichen Doppelpunkte und mit $u'-\varepsilon u\equiv\gamma$.

Nennt man d_1', d_2', d_3' die Nachbarpunkte von d_1, d_2, d_3 auf C_3, so sind drei invariante Büschel bestimmt durch $d_1+d_1'+d_2$, $d_2+d_2'+d_3$, $d_3+d_3'+d_1$. Die zweite invariante C_3 ist in jedem Büschel eine C_3^3, welche die Spitze im respectiven Scheitel d_1, d_2, d_3 hat und einen einfachen Punkt in d_2, d_3, d_1. Diese C_3^3 bilden zu zwei drei andere Büschel, deren Basis drei unendlich nahe Punkte in der zweiten festen Richtung von d_1, d_2, d_3 hat. Jede C_3^3 wird berührt in ihrem einfachen d_i in der Spitze einer anderen C_3^3, welche d_{i+1} einfach enthält.

Die ersten Büschel haben den Index 9, die drei anderen den Index 3.

Parameter auf C_a. $a'\equiv\varepsilon a-2\gamma$, $c\equiv\varepsilon^2a+(1-2\varepsilon)\gamma$, $c'\equiv a+3\varepsilon\gamma$, $c_1'\equiv\varepsilon a+(2\varepsilon^2-\varepsilon)\gamma$, $b\equiv\varepsilon^2a+(3-\varepsilon^2)\gamma$, $b'\equiv a+3(\varepsilon-1)\gamma$, woraus $3(\varepsilon-1)\gamma\equiv 0$ und $a(1-\varepsilon^2)\equiv(\varepsilon^2-2\varepsilon)\gamma$, woraus die Charakteristikpunkte berechnet werden.

3. *Die Transformation III_{12}.* Man findet zwei Doppelpunkte d_1, d_2 auf einer Geraden durch $(a'a, c'c)$. Die drei Geraden aa_2', ba_1', ca' werden von den Kegelschnitten $a'a_1'bcd_1$, $a'a_2'acd_1$, $aba_1'a_2'd_1$ in den Punkten r', r'', r des periodischen Tripels berührt. d_2 ist der Schnittpunkt von $a'c$, $a_1'c'$, $a_2'a$.

Die C_3, welche in d_2 eine Berührung nach einer der zwei invarianten Richtungen haben, bilden einen Büschel, und da $a'c+aa'_2+ba'_1$ darin enthalten ist, osculiren sich die Curven in d_2. Keiner dieser Büschel hat den Index 1, weil keine C_3 eine Correspondenz mit dem Index 12 und Doppelpunkt enthält; es entstehen also zwei neue invariante Curven, beide durch d_1 gehend. Daselbst müssen sie sich berühren oder eine einen Doppelpunkt besitzen. Es bleibt nur die zweite Annahme, nämlich dass eine C_3^3 durch $d_1^2 d_2$ vorhanden ist. Die andere C_3 ist C_h, welche cb in c und $a'b'$ in a' berührt, weil $a'a'_1a'_2c$ in einen Cyklus eintreten müssen. Eine Berührung in d_1 nach der zweiten invarianten Richtung bestimmt einen Büschel, welcher C_3^3 enthält und Osculation in d_1 hat. Die zweite feste C_3 ist C_e mit $u'+\varepsilon u \equiv \gamma$. Die Transformation besitzt demnach im ganzen vier invariante C_3 (Pr. F. p. 141). Man findet:

Theorem XIII. Alle C_3 des von C_3^3, C_e, $a'c+aa'_2+ba'_1$ constituirten Netzes sind äquianharmonisch. Die Hessesche Curve ist C_h zweimal gezählt, und mittelst der Parameterrechnung: C_h besitzt $a'aa'_1$, $cc'a'_2$, als Tangentialtripel. Die ganze Configuration ist jene von I_6 mit dem Besonderen, dass J_3 hier eine harmonische Curve ist.

4. *Die Transformation XXVII_3.* Ein ∞^3 lineares System von C_3 bleibt invariant. Es giebt weder Alineation unter den Punkten d noch den δ. Die sechs uneigentlichen Doppelpunkte verlangen, dass keiner oder ∞^1 Doppelpunkte existiren. Die Geradentripel

$$d_1e_2,\ d_3e_1,\ d_2e_3;\quad d_1e_3,\ d_3e_2,\ d_2e_1;\quad d_1e_1,\ d_2e_2,\ d_3e_3$$

sind anallagmatische Curven. Es giebt also noch eine eigentliche invariante C_3. Die Correspondenz ist $u'-\varepsilon u \equiv \gamma$ und keiner der drei Doppelpunkte kann mit einem Punkte der Charakteristik coincidiren. Daraus folgen ∞^1 Doppelpunkte in einer C_3 mit willkürlichem Modul und:

Theorem XIV. Die drei Tripel d_1e_i, d_2e_{i+1}, d_3e_{i+2} schneiden sich in drei Doppelpunkten der Transformation, welche zu C_k gehören. Die Dreiecke $d_1d_2d_3$, $e_1e_2e_3$ sind dreifach perspectiv.

Es folgt, dass e_1e_2, e_2e_3, e_3e_1, $\varepsilon_1\varepsilon_2$, $\varepsilon_2\varepsilon_3$, $\varepsilon_3\varepsilon_1$ Tangenten der C_k in e_1, e_2, e_3, ε_1, ε_2, ε_3 sind. Sie bilden auf C_k zwei Tangentialtripel. Die Kegelschnitte $d_1d_2d_3e_1e_2$, $d_1d_2d_3e_2e_3$, $d_1d_2d_3e_3e_1$ berühren C_k in e_2, e_3, e_1. Hieraus folgt:

Theorem XV. Sind zwei Tangentialtripel derselben Reihe auf einer C_k gegeben, so bilden die Geraden, welche von einem der Punkte zu den

Punkten des zweiten Tripels gehen, mit der Tangente in diesem Punkte ein äquianharmonisches Quadrupel.

Die Transformation besitzt ein Netz von invarianten C_a, in welchem die obigen drei Geradentripel enthalten sind.

Parameter. $u'-\varepsilon u \equiv \gamma$ giebt $\delta_1+\delta_2+\delta_3+d_3-\varepsilon d_1+2\gamma \equiv 0$ und hieraus $d_3-\varepsilon d_1 \equiv d_2-\varepsilon d_3 \equiv d_1-\varepsilon d_2$ oder $d_2+\varepsilon d_1+\varepsilon^2 d_3 \equiv 0$ und $\delta_2+\varepsilon\delta_1+\varepsilon^2\delta_3 \equiv 0$. Ferner $\varepsilon d_3+\varepsilon(d_1+d_2) \equiv \gamma$ oder $-\varepsilon^2 d_2+\varepsilon d_1 \equiv \gamma$ und $-\varepsilon^2 d_3+\varepsilon d_2 \equiv \gamma$, $-\varepsilon^2 d_3+\varepsilon d_3 \equiv \gamma$; ein Punkt d und der Werth von γ sind willkürlich, aus ihnen bestimmen sich die d und δ. Die Bedingung besteht $d_1-\delta_1 \equiv \varepsilon(d_2-\delta_2)$ $\equiv \varepsilon^2(d_3-\delta_3)$. Es findet sich so

Theorem XVI. *Zwei Tripel in C_a, welche der Bedingung $d_1+\varepsilon d_2+\varepsilon^2 d_3 = 0$ genügen wie $d_1-\delta_1 \equiv \varepsilon(d_2-\delta_2) \equiv \varepsilon^2(d_3-\delta_3)$, sind dreifach perspectiv. Die drei Centren und die sechs Punkte $d_i\delta_i$ bestimmen eine Curve C_3, welche C_a in einem Tripel schneidet, das sich selbst conjugirt ist in Bezug auf das Hessesche Dreieck von C_a.*

§ 5.

Die übrigen quadratischen Typen.

1. *Die illusorische Charakteristik* (XI_{12}). Es sind zwei uneigentliche involutorische Paare also ∞^1 vorhanden. Die Ortscurve C_3 müsste $b'c'$ in b', $b'c$ in b' berühren, was nicht möglich ist, ohne dass sie einen Doppelpunkt in b' hätte. In diesem Falle kommen aber eigentliche Doppelpunkte der Transformation nicht vor.

2. *Die illusorische Charakteristik* (XII_{18}). Das Vorhandensein der Q_{17} in der Folge der Wiederholungen verhindert jede Alineation unter den acht Punkten. Einige andere Alineationen wären sogar widersprechend der gewünschten Verkettung. Die acht Punkte sind also die Basis eines Büschels F, dessen neunter Scheitel ein Doppelpunkt d_1 wäre. Die invariante C_3 kann nicht degeneriren, weil die Gesammtheit durch d_1 gehen müsste, ohne daselbst einen Doppelpunkt zu haben. Eine C_3^4 kann nicht invariant sein, denn ihre Correspondenz kann keine Involution sein wegen c' in c_1' in c_2' in a und kann die Nachbarn von d_2 nicht als Doppelpunkte haben, weil ein Doppelpunkt bereits auf ihr existirt (d_1). Wenn eine oder zwei Curven C_3^3 invariant wären, müssten sich die zehn oder acht anderen rationalen Curven durch den Index 2 theilen. Der Index 9 mit einem Doppelpunkte existirt auf keiner C_3. Es bleiben 3 oder 6 als Index von F. Alle C_3 wären

äquianharmonisch; aber C_a mit $u'-\varepsilon u \equiv \gamma$ existirt nicht wegen c' in c_1' in c_2' in a; C_a mit $u'+\varepsilon u \equiv \gamma$ nicht wegen des Calculs der Parameter. Es sind also alle Hypothesen zu beseitigen und die Charakteristik ist nicht construirbar.

3. *Die illusorische Charakteristik* (XIII_{30}). Die beiden uneigentlichen involutorischen Paare verlangen nothwendig ein drittes $c'a$, also sind überhaupt alle Charakteristiken

$$a' \text{ in } b, \quad b' \text{ in } c, \quad c' \text{ in } \dots c_m' = a,$$

auch die nicht periodischen, unconstruirbar. Ueberdies könnte hier ein durch zwei Doppelpunkte constituirter invarianter Büschel nur den Index 5 haben in Betreff der rationalen Curven, aber der Index 6 mit zwei Doppelpunkten in einer C_3 ist unmöglich.

4. *Die Transformation* IV_{14}. Die Alineationen sind unverträglich mit den successiven Transformationen. Ein eigentlicher Doppelpunkt d_1 muss wenigstens existiren, der einen Büschel bestimmt, dessen Index wegen Theorem III nicht 1, 2, 14 sein kann. Es bleibt der Index 7 und sieben C_3^4, welche sich cyklisch vertauschen; die fünf anderen müssen durch die invarianten Curven absorbirt werden. Die Charakteristik gestattet keine invariante Gerade, noch ein involutorisches Paar von Gerade und Kegelschnitt. Die nothwendige Reduction kann also nur hervorgerufen werden durch eine gemeinsame Berührung in d_1, und die invarianten C_3 haben die eine einen Doppelpunkt in d_2, die andere in d_3. Beide sind C_3^3. Derselbe Weg führt von d_2 nach d_3 und von d_3 nach d_1. Das Netz enthält drei invariante C_3^3, die zweifach durch d_1, d_2, d_3 und beziehungsweise einfach durch d_2, d_3, d_1 gehen. Zu zweien combinirt geben sie Büschel mit dem Index 7. Der Index auf den C_3^3 ist 14.

5. *Die Transformation* V_{12}. Die Gerade $a_1'c_1'$ ist involutorisch transformirt in den Kegelschnitt $a'cc'bb'$ und bildet mit diesem eine C_3 des invarianten Netzes. Ich beweise Pr. F. p. 123, dass sich C_2 und $a_1'c_1'$ in einem Doppelpunkte d_1 von Q^2 berühren müssen und sie enthalten zusammen das involutorische Paar $i_1 i_2$. Die Curven C_3 des invarianten Büschels durch d_1 berühren sich längs der festen Richtung in d_1. Ich beweise, dass die zweite invariante Curve des Büschels durchaus keine andere sein kann als C_a mit einer Correspondenz $u'-\varepsilon u \equiv \gamma$. Die Existenz einer solchen Curve folgt auch aus den drei Tripeln $a'a_1'c$, $c'c_1'b$, $(a, b'c', a'c_1', a'b'c'a_1'b)$, welche ∞^1 periodische Tripel verlangen. Ein zweiter Büschel wird constituirt durch

d_2+d_3. Die zweite invariante C_3 geht durch $i_1 i_2$, ist also harmonisch und bildet mit $a'_1 c'_1 + C_2$ einen dritten invarianten Büschel. Für die Indices dieser Büschel finde ich 4, 6, 3. Die Parameter liefern:

Aus einem Wendepunkte a von C_a ziehe man zwei Tangenten, nehme die Berührungspunkte als a', b, ziehe von b zwei andere Tangenten, deren Berührungspunkte alineirt sind mit dem dritten Punkte erster Berührung und nehme diese als cc'_1. Dann ziehe man durch a' zwei Tangenten, deren Berührungssehne durch den dritten Punkt erster Berührung geht, und nehme diese zwei Punkte als $c'a'_1$.

6. *Die Transformation VI_{18}.* Ich beweise l. c., dass die Gerade $a'_1 a'_3$ und $(a'abca'_2)^2$ sich berühren. Die Gerade $a'_1 a'_3$ enthält $d_2 i_2$, die Gerade $(a'_3 c', a'_1 b')$, $(a'_3 b', a'_1 c')$ enthält $d_1 i_1$, unter $i_1 i_2$ das involutorische Paar verstanden.

Die C_3 eines Büschels berühren sich in d_2. Alle C_3 müssen C_a sein, es giebt vier C_3^3, von welchen eine invariant ist, während der Index im Büschel 3 ist. Die C_3 eines zweiten Büschels berühren sich in d_1. Ausser C_3 ist eine Curve C_a mit $u'+\varepsilon u \equiv \gamma$ invariant. Der Index ist 9. Ein dritter Büschel ist durch C_a und die zerfallende Curve gebildet, und in seine Basis treten $i_1 i_2$ ein. Parameter Pr. F. p. 148.

7. *Die Transformation VII_{15}.* Es erweist sich, dass dieselbe in jedem Falle identisch ist mit der zweiten Wiederholung einer X_{30} und ihre Construction ist also mit der Construction dieser letzteren gegeben.

8. *Die Transformation VIII_{20}.* Der Büschel von C_3 durch die acht Punkte hat einen Punkt d als neunten Scheitel. Der Index ist weder 1 noch 2 noch 4 noch 20. Wenn der Index 5 wäre, wären allle C_3 harmonisch. Eine invariante C_3^4 ist unmöglich, weil es keinen Punkt d_1 giebt, aus welchem aa', bb', cc' durch eine Involution projicirt sind. Eine feste C_3^2 ist ausgeschlossen durch C_h und eine degenerirte C_3 durch die Charakteristik. Es bleibt der Index 10 mit einem Cyklus von zehn C_3^4, während eine C_3^2 invariant ist, die beiden invarianten C_3 sind C_h und C_3^3. Parameter auf C_3^2 und C_h Pr. F. p. 126 und 166.

9. *Die Transformation IX_{24}.* Ich beweise l. c., dass der Index nur 4 sein kann, sodass alle Curven des Büschels äquianharmonisch sind mit $u'+\varepsilon u \equiv \gamma$. Die zwei festen C_3 haben ihre Spitzen in d_2, d_3 und tragen den Index 24. Parameter Pr. F. p. 168.

10. *Die Transformation X_{30}.* Die acht Punkte bestimmen die Basis

eines Büschels eigentlicher C_3. Jede Alineation ist unmöglich. Die Indices 1, 2, 3, 4, 15, 30 erweisen sich als unmöglich in Folge der rationalen Curven. Es bleibt also der Index 5. Alle C_3 sind äquianharmonisch, alle rationalen C_3 sind C_3^3, eine derselben bleibt fest, die andere invariante C_3 ist C_ϵ mit $u'+\epsilon u\equiv\gamma$.

§ 6.

Die kubischen und biquadratischen Typen.

1. *Die Transformation* XIV_6. Zur Construction der kubischen Typen benutze ich theilweise das von mir auf zwei Arten l. c. bewiesene Theorem:

Wenn eine kubische Transformation die conjugirten Fundamentalpunktepaare hat a^2b^2, a_ib_i, $(i=1,\ldots,4)$, so existirt stets die Collineation a in b, a_i in b_i, $(i=1,\ldots,4)$.

Im gegenwärtigen Falle ist diese Collineation involutorisch. Sei π das Centrum, $b_4a_4\pi$ sind alineirt. Der Directionskegelschnitt von a, b theilt sich in ab und a_2a_3, die Directionscurve von a_1 in a_1a_4, a_2a_3, ab_4. Aus der Construction von b_4', welche ich l. c. gegeben, folgt: Damit b_4' mit a_4 coincidire, muss man für gegebene aba_4b_4 die Punkte a_2a_3 passend auf einer willkürlichen Geraden wählen. Sei $\sigma=(ab_4, a_2a_3)$, $(a_2a_3\sigma'\sigma)=-1$, dann construire man τ' gemäss $(a, a_4\sigma\tau')=-1$, ferner $b_4\tau'\sigma'$ und hat für a_2a_3 noch alle Paare einer Involution mit den Doppelpunkten $\sigma\sigma'$.

2. *Die Transformation* XV_6. Die beiden eigentlichen Doppelpunkte d_1, d_2 bestimmen zwei invariante Büschel; jeder enthält eine invariante C_ϵ mit $u'+\epsilon u\equiv\gamma$ und die Curve $a_1b_1+(aba_2b_3a_4)^2$. Die Curven C_ϵ schneiden sich in einem involutorischen Paare und die Indices der Büschel sind 3, ebenso der Index des dritten Büschels. Parameter l. c. p. 230. Es findet sich die folgende schöne Vorschrift: Man nehme einen willkürlichen Punkt d auf C_ϵ als doppelt in einer Correspondenz $u'+\epsilon u\equiv\gamma$, bestimme zwei Punkte a, b, welche diese Correspondenz projectiv projiciren und dann ein Inflexionstripel, welches zum *Hesse*schen Dreiecke gehört und mit abd in einem Kegelschnitte liegt; diese drei Punkte werden $b_2b_3b_4$ sein.

3. *Die Transformation* XVI_6. Die adjungirte Collineation hat das Tripel $a_2a_3a_4$ als cyklisch und enthält a in b, a_1 in b_1. Die Gerade a_1b_1 transformirt sich involutorisch in $aba_2a_3a_4$. Für die C_3 findet sich als invariant eine C_a, eine C_3 mit willkürlichem Modul und $u'+u\equiv\gamma$ und eine C_1+C_4, deren Theile sich in d_1 berühren. Der Punkt d_1 bestimmt einen

Büschel von Curven, welche alle invariant sind. C_e und C_k, sowie C_1+C_2 und C_k bestimmen Büschel vom Index 3. Parameter auf C_e und C_k Pr. F. p. 229.

4. *Die Transformation* XVII_{10}. Dieselbe ist die dritte Wiederholung von X_{30} und existirt in Folge dessen gewiss. Im allgemeinen Falle jedoch ist eine invariante C_3 mit willkürlichem Modul vorhanden.

5. *Die Transformation* XVIII_{12}. Dass diese Figur existirt, folgt schon daraus, dass die Wiederholung von IX_{24} ein particulärer Fall derselben ist.

6. *Die illusorische Charakteristik* (XIX_{12}). Es muss ein Büschel eigentlicher Curven C_3 existiren, dessen neunter Scheitel einer der zwei eigentlichen Doppelpunkte ist. Wenn eine invariante C_3 $u'-\varepsilon u \equiv \gamma$ hätte, könnte man nicht auf befriedigende Art über die zweite Curve disponiren. Parameter l. c. p. 231.

7. *Die illusorischen Charakteristiken* (XX_{12}) *bis* (XXVI_{14}) werden genau so widerlegt.

8. *Die Transformation* XXVIII_8. Zuerst schliesse ich, dass der Index des Büschels nur 4 oder 2 sein kann. Für 2 wären die C_3 harmonisch, aber die zur Reduction des Büschels auf diesen Charakter nöthigen rationalen Curven erweisen sich als unverträglich mit der Charakteristik. Also ist der Index 4. Zwei invariante C_h mit $u'+iu \equiv \gamma$ sind unmöglich wegen $\delta_1+\delta_2+\delta_3+id_1+d_3+2\gamma \equiv 0$, woraus $id_1+d_3 \equiv id_2+d_1 \equiv id_3+d_2$ und endlich $d_1 \equiv d_2 \equiv d_3$. Wegen der drei eigentlichen Doppelpunkte bleibt nur noch der Fall zweier C_3^3. Es entsteht hier eine äusserst interessante Frage: Müssen alle Curven des Büschels äquianharmonisch sein?

Die zwei C_3^3 absorbiren zwei C_e und die beiden übrigen C_e sind unverträglich mit dem Index 4. Entweder alle C_3 müssen C_a sein oder die zwei übrigen C_a müssen von den zwei C_3^3 absorbirt sein. Wenn keiner dieser beiden Fälle eine Besonderheit des anderen ist, so entscheidet die dritte Potenz von IX_{24} im ersteren Sinne.

Ueber einen anderen Versuch zur Entscheidung der Frage cf. Pr. F. p. 261.

9. *Die Charakteristiken* (XXX_9), (XXXI_{12}) erweisen sich entschieden als unconstruirbar.

10. *Die Charakteristik* (XXXII_6) würde verlangen, dass der Directionskegelschnitt von a, b sich theile in ab und eine Gerade durch die a_i, so dass die fünf Punkte alineirt wären.

11. *Die Charakteristik* (XXXIII_{10}) müsste eine in ab und eine Gerade durch a_2, a_3, a_4, a_5 getheilte Directrixcurve haben, welche ihrerseits unendliche Annäherung von $a_1 a_6$ an a und von $b_1 b_6$ an b bedingen würde, was entgegen der Charakteristik ist.

§ 7.

Die Construction der übrigen Typen.

1. *Die Transformation* XXXIV_4. Es existirt eine C_3 mit willkürlichem Modul von lauter Doppelpunkten der Transformation und ein Büschel von harmonischen Curven, dessen Basis vervollständigt ist durch ein involutives Paar der Ebene. Ich finde l. c. die folgende Construction:

Wenn auf einer C_3 mit willkürlichem Modul ein Wendepunkt als $(b_1\beta_1)$ genommen wird, zwei Punkte erster Berührung als ca_1, zwei Punkte zweiter Berührung zur Seite von c als $b_2 b_3$ und zwei zur Seite von a_1 als $a_2 a_3$, sodass ca_1, $b_2 b_3$, $a_2 a_3$ auf der C_3 zusammenlaufen, so bilden die sieben Punkte in ihrer Bezeichnung die Charakteristik einer Transformation XXXIV_4. Parameter l. c. p. 289.

2. *Die Transformationen* XXXV_6, XXXVI_6, XXXVII_6. Für die erstere findet sich, dass alle C_3 invariant sein müssen mit dem Index 6. Es sind sechs Spitzen vorhanden, welche Doppelpunkte der Transformation sind, und es sind l. c. die Parameter berechnet worden. Ueberdies ist XXXV_6 die fünfte Wiederholung von X_{30}.

Für jedes Tripel $(a_i\beta_i)$ oder $(a_i\beta_{i+1})$ finden sich Bedingungen, welche erfüllbar sind und die Berechnung von γ, c noch offen lassen.

3. *Die illusorische Charakteristik* (XXXVIII_8). Jede der drei aufgeschriebenen äquivalenten Formen besitzt sechs uneigentliche Doppelpunkte und kann nicht zwei eigentliche Doppelpunkte besitzen. Vermöge der Tafel der Successionen sind Alineationen unmöglich, und es muss also ein neunter Scheitel existiren, der invariant ist. Dies reicht hin, um die Nichtconstruirbarkeit zu beweisen.

4. *Die Transformation* XXXIX_6. Man schliesst auf einen Büschel eigentlicher Curven C_3 mit einem Scheitel d_1. Die drei eigentlichen Doppelpunkte verlangen also entweder invariante C_3^3 oder C_α. Die C_3^3 widerlege ich l. c. durch die Parameter. Es bleibt also nur C_α mit $u' + \varepsilon u \equiv \gamma$ und C_α mit $u' - \varepsilon u \equiv \gamma$.

Parameter für $u'+\varepsilon u\equiv\gamma$. $c_1+\varepsilon\gamma_1\equiv\gamma$, $b_1-\varepsilon(c_1+c_2)\equiv\gamma$, $-(\gamma_1+a)+\varepsilon a\equiv\gamma$, $b_3-\varepsilon(c_1+c_2+b_1+b_2+b_3)\equiv\gamma$, $b_4-\varepsilon(c_1+c_2+b_1+b_3+b_4)\equiv\gamma$, $b_2-\varepsilon(c_1+c_2+b_1+b_4+b_3)\equiv\gamma$, $\gamma_1-\varepsilon(2c_1+c_2+a+b_1+b_2+b_3+b_4)\equiv\gamma$, $a-\varepsilon(c_1+2c_2+a+b_1+b_2+b_3+b_4)\equiv\gamma$, $c_2-\varepsilon(c_1+c_2+b_2+b_3+b_4)\equiv\gamma$.
Die Congruenzen 4, 5, 6 geben $2b_2\equiv 2b_3\equiv 2b_4$ und die Bestimmung von c_1, γ_1, a mittelst b_1.

Parameter für $u'-\varepsilon u\equiv\gamma$. $c_1-\varepsilon\gamma_1\equiv\gamma$, $b_1+\varepsilon(c_1+c_2)\equiv\gamma$, $-(\gamma_1+a)-\varepsilon a\equiv\gamma$, $b_3+\varepsilon(c_1+c_2+b_1+b_2+b_3)\equiv\gamma$, $b_4+\varepsilon(c_1+c_2+b_1+b_3+b_4)\equiv\gamma$, $b_2+\varepsilon(c_1+c_2+b_1+b_4+b_3)\equiv\gamma$, $\gamma_1+\varepsilon(2c_1+c_2+a+b_1+b_2+b_3+b_4)\equiv\gamma$, $a+\varepsilon(c_1+2c_2+a+b_1+b_2+b_3+b_4)\equiv\gamma$, $c_2+\varepsilon(c_1+c_2+b_2+b_3+b_4)\equiv\gamma$.
Die Congruenzen 4, 5, 6 geben wieder $2b_2\equiv 2b_3\equiv 2b_4$ und Bestimmung von c_1, γ_1, b_1 mittelst a.

5. *Die illusorische Charakteristik* (XL_6). Der neunte Scheitel des C_3-Büschels würde als Doppelpunkt eine Unendlichkeit von Doppelpunkten hervorrufen, welche eine C_3 erfüllen. In dieser müsste δ Tangentialpunkt von a_1, a_2, a_3 sein, $(b_1a_1a_2a_3a_4)^2$ würde in b berühren, und daher müssten der Tangentialpunkt von b, der Schnittpunkt (C_3, a_3a_4) und a_2 alineirt sein. Es müssten a_2, a_3, a_4 contangential sein und der vierte contangentiale müsste a_1 als Tangentialpunkt haben. Aber wegen $(a_1\delta)$ muss die Gerade ba_1 die C_3 in a_1 tangiren, so dass a_1b einen Theil eines Tangentialtripels bilden und $c_1c_2c_3$ in dieser Ordnung ein Tangentialcyklus sind. Wegen der Fundamentalcurve von β_1 sind die zwei Tripel dreifach perspectiv und gehören also zur selben Reihe von Inflexionstripeln. Wegen der Fundamentalcurven von c_1, c_2, c_3 müssten auch c_1, c_2, c_3 contangential sein, was mit den vorhergehenden Schlüssen unverträglich ist.

6. *Die Transformation* XLI_5 ist Wiederholung von X_{30} und als solche construirbar.

7. *Die illusorische Charakteristik* (XLII_{12}). Einer der eigentlichen Doppelpunkte ist der neunte Scheitel, der zweite bedingt C_3^3 und C_a $u'+\varepsilon u\equiv\gamma$ als invariant. Die Parameter liefern den Beweis der Unconstruirbarkeit in C_3^3 und C_a.

8. Ueber XLIII_2 bedarf es keines Wortes, dagegen ist zu bemerken, dass (XLIV_6) nothwendig ∞^1 Doppelpunkte haben müsste wegen der zwölf uneigentlichen, während die Verkettung γ_7 in c_7 damit nicht verträglich ist.

9. *Die Transformation* XLV_4 ist Wiederholung von VIII_{20} und IX_{24} und daher construirbar. Ueber die Allgemeinheit dieser Form ist es nicht

möglich, hier ausführlich zu sprechen, jedoch hebe ich ihre Eigenartigkeit besonders hervor.

10. *Die illusorische Charakteristik* (XLVI_4). Es lässt sich sogar von der internen involutorischen Charakteristik beweisen, dass sie nicht construirbar ist.

11. *Die Transformation* XLVII_3. Die 16 uneigentlichen Doppelpunkte bedingen ∞^1 in einer Curve C_6 mit Doppelpunkten in den acht Scheiteln. Alle C_3 enthalten $u'-\varepsilon u \equiv \gamma$ und die Congruenzen für die Fundamentalpunkte erweisen sich als stets verträglich.

12. Wie XLIII_2 verlangt auch XLVIII_2 keine besondere Figur, um die Charakteristik zu construiren.

Die periodischen *Jonquières*schen Typen.

Die einzigen constructiblen Charakteristiken aus No. 2 des Theoremes CIX sind die folgenden:

I.	(ab), b_i in $b_i^h = a_i$,		$i = 1, \ldots, 2(m-1)$,	Index	$2h$,
II.	(ab), b_i in $b_i^h = a_i$,	$(a_1 b_1)$,	$i = 2, \ldots, 2(m-1)$,	-	$2h$,
III.	(ab), b_i in $b_i^h = a_i$,	$(a_1 b_1)$, $(a_2 b_2)$,	$i = 3, \ldots, 2(m-1)$,	-	$2h$.

Ich habe l. c. IV. Th. § 7 den Zusammenhang derselben mit den hyperelliptischen Curven dargelegt und ausserdem auch mit besonderer Vorsicht den Fall behandelt, wo die einfachen Fundamentalpunkte unendlich nahe an (ab) heranrücken. Es findet sich eben:

Theorem XVII. Alle Transformationen (ab), wo noch eine Verkettung $b_k \ldots a_i$ existirt, sind reducirbar im Grade, ohne Ausnahme von Particulärem, bis diese Verkettungen absorbirt sind.

Von hervorragender Wichtigkeit sind namentlich diejenigen Transformationen (ab), wo unter den Strahlen von a Identität herrscht und auf jedem Strahle eine cyklische Projectivität von einem Index > 2 erscheint. Ich habe dieselben höhere Perspectivitäten (oder Homologieen) genannt. Auf dieselben beziehen sich die beiden folgenden Theoreme.

Theorem XVIII. Damit auf den Geraden durch (ab) unter den Punkten und ihren Transformirten eine periodische Projectivität von einem Index > 2 erscheine, ist nothwendig, dass alle einfachen Fundamentalpunkte mit a coincidiren. Der Ort der Doppelpunkte dieser Projectivitäten ist eine Curve der Mten Ordnung mit a^{M-1}.

Theorem XIX. Jede $C_M : a^{M-1}$ bestimmt ∞^1 höhere Perspectivitäten, wo C_M Ortscurve der Doppelpunkte (Directrixscurve) ist. Die besonderen Fälle hängen von der Natur der Aeste des Punktes a^{M-1} ab.

§ 8.

Das Aequivalenztheorem für die Transformationen.

Es erübrigt noch, zu den Sätzen des § 6 des I. Theiles hinzuzufügen, dass die Hülfssätze gültig sind für jede beliebige Anordnung der Fundamentalpunkte. Man kann sich also die Reductionsmethode I. durchgeführt denken unter der stillschweigenden Voraussetzung, dass dieselben für wirklich existirende geometrische Transformationen gelten sollen, und hat nicht nöthig, irgend welche Einschränkung zu machen, nachdem man zum Theoreme CIX gelangt ist. Aber man kann auch für die sämmtlichen Reductionen, welche ich in den §§ 7, 8, 9 als Resultate meiner Preisschrift angeführt habe, dieselbe Allgemeinheit beweisen. Cf. hierzu die einzelnen Transpositionen im II. und III. Theile l. c. und p. 291. So entsteht das folgende Schlusstheorem:

Theorem XX. Alle wirklich existirenden periodischen birationalen Transformationen lassen sich durch successive quadratische Tranformationen übertragen in:

1. *Periodische Collineationen,*
2. *Jonquièressche Transformationen einer der drei Arten*

(ab), b_i in $b_i^h = a_i$, $\quad i = 1, \ldots, 2(m-1)$,

(ab), b_i in $b_i^h = a_i$, $(a_1 b_1)$, $\quad i = 2, \ldots, 2(m-1)$,

(ab), b_i in $b_i^h = a_i$, $(a_1 b_1)$, $(a_2 b_2)$, $\quad i = 3, \ldots, 2(m-1)$,

deren Index im allgemeinen Falle $2h$ ist, jedoch in einem particulären Falle ein anderes Vielfaches von h sein kann.

3. *Die folgenden 28 einzelnen Typen:*

I_6	a' in b, b' in c, c' in a,	B_6,
II_9	(ab'), a' in c, c' in c_1' in b	B_9,
III_{12}	(ab'), (bc'), a' in a_1' in a_2' in c	B_{12},
IV_{14}	(ab'), a' in c, c' in c_1' in c_2' in b	B_{14},
V_{12}	(ab'), a' in a_1' in c, c' in c_1' in b	B'_{12},
VI_{18}	(ab'), (bc'), a' in a_1' in a_2' in a_3' in c	B_{18},
VII_{15}	b' in c, c' in c_1' in a, a' in a_1' in b	B_{15},

VIII_{20}	(ab'), a' in a'_1 in c, c' in c'_1 in c'_2 in b	B_{20},
IX_{24}	(ab'), a' in c, c' in c'_1 in c'_2 in c'_3 in b	B_{24},
X_{30}	(ab'), (bc'), a' in a'_1 in a'_2 in a'_3 in a'_4 in c	B_{30},
XIV_6	(ab_1), (ba_1), (a_2b_2), (a_3b_3), b_4 in a_4	Γ_6,
XV_6	b_1 in a, b in a_1, (a_2b_2), (a_3b_3), (a_4b_4)	Γ'_6,
XVI_6	b_1 in a, b in a_1, (a_2b_3), (a_3b_4), (a_4b_2)	Γ''_6,
XVII_{10}	b_1 in a, b in a_2, (a_1b_3), (a_3b_2), b_4 in a_4	Γ_{10},
XVIII_{12}	(ab_1), (ba_1), b_3 in a_4, b_4 in a_2, b_2 in a_3	Γ_{12},
XXVII_3	$(d_1\varepsilon_2)$, $(d_2\varepsilon_3)$, $(d_3\varepsilon_1)$, $(e_1\delta_2)$, $(e_2\delta_3)$, $(e_3\delta_1)$	Δ_3,
XXVIII_8	$(d_1\varepsilon_2)$, $(d_2\varepsilon_3)$, $(e_3\varepsilon_1)$, $(e_2\delta_1)$, δ_2 in e_1, δ_3 in d_3	Δ_8,
XXIX_6	$(d_1\varepsilon_2)$, $(d_2\varepsilon_3)$, $(d_3\varepsilon_1)$, $(e_1\delta_2)$, $(e_2\delta_3)$, δ_1 in e_3	Δ_6,
XXXIV_4	$(c\alpha_1)$, $(a_1\gamma)$, $(b_1\beta_1)$, $(b_2\alpha_2)$, $(b_3\alpha_3)$, $(a_2\beta_2)$, $(a_3\beta_3)$,	E_4,
XXXV_6	γ_1 in c_1, $(b_1\alpha_2)$, $(b_2\alpha_3)$, $(b_3\alpha_1)$, $(a_1\beta_2)$, $(a_2\beta_3)$, $(a_3\beta_1)$	E_6,
XXXVI_6	γ_1 in c_1, $(b_1\alpha_2)$, $(b_2\alpha_3)$, $(b_3\alpha_1)$, $(a_1\beta_1)$, $(a_2\beta_2)$, $(a_3\beta_3)$	E'_6,
XXXVII_6	γ_1 in c_1, $(b_1\alpha_1)$, $(b_2\alpha_2)$, $(b_3\alpha_3)$, $(a_1\beta_1)$, $(a_2\beta_2)$, $(a_3\beta_3)$	E''_6,
XXXIX_6	γ_1 in c_1, $(c_2\beta_1)$, $(a\gamma_2)$, $(b_1\alpha)$, $(b_2\beta_3)$, $(b_3\beta_4)$, $(b_4\beta_2)$	H_6,
XLI_5	$(d\alpha_1)$, $(a_1\delta)$, $(b_1\beta_2)$, $(c_1\beta_1)$, $(b_3\gamma_1)$, $(b_2\beta_3)$, $(c_2\alpha_2)$, $(a_2\gamma_2)$	Z_5,
XLIII_2	$(c_i\gamma_i)$, $(i = 1, \ldots, 7)$	Θ_2,
XLV_4	$(b_1\delta_1)$, $(b_2\delta_2)$, $(b_3\delta_3)$, $(c_1\gamma_1)$, $(c_2\gamma_2)$, $(c_3\gamma_3)$, $(d\beta)$, $(e\alpha)$	I_4,
XLVII_3	$(f\gamma)$, $(e_1\delta_2)$, $(e_2\delta_3)$, $(e_3\delta_1)$, $(c\eta)$, $(d_1\varepsilon_2)$, $(d_2\varepsilon_3)$, $(d_3\varepsilon_1)$	N_3,
XLVIII_2	$(f_i\eta_i)$, $(i = 1, \ldots, 8)$	Σ_2.

Berichtigungen:

Seite 69 Zeile 3 von oben lies § 10 statt § 11.
- 82 - 1 von oben lies CIX statt CXIV.
- 89 - 20 von oben lies XXXIX_6 statt (XXXIX_8).
- 99 - 14 von unten lies „nicht hinreichend vor“ statt „nicht vor“.
- 81—87 sind für die Theoreme die Nummern CX bis CXVI statt CXII bis CXVIII zu nehmen.

Ueber die Elementartheiler componirter Systeme.

(Von Herrn *K. Hensel.*)

Es seien

$$A = (a_{ik}), \quad B = (b_{ik}) \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n)$$

zwei Systeme $n$ter Ordnung, deren Elemente ganze Grössen eines beliebigen Rationalitätsbereiches, also z. B. ganze Zahlen oder ganze Functionen einer Variablen x sind. Es möge nun das System A dadurch in B übergehen, dass man es vorn und hinten mit irgend welchen anderen *ganzen* Systemen P und Q componirt, d. h. es bestehe eine Gleichung von der folgenden Form:

$$(1.) \qquad P.A.Q = B;$$

dann kann das System B als ein Vielfaches von A angesehen werden, wenn man die gebräuchlichen Bezeichnungen der Zahlentheorie auf die Composition der Systeme überträgt. Diese Beziehung der Systeme A und B ist für die arithmetische Theorie der Systeme, aber auch für alle ihre Anwendungen von grundlegender Bedeutung. Sind z. B. A und B die Coefficientensysteme zweier bilinearen Formen, so ist bekanntlich die Form B dann und nur dann unter der Form A im *Gauss*schen Sinne enthalten, wenn ihr Coefficientensystem ein Vielfaches desjenigen von A ist.

Ist nun das System B ein Multiplum von A und sind

$$D_n, \; D_{n-1}, \; \ldots, \; D_1; \quad D'_n, \; D'_{n-1}, \; \ldots, \; D'_1$$

beziehlich die grössten gemeinsamen Theiler aller Unterdeterminanten der $n$ten, $(n-1)$ten, ..., 1ten Ordnung von A und von B, so lehrt der Multiplicationssatz für Matrizen, dass jeder Determinantentheiler D'_i von B ein Vielfaches des entsprechenden Determinantentheilers D_i von A ist. Jedoch ist diese Beziehung deshalb nicht charakteristisch für den durch (1.) ausgedrückten Zusammenhang der Systeme A und B, weil sie auch bestehen kann, ohne dass B ein Vielfaches von A ist. Betrachtet man aber die sogenannten

Elementartheiler der beiden Systeme A und B, d. h. die $2n$ Quotienten:

$$d_i = \frac{D_i}{D_{i-1}}, \quad d'_i = \frac{D'_i}{D'_{i-1}}, \qquad (i=1,2,\ldots,n)$$

welche bekanntlich ebenfalls ganze Grössen sind, so besteht der folgende Fundamentalsatz, dessen Beweis den Inhalt dieser Arbeit bildet:

> Das System B ist dann und nur dann ein Vielfaches des Systemes A, wenn seine Elementartheiler d'_i Vielfache der entsprechenden Elementartheiler d_i von A sind.

Dieser Satz ist meines Wissens zuerst von Herrn ***Frobenius*** in der grossen Abhandlung „Theorie der linearen Formen mit ganzen Coefficienten" (d. J. Bd. 88 S. 96—116) vollständig aufgestellt und bewiesen worden, und er hat neuerdings einen eleganten algebraischen Beweis desselben Theoremes in den Berliner Monatsberichten vom Jahre 1894 S. 31—44 veröffentlicht, welcher sich auf eine von *Kronecker* gefundene Determinantenidentität gründet.

Der erste Theil dieses Satzes ist fast selbstverständlich: Sind (d_i) und (d'_i) diejenigen „Diagonalsysteme", deren Diagonalelemente die Elementartheiler von A und B sind, so kann man bekanntlich stets zwei Paare von „Einheitssystemen"*) (E, E_1) und $(\mathfrak{E}, \mathfrak{E}_1)$ so bestimmen, dass:

$$(2.) \qquad EAE_1 = (d_i), \quad \mathfrak{E}B\mathfrak{E}_1 = (d'_i)$$

ist. Sind nun die Elementartheiler von B Vielfache der entsprechenden Theiler von A, besteht also zwischen den Diagonalsystemen (d_i) und (d'_i) eine Gleichung

$$(3.) \qquad (d'_i) = (\delta_i)(d_i),$$

wo auch (δ_i) ein Diagonalsystem mit ganzen Elementen ist, so ergiebt sich aus (2.) und (3.)

$$B = \mathfrak{E}^{-1}(\delta_i)EAE_1\mathfrak{E}_1^{-1}$$

oder

$$B = PAQ,$$

wenn

$$P = \mathfrak{E}^{-1}(\delta_i)E, \quad Q = E_1\mathfrak{E}_1^{-1}$$

gesetzt wird, und da P und Q offenbar ganze Systeme sind, so ist damit der erste Theil des Satzes bewiesen. (Beiläufig ergiebt sich noch, dass für das eine der beiden Systeme P und Q, z. B. wie hier, für das letzte ein Einheitssystem gewählt werden kann.)

---

*) Einheitssysteme sind Systeme mit ganzen Elementen, deren Determinante gleich Eins ist, Diagonalsysteme sind solche, welche nur in ihrer Hauptdiagonale von Null verschiedene Elemente besitzen.

Wir wollen nun auch den zweiten Theil dieses Satzes beweisen, also zeigen, dass aus der Gleichung

$$(4.) \qquad PAQ = B$$

die Gleichung

$$(\delta_i)(d_i) = (d'_i)$$

für die aus den Elementartheilern von A und B gebildeten Diagonalsysteme folgt. Hier beachten wir zunächst, dass jedes der beiden Compositionssysteme P und Q als das Product von Einheitssystemen und einer Anzahl von Elementarsystemen

$$(p) = \begin{pmatrix} p & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

dargestellt werden kann, in denen p eine irreductible ganze Grösse des Bereiches, also z. B. eine Primzahl oder eine unzerlegbare Function von x oder aber auch, worauf hier Gewicht zu legen ist, gleich Null sein kann. Da nun durch die Composition des Systemes A mit beliebigen Einheitssystemen die Elementartheiler desselben überhaupt nicht geändert werden, so ist die Richtigkeit des Satzes nur für den Fall zu beweisen, dass B aus A durch vordere oder hintere Composition mit einem Elementarsysteme (p) hervorgeht, d. h. dass die Gleichung (4.) eine der beiden Formen hat:

$$B = (p)A, \quad \text{oder} \quad B = A(p),$$

oder, was dasselbe ist, dass B aus dem Systeme A durch Multiplication der Elemente seiner ersten Zeile oder seiner ersten Colonne mit der Primfunction p hervorgeht. Offenbar braucht aber jener Satz nur für *einen* der beiden unterschiedenen Fälle bewiesen zu werden: es ist also allein zu zeigen, dass für ein beliebiges System

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

die Elementartheiler von

$$B = \begin{pmatrix} pa_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ pa_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ pa_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

sämmtlich Vielfache der entsprechenden Elementartheiler von A sind.

Es sei nun (A, B) das System

$$\begin{pmatrix} 0, & a_{12}, & \dots, & a_{1n} \\ 0, & a_{22}, & \dots, & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0, & a_{n2}, & \dots, & a_{nn} \end{pmatrix},$$

welches also aus dem Systeme A oder auch aus B durch Nullsetzen seiner ersten Colonne entsteht. In dem speciellen Falle $p = 0$ ist $(A, B) = (B)$. Dann stimmt jede Determinante ϱter Ordnung B_ϱ von B mit ihrer entsprechenden Determinante A_ϱ von A überein, wenn sie dem Systeme (A, B) angehört, dagegen ist $B_\varrho = pA_\varrho$, wenn beide auch die erste Colonne von B und A enthalten. Es können sich also die Determinantentheiler, mithin auch die Elementartheiler der Systeme A und B höchstens um den Factor p unterscheiden, und sie können und sollen somit nur in Bezug auf diesen untersucht werden.

Es seien nun:

$$D_\varrho(A), \quad D_\varrho(B), \quad D_\varrho(A, B)$$

die höchsten Potenzen von p, welche in allen Unterdeterminanten einer beliebigen Ordnung der drei Systeme A, B, (A, B) enthalten sind; dann ist offenbar:

$$D_\varrho(A) \leqq D_\varrho(B) \leqq D_\varrho(A, B),$$

weil ja alle Determinanten von (A, B) nur einen Theil derjenigen von B und A ausmachen.

Ist also $D_\varrho(A) = D_\varrho(A, B)$, so ist auch $D_\varrho(A) = D_\varrho(B)$. Ist dagegen $D_\varrho(A) < D_\varrho(A, B)$, so ergiebt sich sofort $D_\varrho(B) = pD_\varrho(A)$. In diesem Falle nämlich sind alle Determinanten ϱter Ordnung von (A, B), d. h. alle den Systemen A und B gemeinsamen Determinanten mindestens durch $pD_\varrho(A)$ theilbar, dieselben können also bei der Vergleichung von $D_\varrho(B)$ und $D_\varrho(A)$ einfach fortgelassen werden; da dann aber für je zwei noch übrig bleibende entsprechende Determinanten A_ϱ und B_ϱ $B_\varrho = pA_\varrho$ ist, so ist in diesem Falle $D_\varrho(B) = pD_\varrho(A)$. Es ergiebt sich also der Satz:

> Die grössten gemeinsamen Theiler $D_\varrho(A)$ und $D_\varrho(B)$ aller Determinanten ϱter Ordnung der Systeme A und B sind dann und nur dann einander gleich, wenn:
>
> $$D_\varrho(A) = D_\varrho(A, B)$$
>
> ist; dagegen ist $D_\varrho(B) = pD_\varrho(A)$, wenn $D_\varrho(A) < D_\varrho(A, B)$ ist.

Es sei nun für irgend eine Ordnungszahl ϱ

$$D_\varrho(A) = D_\varrho(A, B), \quad \text{also} \quad D_\varrho(B) = D_\varrho(A);$$

dann giebt es in (A, B) mindestens eine Determinante ϱter Ordnung A_ϱ, welche in Bezug auf p regulär ist; nach einem in einer früheren Arbeit bewiesenen Hülfssatze*) ist dann unter den Unterdeterminanten von A_ϱ, die also auch zu (A, B) gehören, mindestens eine für A reguläre vorhanden, d. h. es ist auch:

$$D_{\varrho-1}(A) = D_{\varrho-1}(A, B), \quad \text{mithin} \quad D_{\varrho-1}(B) = D_{\varrho-1}(A),$$

und ein Gleiches gilt für alle Unterdeterminanten niedrigerer Ordnung. Ist also: $D_r(B)$ der erste Determinantentheiler von B, welcher nicht gleich $D_r(A)$, welcher also gleich $pD_r(A)$ ist, so gilt ein Gleiches von allen folgenden; bildet man also die Elementartheiler d'_ϱ von B, so ist für $\varrho = r$:

$$d'_r = \frac{D_r(B)}{D_{r-1}(B)} = \frac{pD_r(A)}{D_{r-1}(A)} = pd_r,$$

für alle vorhergehenden und für alle folgenden Elementartheiler ist dagegen $d'_\varrho = d_\varrho$, denn bei den ersteren tritt der Factor p weder im Zähler noch im Nenner von $\frac{D_\varrho(B)}{D_{\varrho-1}(B)}$ auf, bei den letzten hebt er sich in diesem Bruche fort, und damit ist jener Fundamentalsatz vollständig bewiesen.

Eine wichtige Folgerung aus diesem Satze mag noch beiläufig erwähnt werden: Ist wie vorher $PAQ = B$, ist also B ein Vielfaches von A

---

*) Vgl. d. J. Bd. 114 S. 25—30. Der hierher gehörige Beweis, dass eine reguläre Determinante A_ϱ der ϱten Ordnung auch mindestens eine reguläre Unterdeterminante $A_{\varrho-1}$ enthalten muss, kann kurz so gegeben werden: Man bringe durch Reihenvertauschungen A_ϱ in A an die erste Stelle und forme dann A_ϱ durch Elementartransformationen in ein Diagonalsystem um, dessen Elemente die Elementartheiler $d_1, \ldots, d_{\varrho-1}, d_\varrho$ von A_ϱ sind. In dem so sich ergebenden Systeme sind dann alle mit einem dieser Theiler d_i in derselben Zeile oder Colonne stehenden Elemente durch d_i theilbar, können also durch Elementartransformationen zu Null gemacht werden. Jede Determinante $(\varrho-1)$-ter Ordnung $A'_{\varrho-1}$ dieses äquivalenten Systemes kann nun durch Ränderung mit je einer zu einem Elemente d_i gehörigen Zeile und Colonne zu einer Determinante ϱter Ordnung gemacht werden, deren Werth dann gleich $d_i . A'_{\varrho-1}$ ist, und welche durch die nach der Voraussetzung *reguläre* Determinante $A_\varrho = d_1 \ldots d_i \ldots d_\varrho$ theilbar sein muss, und hieraus folgt, dass $A'_{\varrho-1}$ selbst durch die Unterdeterminante $A_{\varrho-1} = d_1 \ldots d_{\varrho-1}$ von A_ϱ theilbar, d. h. dass diese in der That regulär ist.

und sind d_ϱ und d'_ϱ die Elementartheiler der beiden Systeme A und B, so ist nach dem soeben bewiesenen Satze allgemein $d'_\varrho = \delta_\varrho d_\varrho$, wo die n Factoren $\delta_1, \ldots, \delta_n$ sämmtlich irgend welche ganzen Grössen des Bereiches, die Null eingeschlossen, sein können. Sind also wiederum allgemein $D_\varrho(B)$ und $D_\varrho(A)$ bezw. die grössten gemeinsamen Theiler aller Unterdeterminanten ϱter Ordnung der beiden Systeme B und A, so ist hiernach:

$$D_\varrho(B) = d'_1 \ldots d'_\varrho = \delta_1 \ldots \delta_\varrho . d_1 \ldots d_\varrho,$$

d. h. es ist:

$$D_\varrho(B) = \delta_1 \delta_2 \ldots \delta_\varrho . D_\varrho(A).$$

Ist also für einen bestimmten Werth von ϱ $D_\varrho(B) = D_\varrho(A) \gtrless 0$, so folgt aus der obigen Gleichung:

$$\delta_1 = \delta_2 = \cdots = \delta_\varrho = 1,$$

d. h. alle Determinantentheiler $D_{\varrho'}(B)$ von niedrigerer als der ϱten Ordnung stimmen dann ebenfalls mit den entsprechenden Theilern $D_{\varrho'}(A)$ überein; und ferner ergiebt sich ebenso, dass, falls $D_{\varrho+1}(B) > D_{\varrho+1}(A)$, also $\delta_{\varrho+1} > 1$ ist, alle Determinantentheiler $D_{\varrho+i}(B)$ von höherer als der ϱten Ordnung grösser sind als die entsprechenden Theiler des Systemes A.

Einen speciellen Fall dieses Satzes erhält man, wenn man von einem beliebigen Systeme A irgendwelche λ Zeilen und μ Colonnen fortlässt, oder gleich Null annimmt, denn jedes solches System geht aus A dadurch hervor, dass man dasselbe vorn und hinten mit je einem Diagonalsysteme componirt, dessen Diagonalelemente bis auf λ bezw. μ gleich Eins sind, während die übrigen den Werth Null haben. Solche Systeme $A_{\lambda\mu}$ mögen ***abgeleitete Systeme von A*** genannt werden; sie bilden eine Verallgemeinerung derjenigen, für welche $\lambda = \mu = n-\varrho$ ist, welche also den Unterdeterminanten A_ϱ von A entsprechen. Die Elementartheiler eines jeden aus A abgeleiteten Systemes sind dann Vielfache der entsprechenden Elementartheiler von A. Stimmen die nicht verschwindenden Determinantentheiler ϱter Ordnung von $A_{\lambda\mu}$ mit denen von A überein, so gilt dasselbe nach dem oben bewiesenen Satze von allen Theilern niedrigerer Ordnung. Ein aus A abgeleitetes System $A_{\lambda\mu}$ soll ***regulär von der rten Ordnung*** genannt werden, wenn seine nicht verschwindenden Determinantentheiler bis zu denen der $r$ten Ordnung mit denen von A übereinstimmen; alle späteren Theiler sind dann grösser als diejenigen von A. Ist speciell $\lambda = \mu = n-\varrho$, entspricht

also das quadratische System $A_{\lambda\lambda}$ einer Unterdeterminante ϱter Ordnung A_ϱ von A und stimmt A_ϱ mit dem Determinantentheiler $D_\varrho(A)$ ganz oder in Bezug auf einen Primfactor p überein, so ergiebt sich, als ganz specieller Fall dieses Satzes das in der oben erwähnten Arbeit bewiesene Theorem, dass jede reguläre Determinante A_ϱ eines Systemes A mindestens eine reguläre Unterdeterminante $A_{\varrho-1}$ besitzt, und unter Benutzung der in der Note auf S. 113 gegebenen Bemerkungen kann der dort gegebene Beweis durch diesen allgemeineren ersetzt werden.

Berlin, 14. März 1894.

Ueber Transformationen partieller Differentialgleichungen.

(Von Herrn *Paul Stäckel* in Halle a. S.).

Im ersten Abschnitte meiner Abhandlung: *Ueber Transformationen von Differentialgleichungen* (dieses Journal, Bd. 111. S. 290) hatte ich folgende Aufgabe gelöst: Welche Transformationen

$$x = f(\xi, \eta), \quad y = g(\xi, \eta)$$

haben die Eigenschaft, auf irgend eine lineare homogene Differentialgleichung $m$ter Ordnung:

$$\frac{d^m y}{dx^m} + P_1(x)\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}} + \cdots + P_{m-1}(x)\frac{dy}{dx} + P_m(x)y = 0$$

angewendet stets wieder eine solche Gleichung:

$$\frac{d^m \eta}{d\xi^m} + \Pi_1(\xi)\frac{d^{m-1}\eta}{d\xi^{m-1}} + \cdots + \Pi_{m-1}(\xi)\frac{d\eta}{d\xi} + \Pi_m(\xi)\eta = 0$$

zu ergeben? Ich wies nach, dass für $m \geqq 2$ die *einzigen* Transformationen der verlangten Art dargestellt werden durch:

$$\text{(T.)} \qquad x = f(\xi), \quad y = \eta g(\xi),$$

wobei $f(\xi)$ und $g(\xi)$ willkürliche Functionen von ξ sind; für $m = 1$ wurde eine gewisse Abänderung von (T.) nothwendig.

Dieses Resultat war insofern von Interesse, als es gerade die Transformationen (T.) sind, welche in der Theorie der *Differentialinvarianten* linearer homogener Differentialgleichungen auftreten.

Die entsprechende Aufgabe für lineare homogene partielle Differentialgleichungen mit r unabhängigen Veränderlichen zu lösen und damit den Grund für eine Theorie der Differentialinvarianten dieser Gleichungen zu legen, ist der Zweck dieser Abhandlung.

Die Ergebnisse meiner Untersuchungen über die Differentialinvarianten selbst werde ich an anderer Stelle veröffentlichen.

1.

Ich beginne mit einigen vorbereitenden ***Sätzen über die Transformation beliebiger partieller Differentialgleichungen.*** Um die Formeln möglichst übersichtlich zu gestalten, bezeichne ich die abhängige Veränderliche mit x_0, die unabhängigen Veränderlichen mit $x_1, x_2, \ldots, x_r$. Werden dann eine neue abhängige Veränderliche ξ_0 und neue unabhängige Veränderliche $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_r$ durch die Gleichungen:

$$(1.)\quad \begin{cases} x_0 = f_0(\xi_0, \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_r), \\ x_1 = f_1(\xi_0, \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_r), \\ x_2 = f_2(\xi_0, \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_r), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_r = f_r(\xi_0, \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_r) \end{cases}$$

eingeführt, so sollen zunächst die ersten partiellen Ableitungen von x_0 nach $x_1, x_2, \ldots, x_r$:

$$(2.)\quad y_1 = \frac{\partial x_0}{\partial x_1}, \quad y_2 = \frac{\partial x_0}{\partial x_2}, \quad \ldots, \quad y_r = \frac{\partial x_0}{\partial x_r}$$

vermöge der Gleichungen (1.) durch die ersten partiellen Ableitungen von ξ_0 nach $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_r$:

$$(3.)\quad \eta_1 = \frac{\partial \xi_0}{\partial \xi_1}, \quad \eta_2 = \frac{\partial \xi_0}{\partial \xi_2}, \quad \ldots, \quad \eta_r = \frac{\partial \xi_0}{\partial \xi_r}$$

ausgedrückt werden.

Zu diesem Zwecke verbinde ich die Definitionsgleichung von $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_r$:

$$(4.)\quad 0 = \eta_0 d\xi_0 + \eta_1 d\xi_1 + \eta_2 d\xi_2 + \cdots + \eta_r d\xi_r,$$

in welcher

$$(5.)\quad \eta_0 = -1$$

zu nehmen ist, mit den $r+1$ Gleichungen, die aus (1.) durch Differentiation folgen und die, wenn

$$(6.)\quad \frac{\partial f_\mathfrak{a}(\xi_0, \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_r)}{\partial \xi_\mathfrak{b}} = f_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}} \qquad (\mathfrak{a}, \mathfrak{b} = 0, 1, 2, \ldots, r)$$

gesetzt wird, so lauten:

$$(7.)\quad \begin{cases} 0 = -dx_0 + f_{00} d\xi_0 + f_{01} d\xi_1 + f_{02} d\xi_2 + \cdots + f_{0r} d\xi_r, \\ 0 = -dx_1 + f_{10} d\xi_0 + f_{11} d\xi_1 + f_{12} d\xi_2 + \cdots + f_{1r} d\xi_r, \\ 0 = -dx_2 + f_{20} d\xi_0 + f_{21} d\xi_1 + f_{22} d\xi_2 + \cdots + f_{2r} d\xi_r, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0 = -dx_r + f_{r0} d\xi_0 + f_{r1} d\xi_1 + f_{r2} d\xi_2 + \cdots + f_{rr} d\xi_r. \end{cases}$$

Sieht man die Gleichungen (4.) und (7.) als $r+2$ lineare homogene Gleichungen für die $r+2$ Grössen:

$$-1,\quad d\xi_0,\quad d\xi_1,\quad d\xi_2,\quad \dots,\quad d\xi_r$$

an, so erkennt man, dass ihre Determinante verschwinden muss. Es ist also:

$$(8.)\qquad 0 = \begin{vmatrix} 0 & \eta_0 & \eta_1 & \eta_2 & \dots & \eta_r \\ dx_0 & f_{00} & f_{01} & f_{02} & \dots & f_{0r} \\ dx_1 & f_{10} & f_{11} & f_{12} & \dots & f_{1r} \\ dx_2 & f_{20} & f_{21} & f_{22} & \dots & f_{2r} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ dx_r & f_{r0} & f_{r1} & f_{r2} & \dots & f_{rr} \end{vmatrix}.$$

Bildet man daher zu dem Systeme der $(r+1)^2$ Grössen

$$f_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}} \qquad (\mathfrak{a}, \mathfrak{b} = 0, 1, 2, \dots, r)$$

das System der *adjungirten* Grössen:

$$\varphi_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}, \qquad (\mathfrak{a}, \mathfrak{b} = 0, 1, 2, \dots, r)$$

so zeigt ein bekannter Satz aus der Theorie der *bilinearen Formen*, dass die Gleichung (8.) gleichbedeutend ist mit:

$$(9.)\qquad 0 = \sum_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} \varphi_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}\eta_{\mathfrak{b}}dx_{\mathfrak{a}}.$$

Diese Identität verglichen mit der Definitionsgleichung der Grössen $y_1, y_2, \dots, y_r$:

$$(10.)\qquad 0 = \sum_{\mathfrak{a}} y_{\mathfrak{a}}dx_{\mathfrak{a}}, \qquad (\mathfrak{a} = 0, 1, 2, \dots, r)$$

in der wieder $y_0 = -1$ zu nehmen ist, liefert die r Relationen:

$$(11.)\qquad \varrho y_{\mathfrak{a}} = \sum_{\mathfrak{b}} \varphi_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}\eta_{\mathfrak{b}}, \qquad (\mathfrak{a} = 1, 2, \dots, r)$$

in denen der Proportionalitätsfactor ϱ durch die Gleichung

$$(12.)\qquad -\varrho = \sum_{\mathfrak{b}} \varphi_{0\mathfrak{b}}\eta_{\mathfrak{b}}$$

bestimmt ist. *Mithin sind $y_1, y_2, \dots, y_r$ gebrochene lineare Functionen von $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_r$, es ist nämlich:*

$$(13.)\qquad y_{\mathfrak{a}} = -\frac{\sum_{\mathfrak{b}} \varphi_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}\eta_{\mathfrak{b}}}{\sum_{\mathfrak{b}} \varphi_{0\mathfrak{b}}\eta_{\mathfrak{b}}}.$$

Sollen $y_1, y_2, \dots, y_r$ *ganze* lineare Functionen von $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_r$ sein, so müssen die Gleichungen:

$$(14.)\qquad \varphi_{01} = 0,\quad \varphi_{02} = 0,\quad \dots,\quad \varphi_{0r} = 0$$

identisch erfüllt sein. Das bedeutet aber, dass die r Functionaldeterminanten:

$$\frac{\partial(f_1, f_2, \dots, f_r)}{\partial(\xi_0, \xi_2, \dots, \xi_r)}, \quad \frac{\partial(f_1, f_2, f_3, \dots, f_r)}{\partial(\xi_0, \xi_1, \xi_3, \dots, \xi_r)}, \quad \dots, \quad \frac{\partial(f_1, f_2, \dots, f_r)}{\partial(\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{r-1})}$$

identisch verschwinden, dass also r Relationen:

$$(15.) \quad \begin{cases} \Omega_1(f_1, f_2, \dots, f_r; \xi_1) = 0, \quad \Omega_2(f_1, f_2, \dots, f_r; \xi_2) = 0, \quad \dots, \\ \qquad\qquad \Omega_r(f_1, f_2, \dots, f_r; \xi_r) = 0 \end{cases}$$

bestehen. In ihnen müssen beziehungsweise $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_r$ wirklich vorkommen, da zwischen $f_1 = x_1, f_2 = x_2, \dots, f_r = x_r$ keine Gleichung stattfinden darf. Mithin ergiebt sich aus (15.):

$$(16.) \quad \begin{cases} \xi_1 = \omega_1(x_1, x_2, \dots, x_r), \quad \xi_2 = \omega_2(x_1, x_2, \dots, x_r), \quad \dots, \\ \qquad\qquad \xi_r = \omega_r(x_1, x_2, \dots, x_r). \end{cases}$$

Diese r Gleichungen sind unabhängig von einander, weil sonst zwischen den unabhängigen Veränderlichen $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_r$ eine Relation bestehen würde, folglich ist umgekehrt:

$$(17.) \quad \begin{cases} x_1 = f_1(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_r), \quad x_2 = f_2(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_r), \quad \dots, \\ \qquad\qquad x_r = f_r(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_r). \end{cases}$$

Sind aber umgekehrt in den Transformationsgleichungen (1.) $f_1, f_2, \dots, f_r$ frei von ξ_0, so ist

$$(18.) \qquad f_{10} = 0, \quad f_{20} = 0, \quad \dots, \quad f_{r0} = 0,$$

woraus

$$\varphi_{01} = 0, \quad \varphi_{02} = 0, \quad \dots, \quad \varphi_{0r} = 0$$

folgt. *Das Bestehen der Gleichungen* (17.) *ist also die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass $y_1, y_2, \dots, y_r$ ganze lineare Functionen von $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_r$ sind.*

2.

Nunmehr sollen auch die zweiten Ableitungen von x_0:

$$(19.) \qquad \frac{\partial^2 x_0}{\partial x_a \partial x_b} = y_{ab} \qquad (a, b = 1, 2, \dots, r)$$

durch die zweiten Ableitungen von ξ_0:

$$(20.) \qquad \frac{\partial^2 \xi_0}{\partial \xi_a \partial \xi_b} = \eta_{ab} \qquad (a, b = 1, 2, \dots, r)$$

ausgedrückt werden. Zu diesem Zwecke bilde ich aus (13.):

$$(21.) \qquad \varrho^2 dy_a = \sum_c H_c^{(a)} dx_c,$$

hierin ist

$$(22.)\qquad H_{\mathfrak{c}}^{(\mathfrak{a})} = \sum_{(\mathfrak{b},\,\mathfrak{d}=0,1,2,\dots,r)} \left(\varphi_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}} \frac{\partial \varphi_{0\mathfrak{d}}}{\partial \xi_{\mathfrak{c}}} - \varphi_{0\mathfrak{b}} \frac{\partial \varphi_{\mathfrak{a}\mathfrak{d}}}{\partial \xi_{\mathfrak{c}}}\right) \eta_{\mathfrak{b}} \eta_{\mathfrak{d}} + \sum_{\left(\substack{\mathfrak{b}=0,1,\dots,\mathfrak{d}-1,\mathfrak{d}+1,\dots,r \\ \mathfrak{d}=1,2,3,\dots,r}\right)} (\varphi_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}} \varphi_{0\mathfrak{d}} - \varphi_{0\mathfrak{b}} \varphi_{\mathfrak{a}\mathfrak{d}}) \eta_{\mathfrak{b}} \eta_{\mathfrak{d}\mathfrak{c}};$$

man beachte, dass die Ausdrücke $H_{\mathfrak{c}}^{(\mathfrak{a})}$ *linear* sind in

$$\eta_{11}, \quad \eta_{12}, \quad \dots, \quad \eta_{rr},$$

was bald von Wichtigkeit sein wird.

Betrachtet man jetzt die Gleichungen:

$$(23.)\qquad \begin{cases} 0 = \phantom{-\varrho^2 dy_{\mathfrak{a}} +} \eta_0 d\xi_0 + \eta_1 d\xi_1 + \eta_2 d\xi_2 + \dots + \eta_r d\xi_r, \\ 0 = -\varrho^2 dy_{\mathfrak{a}} + H_0^{(\mathfrak{a})} d\xi_0 + H_1^{(\mathfrak{a})} d\xi_1 + H_2^{(\mathfrak{a})} d\xi_2 + \dots + H_r^{(\mathfrak{a})} d\xi_r, \\ 0 = - dx_1 + f_{10} d\xi_0 + f_{11} d\xi_1 + f_{12} d\xi_2 + \dots + f_{1r} d\xi_r, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ 0 = - dx_r + f_{r0} d\xi_0 + f_{r1} d\xi_1 + f_{r2} d\xi_2 + \dots + f_{rr} d\xi_r, \end{cases}$$

so erkennt man, dass die Determinante dieser $r+2$ linearen homogenen Gleichungen für:

$$-1, \quad d\xi_0, \quad d\xi_1, \quad d\xi_2, \quad \dots, \quad d\xi_r$$

verschwinden muss. Es ist also:

$$(24.)\qquad 0 = \begin{vmatrix} 0 & \eta_0 & \eta_1 & \eta_2 & \dots & \eta_r \\ \varrho^2 dy_{\mathfrak{a}} & H_0^{(\mathfrak{a})} & H_1^{(\mathfrak{a})} & H_2^{(\mathfrak{a})} & \dots & H_r^{(\mathfrak{a})} \\ dx_1 & f_{10} & f_{11} & f_{12} & \dots & f_{1r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ dx_r & f_{r0} & f_{r1} & f_{r2} & \dots & f_{rr} \end{vmatrix}.$$

Entwickelt man diese Determinante nach den Elementen der ersten Colonne, so folgt aus der Analogie mit der Determinante (8.), dass die Gleichung (24.) gleichbedeutend ist mit:

$$(25.)\qquad 0 = \sum_{(\mathfrak{b}=0,1,2,\dots,r)} \varphi_{0\mathfrak{b}} \eta_{\mathfrak{b}} \varrho^2 dy_{\mathfrak{a}} + \sum_{\left(\substack{\mathfrak{b}=1,2,3,\dots,r \\ \mathfrak{c}=0,1,2,3,\dots,r}\right)} \varphi_{\mathfrak{b}\mathfrak{c}}^{(\mathfrak{a})} \eta_{\mathfrak{c}} dx_{\mathfrak{b}},$$

wo die Grössen $\varphi_{\mathfrak{b}\mathfrak{c}}^{(\mathfrak{a})}$ aus den Grössen $\varphi_{\mathfrak{b}\mathfrak{c}}$ hervorgehen, wenn darin an Stelle von

$$f_{00}, \quad f_{01}, \quad f_{02}, \quad \dots, \quad f_{0r}$$

beziehungsweise

$$H_0^{(\mathfrak{a})}, \quad H_1^{(\mathfrak{a})}, \quad H_2^{(\mathfrak{a})}, \quad \dots, \quad H_r^{(\mathfrak{a})}$$

gesetzt wird. Die Grössen $\varphi_{\mathfrak{b}\mathfrak{c}}^{(\mathfrak{a})}$ sind daher *ganze rationale Functionen* von $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_r; \eta_{11}, \eta_{12}, \dots, \eta_{rr}$ und zwar *linear* in $\eta_{11}, \eta_{12}, \dots, \eta_{rr}$.

Nun ist nach (12.):

$$\sum_c \varphi_{0c}\eta_c = -\varrho,$$

folglich ist

$$(26.)\qquad \varrho^3 dy_a = \sum_{b,c} \varphi_{bc}^{(a)} \eta_c dx_b.$$

Vergleicht man (26.) mit der Definitionsgleichung von $y_{a1}, y_{a2}, \dots, y_{ar}$:

$$(27.)\qquad dy_a = \sum_b y_{ab} dx_b,$$

so erhält man schliesslich:

$$(28.)\qquad y_{ab} = -\frac{\sum_c \varphi_{bc}^{(a)} \eta_c}{(\sum_c \varphi_{0c}\eta_c)^3}.$$

Die zweiten Ableitungen $y_{11}, y_{12}, \dots, y_{rr}$ sind demnach rationale Functionen von $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_r$; $\eta_{11}, \eta_{12}, \dots, \eta_{rr}$ und zwar ganze lineare Functionen *in Bezug auf $\eta_{11}, \eta_{12}, \dots, \eta_{rr}$.*

Sie werden auch in Bezug auf $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_r$ *ganze* rationale Functionen, wenn die Gleichungen

$$(17.)\qquad x_1 = f_1(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_r),\ x_2 = f_2(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_r),\ \dots,\ x_r = f_r(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_r)$$

erfüllt sind. In diesem Falle ist nämlich:

$$(14.)\qquad \varphi_{01} = 0,\quad \varphi_{02} = 0,\quad \dots,\quad \varphi_{0r} = 0.$$

Es wird daher:

$$(29.)\qquad \varrho = -\varphi_{00},$$

und wegen $\eta_0 = -1$:

$$(30.)\qquad H_c^{(a)} = \sum_{(b = 0, 1, 2, \dots, r)} \left(\varphi_{00}\frac{\partial \varphi_{ab}}{\partial \xi_c} - \varphi_{ab}\frac{\partial \varphi_{00}}{\partial \xi_c}\right)\eta_b + \varphi_{00}.\sum_{(b = 1, 2, 3, \dots, r)} \varphi_{ab}\eta_{bc},$$

mithin werden die Zähler von $y_{11}, y_{12}, \dots, y_{rr}$ ganze rationale Functionen zweiten Grades von $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_r$.

Man kann sogar den Coefficienten von η_b^2 in $\varrho^3 y_{aa}$ *explicite* berechnen; da hiervon später Gebrauch gemacht werden wird, soll dieser bemerkenswerth einfache Ausdruck ausführlich hergeleitet werden.

Fasst man nur die Abhängigkeit der Grösse y_{aa} von η_b ins Auge, so darf $H_c^{(a)}$ durch:

$$\left(\varphi_{00}\frac{\partial \varphi_{ab}}{\partial \xi_c} - \varphi_{ab}\frac{\partial \varphi_{00}}{\partial \xi_c}\right)\eta_b$$

ersetzt werden. Ich schreibe dies:

$$(31.)\qquad H_c^{(a)} \equiv L_c^{(a)}\eta_b,$$

wo die *Congruenz* in Bezug auf das *Modulsystem:*

$$(\eta_0,\ \eta_1,\ \dots,\ \eta_{\mathfrak{b}-1},\ \eta_{\mathfrak{b}+1},\ \dots,\ \eta_r;\ \eta_{11},\ \eta_{12},\ \dots,\ \eta_{rr})$$

stattfindet. Bei dieser Bezeichnung ist:

$$(32.)\qquad 0 \equiv \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \eta_\mathfrak{b} & 0 & \dots & 0 \\ \varrho^2 dy_\mathfrak{a} & L_0^{(\mathfrak{a})}.\eta_\mathfrak{b} & L_1^{(\mathfrak{a})}.\eta_\mathfrak{b} & \dots & L_{\mathfrak{b}-1}^{(\mathfrak{a})}.\eta_\mathfrak{b} & L_\mathfrak{b}^{(\mathfrak{a})}.\eta_\mathfrak{b} & L_{\mathfrak{b}+1}^{(\mathfrak{a})}.\eta_\mathfrak{b} & \dots & L_r^{(\mathfrak{a})}.\eta_\mathfrak{b} \\ dx_1 & 0 & f_{1,1} & \dots & f_{1,\mathfrak{b}-1} & f_{1,\mathfrak{b}} & f_{1,\mathfrak{b}+1} & \dots & f_{1,r} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ dx_\mathfrak{a} & 0 & f_{\mathfrak{a},1} & \dots & f_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}-1} & f_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} & f_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}+1} & \dots & f_{\mathfrak{a},r} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ dx_r & 0 & f_{r,1} & \dots & f_{r,\mathfrak{b}-1} & f_{r,\mathfrak{b}} & f_{r,\mathfrak{b}+1} & \dots & f_{r,r} \end{vmatrix},$$

und der Coefficient von $\eta_\mathfrak{b}^2 dx_\mathfrak{a}$ ist genau gleich dem gesuchten Coefficienten von $\eta_\mathfrak{b}^2$ in $y_{\mathfrak{a}\mathfrak{a}}$. Man erhält also für ihn die Determinante:

$$(33.)\qquad (-1)^{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}} \begin{vmatrix} L_0^{(\mathfrak{a})} & L_1^{(\mathfrak{a})} & \dots & L_{\mathfrak{b}-1}^{(\mathfrak{a})} & L_{\mathfrak{b}+1}^{(\mathfrak{a})} & \dots & L_r^{(\mathfrak{a})} \\ 0 & f_{11} & \dots & f_{1,\mathfrak{b}-1} & f_{1,\mathfrak{b}+1} & \dots & f_{1,r} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & f_{\mathfrak{a}-1,1} & \dots & f_{\mathfrak{a}-1,\mathfrak{b}-1} & f_{\mathfrak{a}-1,\mathfrak{b}+1} & \dots & f_{\mathfrak{a}-1,r} \\ 0 & f_{\mathfrak{a}+1,1} & \dots & f_{\mathfrak{a}+1,\mathfrak{b}-1} & f_{\mathfrak{a}+1,\mathfrak{b}+1} & \dots & f_{\mathfrak{a}+1,r} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & f_{r,1} & \dots & f_{r,\mathfrak{b}-1} & f_{r,\mathfrak{b}+1} & \dots & f_{r,r} \end{vmatrix} = L_0^{(\mathfrak{a})}.\mathrm{adj} f_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}},$$

wenn $\mathrm{adj} f_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}$ die *adjungirte* Grösse zu $f_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}$ in dem Systeme der r^2 Grössen

$$f_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} \qquad\qquad (\mathfrak{a},\mathfrak{b} = 1, 2, 3, \dots, r)$$

bezeichnet.

Nun war

$$L_0^{(\mathfrak{a})} = \varphi_{00}\frac{\partial \varphi_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}}{\partial \xi_0} - \varphi_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}\frac{\partial \varphi_{00}}{\partial \xi_0}.$$

Es ist aber

$$(34.)\qquad \varphi_{00} = |f_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}|, \qquad\qquad (\mathfrak{a},\mathfrak{b} = 1, 2, 3, \dots, r)$$

mithin besteht wegen

$$(17.)\qquad x_1 = f_1(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_r),\ x_2 = f_2(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_r),\ \dots,\ x_r = f_r(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_r)$$

die Gleichung

$$(35.)\qquad \frac{\partial \varphi_{00}}{\partial \xi_0} = 0.$$

Ferner ist φ_{ab} die adjungirte Grösse zu f_{ab} in dem Systeme:

$$\begin{matrix} f_{00} & f_{01} & f_{02} & \cdots & f_{0r} \\ 0 & f_{11} & f_{12} & \cdots & f_{1r} \\ 0 & f_{21} & f_{22} & \cdots & f_{2r} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & f_{r1} & f_{r2} & \cdots & f_{rr}. \end{matrix}$$

Also ist:

$$(36.) \qquad \varphi_{ab} = (-1)^{a+b} \cdot \begin{vmatrix} f_{0,0} & f_{0,1} & \cdots & f_{0,b-1} & f_{0,b+1} & \cdots & f_{0r} \\ 0 & f_{1,1} & \cdots & f_{1,b-1} & f_{1,b+1} & \cdots & f_{1r} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & f_{a-1,1} & \cdots & f_{a-1,b-1} & f_{a-1,b+1} & \cdots & f_{a-1,r} \\ 0 & f_{a+1,1} & \cdots & f_{a+1,b-1} & f_{a+1,b+1} & \cdots & f_{a+1,r} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & f_{r,1} & \cdots & f_{r,b-1} & f_{r,b+1} & \cdots & f_{r,r} \end{vmatrix} = f_{00} \operatorname{adj} f_{ab}.$$

Da endlich alle Grössen

$$f_{a,b} \qquad (a,b = 1, 2, 3, \ldots, r)$$

und ebenso ihre adjungirten

$$\operatorname{adj} f_{ab} \qquad (a,b = 1, 2, 3, \ldots, r)$$

von ξ_0 unabhängig sind, so ist

$$\frac{\partial \varphi_{ab}}{\partial \xi_0} = \frac{\partial f_{00}}{\partial \xi_0} \operatorname{adj} f_{ab}.$$

Also erhält man schliesslich:

$$(37.) \qquad L_0^{(a)} = \varphi_{00} . \operatorname{adj} f_{ab} \cdot \frac{\partial^2 f_0}{\partial \xi_0^2},$$

und daher *ist der Coefficient von* η_b^2 *in* $\varrho^3 y_{aa}$ *gleich:*

$$(38.) \qquad \varphi_{00} \cdot [\operatorname{adj} f_{ab}]^2 \cdot \frac{\partial^2 f_0}{\partial \xi_0^2} \cdot$$

3.

Es bleibt übrig einige Formeln zu entwickeln, welche sich auf den *Zusammenhang zwischen den höheren Ableitungen von* x_0 *und* ξ_0 beziehen.

Man hatte gefunden:

$$(28.) \qquad \varrho^3 y_{ab} = \sum_c \varphi_{bc}^{(a)} \eta_c,$$

wo die $\varphi_{bc}^{(a)}$ ganze rationale Functionen von $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_r; \eta_{11}, \eta_{12}, \ldots, \eta_{rr}$

und zwar linear in Bezug auf $\eta_{11}, \eta_{12}, \ldots, \eta_{rr}$ waren. Mithin ist:

$$(39.)\qquad \varrho^4 dy_{ab} = \sum_{(c=0,1,2,\ldots,r)} H_c^{(a,b)} d\xi_c,$$

und die Grössen $H_c^{(a,b)}$ sind *ganze rationale Functionen der Ableitungen erster, zweiter und dritter Ordnung von ξ_0; in Bezug auf die Ableitungen dritter Ordnung sind sie linear.*

Verbindet man die Gleichungen (39.) mit den Gleichungen

$$(4.)\qquad 0 = \eta_0 d\xi_0 + \eta_1 d\xi_1 + \cdots + \eta_r d\xi_r,$$

$$(7.)\qquad \begin{cases} 0 = -dx_1 + f_{10} d\xi_0 + f_{11} d\xi_1 + \cdots + f_{1r} d\xi_r, \\ 0 = -dx_2 + f_{20} d\xi_0 + f_{21} d\xi_1 + \cdots + f_{2r} d\xi_r, \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ 0 = -dx_r + f_{r0} d\xi_0 + f_{r1} d\xi_1 + \cdots + f_{rr} d\xi_r, \end{cases}$$

so erkennt man, dass die Determinante:

$$(40.)\qquad \begin{vmatrix} 0 & \eta_0 & \eta_1 & \ldots & \eta_r \\ \varrho^4 dy_{ab} & H_0^{(a,b)} & H_1^{(a,b)} & \ldots & H_r^{(a,b)} \\ dx_1 & f_{10} & f_{11} & \ldots & f_{1r} \\ dx_2 & f_{20} & f_{21} & \ldots & f_{2r} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ dx_r & f_{r0} & f_{r1} & \ldots & f_{rr} \end{vmatrix} = 0$$

ist und erhält daher

$$(41.)\qquad \varrho^5 dy_{ab} = \sum \varphi_{c,b}^{(a,b)} \eta_b dx_c, \qquad \begin{pmatrix} c = 1, 2, 3, \ldots, r \\ b = 0, 1, 2, \ldots, r \end{pmatrix}$$

wo die Grössen $\varphi_{c,b}^{(a,b)}$ aus den Grössen φ_{cb} hervorgehen, wenn darin an Stelle von

$$f_{00}, \quad f_{01}, \quad f_{02}, \quad \ldots, \quad f_{0r}$$

beziehungsweise

$$H_0^{(a,b)}, \quad H_1^{(a,b)}, \quad H_2^{(a,b)}, \quad \ldots, \quad H_r^{(a,b)}$$

gesetzt wird. Die Grössen $\varphi_{c,b}^{(a,b)}$ sind daher *ganze rationale Functionen der ersten, zweiten und dritten Ableitungen von ξ_0 und im besonderen lineare Functionen der dritten Ableitungen.*

Eine einfache Ueberlegung zeigt, dass es so weiter geht, und dass schliesslich jede μte Ableitung von x_0 durch die Ableitungen von ξ_0 der Ordnungen 1, 2, 3, ..., μ in der Weise ausgedrückt wird, dass

$$(42.)\qquad \varrho^{2\mu-1} y_{a_1, a_2, \ldots, a_\mu} = \sum_b \varphi_{a_\mu, b}^{(a_1, a_2, \ldots, a_{\mu-1})} . \eta_b$$

ist, wo die Grössen $\varphi_{a_\mu, b}^{(a_1, a_2, \ldots, a_{\mu-1})}$ *ganze rationale Functionen der Ableitungen erster, zweiter, ..., μter Ordnung von ξ_0 und in Bezug auf letztere linear sind.*

Die nachher anzustellende Untersuchung erfordert ein tieferes Eingehen auf die Eigenschaften der Ausdrücke, welche die Ableitungen

$$\frac{\partial^\mu x_0}{\partial x_a^\mu} = y_{a,a,\dots,a}$$

darstellen, und zwar wird es im besonderen darauf ankommen, hierin den Coefficienten von

$$\frac{\partial^\mu \xi_0}{\partial \xi_a^\mu} = \eta_{a,a,\dots,a}$$

zu bestimmen.

Handelt es sich zunächst um y_{aa}, so ist

$$(43.)\qquad H_a^{(a)} \equiv \sum_{(b=0,1,\dots,a-1,a+1,\dots,r)} (\varphi_{ab}\varphi_{0a} - \varphi_{0b}\varphi_{aa})\eta_b . \eta_{aa} \equiv \Phi_a . \eta_{aa}$$

wo das *Congruenz*zeichen wieder bedeutet, dass alle Glieder, die η_{aa} nicht enthalten, weggelassen worden sind. In demselben Sinne ist

$$(44.)\qquad H_c^{(a)} \equiv 0, \qquad (c = 0, 1, 2, \dots, a-1, a+1, \dots, r)$$

und daher wird

$$(45.)\qquad 0 \equiv \begin{vmatrix} 0 & \eta_0 & \eta_1 & \dots & \eta_{a-1} & \eta_a & \eta_{a+1} & \dots & \eta_r \\ \varrho^2 dy_a & 0 & 0 & \dots & 0 & \Phi_a \eta_{aa} & 0 & \dots & 0 \\ dx_1 & f_{1,0} & f_{1,1} & \dots & f_{1,a-1} & f_{1,a} & f_{1,a+1} & \dots & f_{1,r} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ dx_{a-1} & f_{a-1,0} & f_{a-1,1} & \dots & f_{a-1,a-1} & f_{a-1,a} & f_{a-1,a+1} & \dots & f_{a-1,r} \\ dx_a & f_{a,0} & f_{a,1} & \dots & f_{a,a-1} & f_{a,a} & f_{a,a+1} & \dots & f_{a,r} \\ dx_{a+1} & f_{a+1,0} & f_{a+1,1} & \dots & f_{a+1,a-1} & f_{a+1,a} & f_{a+1,a+1} & \dots & f_{a+1,r} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ dx_r & f_{r,0} & f_{r,1} & \dots & f_{r,a-1} & f_{r,a} & f_{r,a+1} & \dots & f_{r,r} \end{vmatrix},$$

folglich erhält man:

$$\varrho^3 y_{aa} \equiv (-1)^a . \begin{vmatrix} \eta_0 & \eta_1 & \dots & \eta_{a-1} & \eta_a & \eta_{a+1} & \dots & \eta_r \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \Phi_a & 0 & \dots & 0 \\ f_{1,0} & f_{1,1} & \dots & f_{1,a-1} & f_{1,a} & f_{1,a+1} & \dots & f_{1,r} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ f_{a-1,0} & f_{a-1,1} & \dots & f_{a-1,a-1} & f_{a-1,a} & f_{a-1,a+1} & \dots & f_{a-1,r} \\ f_{a+1,0} & f_{a+1,1} & \dots & f_{a+1,a-1} & f_{a+1,a} & f_{a+1,a+1} & \dots & f_{a+1,r} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ f_{r,0} & f_{r,1} & \dots & f_{r,a-1} & f_{r,a} & f_{r,a+1} & \dots & f_{r,r} \end{vmatrix} . \eta_{aa}$$

oder

$$(46.)\quad \varrho^3 y_{\mathfrak{a}\mathfrak{a}} = \Phi_\mathfrak{a}\cdot\begin{vmatrix} \eta_0 & \eta_1 & \dots & \eta_{\mathfrak{a}-1} & \eta_{\mathfrak{a}+1} & \dots & \eta_r \\ f_{1,0} & f_{1,1} & \dots & f_{1,\mathfrak{a}-1} & f_{1,\mathfrak{a}+1} & \dots & f_{1,r} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ f_{\mathfrak{a}-1,0} & f_{\mathfrak{a}-1,1} & \dots & f_{\mathfrak{a}-1,\mathfrak{a}-1} & f_{\mathfrak{a}-1,\mathfrak{a}+1} & \dots & f_{\mathfrak{a}-1,r} \\ f_{\mathfrak{a}+1,0} & f_{\mathfrak{a}+1,1} & \dots & f_{\mathfrak{a}+1,\mathfrak{a}-1} & f_{\mathfrak{a}+1,\mathfrak{a}+1} & \dots & f_{\mathfrak{a}+1,r} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ f_{r,0} & f_{r,1} & \dots & f_{r,\mathfrak{a}-1} & f_{r,\mathfrak{a}+1} & \dots & f_{r,r} \end{vmatrix}\cdot\eta_{\mathfrak{a}\mathfrak{a}} = \Phi_\mathfrak{a}.\Psi_\mathfrak{a}.\eta_{\mathfrak{a}\mathfrak{a}}.$$

Nun ist

$$\Phi_\mathfrak{a} = \sum_{(\mathfrak{b}=0,1,\dots,\mathfrak{a}-1,\mathfrak{a}+1,\dots,r)} (\varphi_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}\varphi_{0\mathfrak{a}} - \varphi_{0\mathfrak{b}}\varphi_{\mathfrak{a}\mathfrak{a}})\eta_\mathfrak{b}$$

eine lineare Function von

$$\eta_1,\ \eta_2,\ \dots,\ \eta_{\mathfrak{a}-1},\ \eta_{\mathfrak{a}+1},\ \dots,\ \eta_r.$$

Dasselbe gilt von der Determinante $\Psi_\mathfrak{a}$ in Gleichung (46.). Folglich wird

$$(47.)\quad \varrho^3 y_{\mathfrak{a}\mathfrak{a}} = \Phi_\mathfrak{a}\Psi_\mathfrak{a}.\eta_{\mathfrak{a}\mathfrak{a}},$$

wo der Coefficient von $\eta_{\mathfrak{a}\mathfrak{a}}$ eine *ganze rationale Function zweiten Grades von den Grössen* $\eta_\mathfrak{b}$ *mit Ausschluss der Grösse* $\eta_\mathfrak{a}$ *ist.*

Für die Ableitungen dritter Ordnung $y_{\mathfrak{a}\mathfrak{a}\mathfrak{a}}$ wird die Ermittelung der Coefficienten von $\eta_{\mathfrak{a}\mathfrak{a}\mathfrak{a}}$ deshalb einfacher, weil jetzt der Nenner ϱ^3 in $y_{\mathfrak{a}\mathfrak{a}}$ keinen Beitrag liefert. Deshalb folgt direct aus (47.):

$$(48.)\quad \varrho^4 dy_{\mathfrak{a}\mathfrak{a}} = \varrho\Phi_\mathfrak{a}\Psi_\mathfrak{a}.\eta_{\mathfrak{a}\mathfrak{a}\mathfrak{a}}d\xi_\mathfrak{a},$$

und es ist daher:

$$\varrho^5 y_{\mathfrak{a}\mathfrak{a}\mathfrak{a}} = (-1)^\mathfrak{a}.\begin{vmatrix} \eta_0 & \eta_1 & \dots & \eta_{\mathfrak{a}-1} & \eta_\mathfrak{a} & \eta_{\mathfrak{a}+1} & \dots & \eta_r \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \varrho.\Phi_\mathfrak{a}\Psi_\mathfrak{a} & 0 & \dots & 0 \\ f_{1,0} & f_{1,1} & \dots & f_{1,\mathfrak{a}-1} & f_{1,\mathfrak{a}} & f_{1,\mathfrak{a}+1} & \dots & f_{1,r} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ f_{\mathfrak{a}-1,0} & f_{\mathfrak{a}-1,1} & \dots & f_{\mathfrak{a}-1,\mathfrak{a}-1} & f_{\mathfrak{a}-1,\mathfrak{a}} & f_{\mathfrak{a}-1,\mathfrak{a}+1} & \dots & f_{\mathfrak{a}-1,r} \\ f_{\mathfrak{a}+1,0} & f_{\mathfrak{a}+1,1} & \dots & f_{\mathfrak{a}+1,\mathfrak{a}-1} & f_{\mathfrak{a}+1,\mathfrak{a}} & f_{\mathfrak{a}+1,\mathfrak{a}+1} & \dots & f_{\mathfrak{a}+1,r} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ f_{r,0} & f_{r,1} & \dots & f_{r,\mathfrak{a}-1} & f_{r,\mathfrak{a}} & f_{r,\mathfrak{a}+1} & \dots & f_{r,r} \end{vmatrix}.\eta_{\mathfrak{a}\mathfrak{a}\mathfrak{a}},$$

oder:

$$(49.)\quad \varrho^5 y_{\mathfrak{a}\mathfrak{a}\mathfrak{a}} = \varrho\Phi_\mathfrak{a}\Psi_\mathfrak{a}^2\eta_{\mathfrak{a}\mathfrak{a}\mathfrak{a}},$$

wo der Coefficient von $\varrho\eta_{\mathfrak{a}\mathfrak{a}\mathfrak{a}}$ eine *ganze rationale Function dritten Grades von*

$$\eta_1,\ \eta_2,\ \dots,\ \eta_{\mathfrak{a}-1},\ \eta_{\mathfrak{a}+1},\ \dots,\ \eta_r$$

ist.

So geht es weiter, und es wird schliesslich für die Ableitung μter Ordnung:

$$(50.) \qquad \varrho^{2\mu-1} y_{a,a,\dots,a} \equiv \varrho^{\mu-2} \Phi_a \Psi_a^{\mu-1} \eta_{a,a,\dots,a}, \qquad (\mu = 2, 3, 4, \dots)$$

wo

$$(51.) \qquad \Phi_a = \sum_{b=0,1,\dots,a-1,a+1,\dots,r} (\varphi_{ab}\varphi_{0a} - \varphi_{0b}\varphi_{aa})\eta_b$$

und

$$(52.) \qquad \Psi_a = \begin{vmatrix} \eta_0 & \eta_1 & \dots & \eta_{a-1} & \eta_{a+1} & \dots & \eta_r \\ f_{1,0} & f_{1,1} & \dots & f_{1,a-1} & f_{1,a+1} & \dots & f_{1,r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{a-1,0} & f_{a-1,1} & \dots & f_{a-1,a-1} & f_{a-1,a+1} & \dots & f_{a-1,r} \\ f_{a+1,0} & f_{a+1,1} & \dots & f_{a+1,a-1} & f_{a+1,a+1} & \dots & f_{a+1,r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{r,0} & f_{r,1} & \dots & f_{r,a-1} & f_{r,a+1} & \dots & f_{r,r} \end{vmatrix}$$

lineare Functionen von

$$\eta_1, \ \eta_2, \ \dots, \ \eta_{a-1}, \ \eta_{a+1}, \ \dots, \ \eta_r$$

sind.

4.

Nach diesen etwas umständlichen, aber unerlässlichen Vorbereitungen gehe ich dazu über zu untersuchen, *welche Transformationen*:

$$(1.) \qquad x_0 = f_0(\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_r), \quad x_1 = f_1(\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_r), \quad \dots, \quad x_r = f_r(\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_r)$$

die Eigenschaft haben, auf irgend eine lineare homogene partielle Differentialgleichung mter Ordnung ($m \geqq 2$):

$$D(x_0) = \sum_{(a_1+a_2+\dots+a_r=0,1,2,\dots,m)} P_{a_1,a_2,\dots,a_r}(x_1, x_2, \dots, x_r) \frac{\partial^{a_1+a_2+\dots+a_r} x_0}{\partial x_1^{a_1} \partial x_2^{a_2} \dots \partial x_r^{a_r}} = 0$$

angewandt stets wieder eine solche Gleichung:

$$\Delta(\xi_0) = \sum_{(a_1+a_2+\dots+a_r=0,1,\dots,m)} \Pi_{a_1,a_2,\dots,a_r}(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_r) \frac{\partial^{a_1+a_2+\dots+a_r} \xi_0}{\partial \xi_1^{a_1} \partial \xi_2^{a_2} \dots \partial \xi_r^{a_r}} = 0$$

zu ergeben.

Zu diesem Zwecke denke ich mir die Transformation (1.) auf die Gleichung $D(x_0) = 0$ ausgeführt. Dann wird nach Gleichung (42.):

$$(53.) \qquad \frac{\partial^{a_1+a_2+\dots+a_r} x_0}{\partial x_1^{a_1} \partial x_2^{a_2} \dots \partial x_r^{a_r}} = \frac{X_{a_1,a_2,\dots,a_r}}{\varrho^{2(a_1+a_2+\dots+a_r)-1}},$$

wo $X_{\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_r}$ eine ganze rationale Function der Ableitungen erster, zweiter bis $(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_r)$-ter Ordnung bedeutet, welche in den Ableitungen höchster Ordnung linear ist, und wo

$$(12.)\qquad \varrho = -\sum_{(\mathfrak{b}=0,1,\dots,r)} \varphi_{0\mathfrak{b}}\eta_{\mathfrak{b}}$$

zu setzen ist.

Werden diese Ausdrücke für die Ableitungen von x_0 in die Gleichung $0 = D(x_0)$ eingesetzt, so ergiebt sich nach Multiplication mit ϱ^{2m-1} eine Differentialgleichung für ξ_0, deren rechte Seite eine ganze rationale Function der Ableitungen von ξ_0 von der ersten bis zur $m$ten Ordnung ist, nämlich:

$$(54.)\quad \begin{cases} 0 = \sum\limits_{(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_r=m)} P_{\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_r}(f_1, f_2, \dots, f_r) X_{\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_r} \\ \quad + \sum\limits_{(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_r=1,2,3,\dots,m-1)} P_{\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_r}(f_1, f_2, \dots, f_r) X_{\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_r}\varrho^{2(m-\alpha_1-\alpha_2-\cdots-\alpha_r)} + P_{0,0,\dots,0}(f_1, f_2, \dots, f_r)\cdot f_0\cdot\varrho^{2m-1}. \end{cases}$$

Das erste Glied der rechten Seite lässt sich in der Form schreiben:

$$\sum_{(\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_r=m)} Q_{\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_r} \frac{\partial^{\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_r}\xi_0}{\partial\xi_1^{\beta_1}\partial\xi_2^{\beta_2}\dots\partial\xi_r^{\beta_r}} + R,$$

dabei ist R eine ganze rationale Function der Ableitungen von ξ_0 von der ersten bis zur $(m-1)$-ten Ordnung, und die Grössen $Q_{\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_r}$ sind lineare homogene Functionen von den Grössen $P_{\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_r}$, deren Coefficienten, wie man sich leicht überzeugt, ausser $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_r$ selbst nur die ersten Ableitungen von ξ_0 enthalten können.

Es ist unmöglich, dass sämmtliche Grössen $Q_{\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_r}$ identisch verschwinden, denn es ist begrifflich klar, dass die Transformation (1.) die Differentialgleichung $m$ter Ordnung $D(x_0) = 0$ nicht in eine Differentialgleichung niedrigerer Ordnung überführen kann. Daher ist mindestens eine der Grössen $Q_{\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_r}$ von Null verschieden. Der folgende Beweis erfordert aber, dass mindestens eine der Grössen Q, bei denen $m-1$ der Indices gleich Null, der übrigbleibende also gleich m ist, oder mit anderen Worten mindestens einer der Coefficienten der Ableitungen

$$\frac{\partial^m\xi_0}{\partial\xi_\mathfrak{a}^m} \qquad (\mathfrak{a} = 1, 2, \dots, m)$$

von Null verschieden ist.

Dies erreiche ich so. An Stelle von $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_r$ führe ich neue

Veränderliche $\mathfrak{x}_0, \mathfrak{x}_1, \dots, \mathfrak{x}_r$ durch die linearen homogenen Gleichungen ein:

$$(55.)\quad \begin{cases} \mathfrak{x}_0 = \xi_0, \\ \mathfrak{x}_1 = c_{11}\xi_1 + c_{12}\xi_2 + \cdots + c_{1r}\xi_r, \\ \mathfrak{x}_2 = c_{21}\xi_1 + c_{22}\xi_2 + \cdots + c_{2r}\xi_r, \\ \dots \\ \mathfrak{x}_r = c_{r1}\xi_1 + c_{r2}\xi_2 + \cdots + c_{rr}\xi_r. \end{cases}$$

Dann ist

$$\frac{\partial \xi_0}{\partial \xi_{\mathfrak{a}}} = \sum_{\mathfrak{b}} \frac{\partial \mathfrak{x}_0}{\partial \mathfrak{x}_{\mathfrak{b}}} c_{\mathfrak{b}\mathfrak{a}},$$

$$\frac{\partial^2 \xi_0}{\partial \xi_{\mathfrak{a}_1} \partial \xi_{\mathfrak{a}_2}} = \sum_{\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2} \frac{\partial^2 \mathfrak{x}_0}{\partial \mathfrak{x}_{\mathfrak{b}_1} \partial \mathfrak{x}_{\mathfrak{b}_2}} c_{\mathfrak{b}_1\mathfrak{a}_1} c_{\mathfrak{b}_2\mathfrak{a}_2}$$

und allgemein:

$$(56.)\quad \frac{\partial^\mu \xi_0}{\partial \xi_{\mathfrak{a}_1} \partial \xi_{\mathfrak{a}_2} \dots \partial \xi_{\mathfrak{a}_\mu}} = \sum_{\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2, \dots, \mathfrak{b}_\mu} \frac{\partial^\mu \mathfrak{x}_0}{\partial \mathfrak{x}_{\mathfrak{b}_1} \partial \mathfrak{x}_{\mathfrak{b}_2} \dots \partial \mathfrak{x}_{\mathfrak{b}_\mu}} c_{\mathfrak{b}_1\mathfrak{a}_1} c_{\mathfrak{b}_2\mathfrak{a}_2} \dots c_{\mathfrak{b}_\mu\mathfrak{a}_\mu},$$

der Coefficient von $\frac{\partial^\mu \xi_0}{\partial \xi_{\mathfrak{b}}^\mu}$ in (56.) also gleich

$$c_{\mathfrak{b}\mathfrak{a}_1} c_{\mathfrak{b}\mathfrak{a}_2} \dots c_{\mathfrak{b}\mathfrak{a}_\mu}.$$

Wendet man (55.) auf die Gleichung (54.) an, so wird in der transformirten Gleichung der Coefficient von $\frac{\partial^m \mathfrak{x}_0}{\partial \mathfrak{x}_{\mathfrak{a}}^m}$ gleich:

$$(57.)\quad \sum_{(\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_r = m)} Q_{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r} \cdot c_{\mathfrak{a}1}^{\beta_1} c_{\mathfrak{a}2}^{\beta_2} \dots c_{\mathfrak{a}r}^{\beta_r},$$

und da nicht alle Grössen $Q_{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r}$ identisch verschwinden können, so lassen sich die r^2 Constanten

$$c_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}} \qquad (\mathfrak{a}, \mathfrak{b} = 1, 2, \dots, r)$$

stets so bestimmen, dass sowohl ihre Determinante als auch der Ausdruck (57.) von Null verschieden ist.

Führt man jetzt die lineare Transformation (55.) auch an der linearen homogenen partiellen Differentialgleichung $\Delta(\xi_0) = 0$ aus, so erkennt man sofort, dass sie wieder in eine solche Gleichung übergeht. Bei der Lösung der Aufgabe, alle Transformationen (1.) zu finden, welche jede Gleichung $D(x_0) = 0$ in eine Gleichung $\Delta(\xi_0) = 0$ überführen, darf man also voraussetzen, dass die transformirte Gleichung Glieder mit den Ableitungen

$$\frac{\partial^m \xi_0}{\partial \xi_{\mathfrak{a}}^m}$$

wirklich aufweist, ***wenn man sich vorbehält, zu den so gefundenen Transformationen noch eine allgemeine lineare Transformation*** (55.) ***hinzuzufügen.***

Nachdem dies festgesetzt ist, nehme ich, da $D(x_0) = 0$ eine beliebige lineare homogene partielle Differentialgleichung $m$ter Ordnung sein sollte, im besonderen die Gleichung:

$$(58.)\qquad 0 = \frac{\partial^m x_0}{\partial x_\alpha^m} + \underset{(a_1+a_2+\cdots+a_r = 0,1,2,\ldots,m-1)}{\Sigma P_{a_1,a_2,\ldots,a_r}}(x_1, x_2, \ldots, x_r)\frac{\partial^{a_1+a_2+\cdots+a_r} x_0}{\partial x_1^{a_1}\partial x_2^{a_2}\ldots\partial x_r^{a_r}}$$

und erhalte vermöge (50.) die transformirte Gleichung:

$$(59.)\qquad \begin{cases} 0 = \varrho^{m-2}\Phi_\alpha \Psi_\alpha^{m-1}\dfrac{\partial^m \xi_0}{\partial \xi_\alpha^m} + \mathfrak{G} \\ \qquad + \underset{(a_1+a_2+\cdots+a_r = 1,2,3,\ldots,m-1)}{\Sigma P_{a_1,a_2,\ldots,a_r}}(f_1, f_2, \ldots, f_r) X_{a_1,a_2,\ldots,a_r}\varrho^{2(m-a_1-a_2-\cdots-a_r)} \\ \qquad\qquad + P_{0,0,\ldots,0}(f_1, f_2, \ldots, f_r) f_0 \varrho^{2m-1}, \end{cases}$$

wo $\mathfrak{G}$ eine ganze rationale Function der Ableitungen von ξ_0 von der ersten bis zur $m$ten Ordnung mit Ausnahme von $\dfrac{\partial^m \xi_0}{\partial \xi_\alpha^m}$ bedeutet.

Jetzt darf ich voraussetzen, dass der Coefficient von $\dfrac{\partial^m \xi_0}{\partial \xi_\alpha^m}$ von Null verschieden ist, daher ist die Division mit

$$\varrho^{m-2}\Phi_\alpha \Psi_\alpha^{m-1}$$

gestattet, und es geht aus (59.) die Gleichung hervor:

$$(60.)\qquad \begin{cases} 0 = \dfrac{\partial^m \xi_0}{\partial \xi_\alpha^m} + \dfrac{\mathfrak{G}}{\varrho^{m-2}\Phi_\alpha \Psi_\alpha^{m-1}} \\ \qquad + \underset{(a_1+a_2+\cdots+a_r = 1,2,\ldots,m-1)}{\Sigma P_{a_1,a_2,\ldots,a_r}}(f_1, f_2, \ldots, f_r)\dfrac{X_{a_1,a_2,\ldots,a_r}\cdot \varrho^{m+2-2(a_1+a_2+\cdots+a_r)}}{\Phi_\alpha \Psi_\alpha^{m-1}} \\ \qquad\qquad + P_{0,0,\ldots,0}(f_1, f_2, \ldots, f_r)\dfrac{f_0 \varrho^{m+1}}{\Phi_\alpha \Psi_\alpha^{m-1}}. \end{cases}$$

Nun soll durch die Transformation (1.) $D(x_0) = 0$ in $\Delta(\xi_0) = 0$ übergehen, mithin enthält auch $\Delta(\xi_0)$ die Ableitung $\dfrac{\partial^m \xi_0}{\partial \xi_\alpha^m}$, deren Coefficient unbeschadet der Allgemeinheit gleich 1 angenommen werden darf. Es ist also:

$$(61.)\qquad 0 = \frac{\partial^m \xi_0}{\partial \xi_\alpha^m} + \underset{(a_1+a_2+\cdots+a_r = 0,1,2,\ldots,m)}{\Sigma' \Pi_{a_1,a_2,\ldots,a_r}}(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_r)\frac{\partial^{a_1+a_2+\cdots+a_r}\xi_0}{\partial \xi_1^{a_1}\partial \xi_2^{a_2}\ldots\partial \xi_r^{a_r}},$$

wo der Strich bei der Summe andeutet, dass die Combination:

$$\alpha_1 = 0, \quad \ldots, \quad \alpha_{a-1} = 0, \quad \alpha_a = m, \quad \alpha_{a+1} = 0, \quad \ldots, \quad \alpha_r = 0$$

auszuschliessen ist.

Durch Vergleichung von (60.) und (61.) folgt:

$$(62.)\quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{\mathfrak{S}}{\varrho^{m-2}\,\Phi_a \Psi_a^{m-1}} + \sum_{(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_r = 1, 2, \ldots, m-1)} P_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_r}(f_1, f_2, \ldots, f_r) \cdot \frac{X_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_r} \cdot \varrho^{m+2-2(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_r)}}{\Phi_a \Psi_a^{m-1}} \\ & \qquad + P_{0,0,\ldots,0}(f_1, f_2, \ldots, f_r) \frac{f_0\,\varrho^{m+1}}{\Phi_a \Psi_a^{m-1}} \\ & = \sum_{(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_r = 0, 1, 2, \ldots, m)}' \Pi_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_r}(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_r) \frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_r} \xi_0}{\partial \xi_1^{\alpha_1} \partial \xi_2^{\alpha_2} \ldots \partial \xi_r^{\alpha_r}}. \end{aligned} \right.$$

Diese Gleichung aber muss *identisch* bestehen, wenn den Grössen

$$\xi_0, \quad \xi_1, \quad \ldots, \quad \xi_r, \quad \frac{\partial \xi_0}{\partial \xi_1}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial \xi_0}{\partial \xi_r}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial^m \xi_0}{\partial \xi_1^m}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial^m \xi_0}{\partial \xi_r^m}$$

$\left(\text{ausgenommen } \frac{\partial^m \xi_0}{\partial \xi_a^m}\right)$ willkürliche Werthe beigelegt werden. Denn man darf ihnen willkürliche Anfangswerthe geben, wodurch dann vermöge $\varDelta(\xi_0) = 0$ der Anfangswerth von

$$\frac{\partial^m \xi_0}{\partial \xi_a^m}$$

bestimmt ist. ***Dieses fundamentale Princip der Verwandelung einer Relation zwischen einer Function und ihren Ableitungen in eine Identität*** habe ich schon in meiner oben angegebenen Note benutzt, und wie es dort die Lösung der Aufgabe für gewöhnliche Differentialgleichungen ermöglichte, so wird es hier dasselbe für den allgemeineren Fall der partiellen Differentialgleichungen leisten.

5.

In der Identität (62.) sind die Coefficienten $P_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_r}$ ganz willkürlich. Sie kann daher nur bestehen, wenn die Ausdrücke:

$$\frac{\mathfrak{S}}{\varrho^{m-2}\,\Phi_a \Psi_a^{m-1}}, \quad P_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_r}(f_1, f_2, \ldots, f_r) \frac{X_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_r} \cdot \varrho^{m+2-2(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_r)}}{\Phi_a \Psi_a^{m-1}},$$

$$P_{0,0,\ldots,0}(f_1, f_2, \ldots, f_r) \frac{f_0\,\varrho^{m+1}}{\Phi_a \Psi_a^{m-1}}$$

sämmtlich jeder für sich lineare homogene Functionen von ξ_0 und seinen Ableitungen bis zur mten Ordnung $\left(\textit{mit Ausschluss von } \frac{\partial^m \xi_0}{\partial \xi_a^m}\right)$ *sind.*

Der letzte dieser Ausdrücke,

$$P_{0,0,\dots,0}(f_1, f_2, \dots, f_r) \frac{f_0 \varrho^{m+1}}{\Phi_a \Psi_a^{m-1}},$$

enthält nur

$$\xi_0, \quad \xi_1, \quad \xi_2, \quad \dots, \quad \xi_r, \quad \frac{\partial \xi_0}{\partial \xi_1}, \quad \frac{\partial \xi_0}{\partial \xi_2}, \quad \dots, \quad \frac{\partial \xi_0}{\partial \xi_r},$$

denn es waren ϱ, Φ_a und Ψ_a lineare Functionen der ersten Ableitungen von ξ_0, nämlich:

$$(12.) \qquad \varrho = -\sum_{(b=0,1,\dots,r)} \varphi_{0b} \eta_b,$$

$$(51.) \qquad \Phi_a = \sum_{(b=0,1,\dots,a-1,a+1,\dots,r)} (\varphi_{ab} \varphi_{0a} - \varphi_{0b} \varphi_{aa}) \eta_b,$$

$$(52.) \qquad \Psi_a = \begin{vmatrix} \eta_0 & \eta_1 & \dots & \eta_{a-1} & \eta_{a+1} & \dots & \eta_r \\ f_{1,0} & f_{1,1} & \dots & f_{1,a-1} & f_{1,a+1} & \dots & f_{1,r} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ f_{a-1,0} & f_{a-1,1} & \dots & f_{a-1,a-1} & f_{a-1,a+1} & \dots & f_{a-1,r} \\ f_{a+1,0} & f_{a+1,1} & \dots & f_{a+1,a-1} & f_{a+1,a+1} & \dots & f_{a+1,r} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ f_{r,0} & f_{r,1} & \dots & f_{r,a-1} & f_{r,a+1} & \dots & f_{r,r} \end{vmatrix}.$$

Mithin muss der Ausdruck

$$\frac{\varrho^{m+1}}{\Phi_a \Psi_a^{m-1}}$$

eine ganze lineare Function von $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_r$ sein. Der Zähler ist aber eine ganze rationale Function dieser Grössen vom Grade $m+1$, der Nenner eine solche Function vom Grade m. Jetzt sind zwei Möglichkeiten vorhanden, entweder heben sich Linearfactoren des Zählers gegen solche des Nenners auf, oder dies ist nicht der Fall.

Im ersten Falle ist ϱ algebraisch theilbar durch Φ_a oder Ψ_a, während diese linearen Functionen η_a nicht enthalten. Mithin darf auch in ϱ die Ableitung

$$\eta_a = \frac{\partial \xi_0}{\partial \xi_a}$$

nicht vorkommen, also ist identisch:

$$\varphi_{0a} = 0.$$

Im zweiten Falle kommen $\eta_1, \ldots, \eta_{\mathfrak{a}-1}, \eta_{\mathfrak{a}+1}, \ldots, \eta_r$ im Nenner nur scheinbar vor, und $\Phi_\mathfrak{a}$ und $\Psi_\mathfrak{a}$ sind in Wirklichkeit von diesen Grössen unabhängig. Dann muss der Zähler für sich eine lineare Function von $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_r$ sein, während er doch die $(m+1)$-te Potenz einer solchen Function ist. Dieser Widerspruch wird nur gehoben, wenn auch ϱ von $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_r$ unabhängig, wenn also identisch

$$\varphi_{01} = 0, \quad \varphi_{02} = 0, \quad \ldots, \quad \varphi_{0r} = 0$$

ist.

Da nun jede Gleichung $D(x_0) = 0$ vermöge der Transformation (1.) in $\Delta(\xi_0) = 0$ übergeführt werden soll, so darf die vorstehende Ueberlegung für

$$\mathfrak{a} = 1, \ 2, \ 3, \ \ldots, \ r$$

angestellt werden. Mithin ergiebt sich unter allen Umständen, dass die r Gleichungen:

$$\varphi_{01} = 0, \quad \varphi_{02} = 0, \quad \ldots, \quad \varphi_{0r} = 0$$

identisch erfüllt sein müssen.

Gerade diese Gleichungen traten aber bereits im ersten Abschnitte als Gleichungen (14.) auf, und dort wurde gezeigt, dass sie die Gleichungen

$$\frac{\partial f_1}{\partial \xi_0} = 0, \quad \frac{\partial f_2}{\partial \xi_0} = 0, \quad \ldots, \quad \frac{\partial f_r}{\partial \xi_0} = 0$$

nach sich ziehen, welche besagen, ***dass bei der gesuchten Transformation die Variablen*** $x_1, x_2, \ldots, x_r$ ***einerseits und*** $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_r$ ***andererseits nur unter sich transformirt werden,*** dass man also hat:

$$(17.) \quad x_1 = f_1(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_r), \quad x_2 = f_2(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_r), \quad \ldots, \quad x_r = f_r(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_r).$$

Bestehen aber die Gleichungen (17.), so wird wegen $\eta_0 = -1$:

$$(51'.) \qquad \Phi_\mathfrak{a} = \varphi_{00}\varphi_{\mathfrak{a}\mathfrak{a}}$$

sowie

$$(52'.) \qquad \Psi_\mathfrak{a} = -\operatorname{adj} f_{\mathfrak{a}\mathfrak{a}}$$

und

$$(12'.) \qquad \varrho = -\varphi_{00} = -\frac{\partial f_0}{\partial \xi_0} \cdot \frac{\partial(f_1, f_2, \ldots, f_r)}{\partial(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_r)},$$

und die rechten Seiten enthalten nur $\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_r$, dagegen nicht mehr $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_r$.

Weitere Resultate ergeben sich daraus, dass die Ausdrücke:

$$P_{a_1, a_2, \ldots, a_r}(f_1, f_2, \ldots, f_r) \frac{X_{a_1, a_2, \ldots, a_r} \cdot \varrho^{m-2}}{\Phi_\mathfrak{a} \Psi_\mathfrak{a}^{m-1}} \qquad (a_1 + a_2 + \cdots + a_r = 2)$$

lineare homogene Functionen von

$$\xi_0,\ \xi_1,\ \xi_2,\ \ldots,\ \xi_r,\ \frac{\partial \xi_0}{\partial \xi_1},\ \ldots,\ \frac{\partial \xi_0}{\partial \xi_r},\ \frac{\partial^2 \xi_0}{\partial \xi_1^2},\ \ldots,\ \frac{\partial^2 \xi_0}{\partial \xi_r^2}$$

sein müssen. Hieraus folgt nämlich, *dass vermöge der Transformation*

$$(63.)\quad \begin{cases} x_0 = f_0(\xi_0, \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_r), \\ x_1 = f_1(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_r),\ x_2 = f_2(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_r),\ \ldots,\ x_r = f_r(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_r) \end{cases}$$

die zweiten Ableitungen von x_0, also die Grössen y_{ab}, ganze lineare Functionen der ersten und zweiten Ableitungen von ξ_0, also der Grössen $\eta_1, \ldots, \eta_r$, $\eta_{11}, \ldots, \eta_{rr}$ werden müssen. Nun zeigen die Formeln des zweiten Abschnittes, dass die y_{ab} zwar *linear* in den $\eta_{11}, \ldots, \eta_{rr}$, aber vom *zweiten* Grade in den $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_r$ sind. Die Transformation (63.) ist daher der Bedingung zu unterwerfen, *dass die Coefficienten dieser Glieder zweiten Grades in $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_r$ identisch verschwinden.*

Nach Gleichung (38.) ist der Coefficient von η_b^2 in y_{aa} gleich

$$-\frac{1}{\varphi_{00}^2}[\operatorname{adj} f_{ab}]^2 \cdot \frac{\partial^2 f_0}{\partial \xi_0^2},$$

es bestehen mithin die r^2 Gleichungen:

$$(64.)\qquad [\operatorname{adj} f_{ab}]^2 \cdot \frac{\partial^2 f_0}{\partial \xi_0^2} = 0. \qquad (a, b = 1, 2, 3, \ldots, r)$$

Diese Gleichungen lassen sich aber nur befriedigen durch

$$(65.)\qquad \frac{\partial^2 f_0}{\partial \xi_0^2} = 0.$$

Wäre nämlich $\frac{\partial^2 f_0}{\partial \xi_0^2}$ von Null verschieden, so würden die r Gleichungen

$$\operatorname{adj} f_{ab} = 0 \qquad (b = 1, 2, 3, \ldots, r)$$

bestehen, und es wäre daher auch

$$\sum_{(b=1,2,\ldots,r)} f_{ab} \operatorname{adj} f_{ab} = \frac{\partial(f_1, f_2, \ldots, f_r)}{\partial(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_r)} = 0,$$

was ausgeschlossen ist.

Mithin ist

$$(66.)\qquad f_0 = \xi_0 . g(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_r) + h(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_r),$$

sodass man auf die Transformation

$$(67.)\quad \begin{cases} x_0 = \xi_0 . g(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_r) + h(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_r), \\ x_1 = f_1(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_r),\ x_2 = f_2(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_r),\ \ldots,\ x_r = f_r(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_r) \end{cases}$$

geführt wird, welche jetzt genauer untersucht werden soll.

6.

Es ist vortheilhaft, die Transformation (67.) in zwei Transformationen zu zerlegen, nämlich zuerst:

$$(68.)\quad x_0 = \xi'_0, \quad x_1 = f_1(\xi'_1, \dots, \xi'_r), \quad \dots, \quad x_r = f_r(\xi'_1, \dots, \xi'_r)$$

und darauf

$$(69.)\quad \xi'_0 = \xi_0 g(\xi_1, \dots, \xi_r) + h(\xi_1, \dots, \xi_r), \quad \xi'_1 = \xi_1, \quad \dots, \quad \xi'_r = \xi_r$$

vorzunehmen.

Bei (68.) wird

$$f_{01} = 0, \quad f_{02} = 0, \quad \dots, \quad f_{0r} = 0$$

und daher auch

$$\varphi_{10} = 0, \quad \varphi_{20} = 0, \quad \dots, \quad \varphi_{r0} = 0.$$

Daher ist

$$(70.)\quad y_a = \frac{-1}{\varphi_{00}} \sum_b \varphi_{ab}\eta_b = \sum_b \psi_{ab}\eta_b$$

eine lineare homogene Function der r Ableitungen

$$\frac{\partial \xi'_0}{\partial \xi'_1}, \quad \frac{\partial \xi'_0}{\partial \xi'_2}, \quad \dots, \quad \frac{\partial \xi'_0}{\partial \xi'_r},$$

deren Coefficienten ψ_{ab} unabhängig von ξ'_0 und Functionen allein von ξ'_1, $\xi'_2, \dots, \xi'_r$ sind. Folglich wird:

$$(71.)\quad dy_a = \sum_{(c,b=1,2,\dots,r)} \left(\frac{\partial \psi_{ab}}{\partial \xi'_c}\eta_b + \psi_{ab}\eta_{bc}\right) d\xi'_c = \sum_c K_c^{(a)} d\xi'_c$$

und

$$(72.)\quad 0 = \begin{vmatrix} 0 & -1 & \eta_1 & \eta_2 & \dots & \eta_r \\ dy_a & 0 & K_1^{(a)} & K_2^{(a)} & \dots & K_r^{(a)} \\ dx_1 & 0 & f_{11} & f_{12} & \dots & f_{1r} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ dx_r & 0 & f_{r1} & f_{r2} & \dots & f_{rr} \end{vmatrix},$$

also:

$$(73.)\quad 0 = \begin{vmatrix} dy_a & K_1^{(a)} & K_2^{(a)} & \dots & K_r^{(a)} \\ dx_1 & f_{11} & f_{12} & \dots & f_{1r} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ dx_r & f_{r1} & f_{r2} & \dots & f_{rr} \end{vmatrix}.$$

Mithin wird y_{ab} eine lineare homogene Function von $K_1^{(a)}, \dots, K_r^{(a)}$, deren Coefficienten nur von $\xi'_1, \dots, \xi'_r$ abhängen. Da aber die $K_1^{(a)}, \dots, K_r^{(a)}$ selbst

lineare homogene Functionen von $\eta_0, \ldots, \eta_r; \eta_{11}, \ldots, \eta_{rr}$ sind, deren Coefficienten nur $\xi'_1, \ldots, \xi'_r$ enthalten, so gilt dasselbe auch von den y_{ab}, es ist mithin:

$$(74.)\qquad y_{ab} = \sum_c \psi_{ab}^{(c)}\eta_c + \sum_{c,b}\psi_{ab}^{(c,b)}\eta_{cb},$$

wo die $\psi_{ab}^{(c)}$ und $\psi_{ab}^{(c,b)}$ nur von $\xi'_1, \xi'_2, \ldots, \xi'_r$ abhängen.

Hieraus folgt

$$(75.)\qquad dy_{ab} = \sum_c\left\{\sum_b\left(\frac{\partial\psi_{ab}^{(b)}}{\partial\xi'_c}\eta_b + \psi_{ab}^{(b)}\eta_{bc}\right) + \sum_{b,e}\left(\frac{\partial\psi_{ab}^{(b,e)}}{\partial\xi'_c}\eta_{be} + \psi_{ab}^{(b,e)}\eta_{bec}\right)\right\}d\xi'_c,$$

woraus hervorgeht, dass auch die dritten Ableitungen von x_0 lineare homogene Functionen der ersten, zweiten und dritten Ableitungen von ξ'_0 sind, deren Coefficienten nur die unabhängigen Veränderlichen $\xi'_1, \xi'_2, \ldots, \xi'_r$ enthalten.

So geht es weiter, und *die μten Ableitungen von x_0 werden lineare homogene Functionen der ersten, zweiten bis μten Ableitungen von ξ'_0, in deren Coefficienten nur die unabhängigen Veränderlichen $\xi'_1, \xi'_2, \ldots, \xi'_r$ vorkommen.*

Alle Transformationen (68.) *haben daher die Eigenschaft, jede lineare homogene partielle Differentialgleichung $D(x_0) = 0$ in eine ebensolche Gleichung $\Delta'(\xi'_0) = 0$ zu verwandeln.*

Ich komme jetzt zu der Transformation:

$$(69.)\qquad \xi'_0 = \xi_0 g(\xi_1, \ldots, \xi_r) + h(\xi_1, \ldots, \xi_r),\quad \xi'_1 = \xi_1, \ldots, \xi'_r = \xi_r.$$

Bei ihr ist einfach:

$$(76.)\qquad \frac{\partial\xi'_0}{\partial\xi'_a} = \frac{\partial\xi_0}{\partial\xi_a}g(\xi_1, \ldots, \xi_r) + \xi_0\frac{\partial g}{\partial\xi_a} + \frac{\partial h}{\partial\xi_a},$$

$$(77.)\qquad \frac{\partial^2\xi'_0}{\partial\xi'_a\partial\xi'_b} = \frac{\partial^2\xi_0}{\partial\xi_a\partial\xi_b}g + \frac{\partial\xi_0}{\partial\xi_a}\frac{\partial g}{\partial\xi_b} + \frac{\partial\xi_0}{\partial\xi_b}\frac{\partial g}{\partial\xi_a} + \xi_0\frac{\partial^2 g}{\partial\xi_a\partial\xi_b} + \frac{\partial^2 h}{\partial\xi_a\partial\xi_b}$$

und so weiter. *Die Ableitungen von ξ'_0 werden also ganze lineare Functionen der Ableitungen von ξ_0, deren Coefficienten nur $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_r$ enthalten.*

Vereinigt man endlich die Transformationen (68.) und (69.) zur Transformation (67.), so erkennt man, dass vermöge (67.) *die Ableitungen von x_0 in ganze lineare Functionen der Ableitungen von ξ_0 übergehen, in deren Coefficienten sich nur die unabhängigen Veränderlichen $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_r$ vorfinden.* Im besonderen gilt dies auch für die Ableitungen zweiter Ordnung, woraus folgt, dass die Transformation (67.) die allgemeinste ist, welche die am Schlusse des fünften Abschnittes aufgestellte Forderung befriedigt.

Es kommt jetzt alles darauf an zu untersuchen, welche Wirkung die Ausführung der Transformation (67.) auf die lineare homogene partielle

Differentialgleichung $D(x_0)=0$ hat. Zerlegt man (67.) in (68.) und (69.), so führt (68.) die Gleichung $D(x_0)=0$ in die lineare homogene partielle Differentialgleichung $\varDelta'(\xi_0')=0$ über. Mithin muss (69.) die Eigenschaft haben, die Gleichung $\varDelta'(\xi_0')=0$ in eine ebensolche Gleichung $\varDelta(\xi_0)=0$ zu verwandeln. Es folgt aber aus

$$(78.)\qquad \xi_0' = \xi_0 g+h,$$

dass

$$(79.)\qquad \varDelta'(\xi_0') = \varDelta'(\xi_0 g)+\varDelta'(h) = 0$$

wird. Dabei ist $\varDelta'(\xi_0 g)$ linear und homogen in Bezug auf die partiellen Ableitungen von ξ_0, folglich muss es auch $\varDelta'(h)$ sein, das heisst aber, es ist

$$(80.)\qquad \varDelta'(h) = 0,$$

h also ein Integral der Differentialgleichung $\varDelta'(\xi_0')=0$. Ebenso wie die Gleichung $D(x_0)=0$ ganz beliebig sein sollte, gilt dies auch von der Gleichung $\varDelta'(\xi_0')=0$, die aus ihr durch die Transformation (68.) entsteht, mithin muss h Integral jeder beliebigen linearen homogenen Differentialgleichung $\varDelta'(\xi_0')=0$ sein. Es ist demnach:

$$(81.)\qquad h = 0.$$

Die gesuchten Substitutionen, welche auf eine beliebige lineare homogene Differentialgleichung $m$ter Ordnung ($m\geqq 2$) angewandt wieder eine solche Gleichung ergeben, haben also nothwendig die Form:

$$(82.)\qquad \begin{cases} x_0 = \xi_0 . g(\xi_1,\ \xi_2,\ \dots,\ \xi_r), \\ x_1 = f_1(\xi_1,\ \xi_2,\ \dots,\ \xi_r),\quad \dots,\quad x_r = f_r(\xi_1,\ \xi_2,\ \dots,\ \xi_r), \end{cases}$$

wenn noch eine lineare Transformation der unabhängigen Veränderlichen ξ_1, $\xi_2, \dots, \xi_r$ gestattet wird. Da eine solche aber an der Form von (82.) gar nichts ändert, darf man auf sie verzichten, und (82.) als die allgemeinste Transformation der verlangten Art ansprechen.

Aus dem Vorhergehenden erhellt unmittelbar, dass umgekehrt auch alle Transformationen (82.) die Eigenschaft haben, $D(x_0)=0$ in $\varDelta(\xi_0)=0$ überzuführen. Mithin ist das Ergebniss gewonnen:

Theorem I.

Die einzigen Transformationen der Form

$$x_0 = f_0(\xi_0,\ \xi_1,\ \dots,\ \xi_r),\ x_1 = f_1(\xi_0,\ \xi_1,\ \dots,\ \xi_r),\ \dots,\ x_r = f_r(\xi_0,\ \xi_1,\ \dots,\ \xi_r),$$

welche die Eigenschaft haben, auf eine beliebige lineare homogene

partielle Differentialgleichung $m$ter Ordnung ($m \geqq 2$) $D(x_0) = 0$ angewandt wieder eine solche Gleichung $\varDelta(\xi_0) = 0$ zu ergeben, sind die Transformationen:

$$\text{(T.)} \quad \begin{cases} x_0 = \xi_0 . g(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_r), \\ x_1 = f_1(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_r), \quad \ldots, \quad x_r = f_r(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_r), \end{cases}$$

in denen $g, f_1, f_2, \ldots, f_r$ willkürliche Functionen von $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_r$ bedeuten, die nur der Bedingung genügen müssen, dass die Functionaldeterminante von $f_1, f_2, \ldots, f_r$ nicht identisch verschwindet.

7.

Zum Schluss gehe ich noch auf den vorher ausdrücklich ausgeschlossenen Fall $m = 1$ ein, welcher schon bei der entsprechenden Untersuchung für gewöhnliche Differentialgleichungen eine besondere Behandlung erforderte. Es sei also die lineare homogene partielle Differentialgleichung *erster Ordnung* vorgelegt:

$$\text{(83.)} \quad D(x_0) = \sum_{(\mathfrak{a}=1,2,\ldots,r)} P_{\mathfrak{a}}(x_1, x_2, \ldots, x_r) \frac{\partial x_0}{\partial x_{\mathfrak{a}}} - P_0(x_1, x_2, \ldots, x_r) . x_0 = 0,$$

und es sollen die Transformationen (1.) ermittelt werden, welche (83.) in

$$\text{(84.)} \quad \varDelta(\xi_0) = \sum_{(\mathfrak{a}=1,2,\ldots,r)} \Pi_{\mathfrak{a}}(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_r) \frac{\partial \xi_0}{\partial \xi_{\mathfrak{a}}} - \Pi_0(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_r) . \xi_0 = 0$$

überführen. Setzt man

$$\text{(85.)} \quad \log x_0 = X_0, \quad \log \xi_0 = \Xi_0,$$

so handelt es sich darum, die Transformationen:

$$\text{(86.)} \quad \begin{cases} X_0 = F_0(\Xi_0, \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_r), \\ x_1 = F_1(\Xi_0, \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_r), \quad \ldots, \quad x_r = F_r(\Xi_0, \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_r) \end{cases}$$

zu finden, welche

$$\text{(87.)} \quad \sum_{\mathfrak{a}} P_{\mathfrak{a}}(x_1, \ldots, x_r) \frac{\partial X_0}{\partial x_{\mathfrak{a}}} - P_0(x_1, \ldots, x_r) = 0$$

in

$$\text{(88.)} \quad \sum_{\mathfrak{a}} \Pi_{\mathfrak{a}}(\xi_1, \ldots, \xi_r) \frac{\partial \Xi_0}{\partial \xi_{\mathfrak{a}}} - \Pi_0(\xi_1, \ldots, \xi_r) = 0$$

verwandeln.

Die Formeln des ersten Abschnittes lassen sich leicht der Transformation (86.) anpassen und ergeben:

$$\frac{\partial X_0}{\partial x_{\mathfrak{a}}} = Y_{\mathfrak{a}}, \quad \frac{\partial \Xi_0}{\partial \xi_{\mathfrak{b}}} = H_{\mathfrak{b}}; \quad Y_{\mathfrak{a}} = -\frac{\sum_{\mathfrak{b}} \Phi_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}} H_{\mathfrak{b}}}{\sum_{\mathfrak{b}} \Phi_{0\mathfrak{b}} H_{\mathfrak{b}}}.$$

Daher folgt aus (87.):

$$\sum_{(\mathfrak{a},\mathfrak{b}=0,1,2,\dots,r)} P_{\mathfrak{a}}(F_1, \dots, F_r)\Phi_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}} H_{\mathfrak{b}} = 0, \tag{89.}$$

und sollen (88.) und (89.) gleichbedeutend sein, so dürfen die Verhältnisse der $r+1$ Coefficienten:

$$\sum_{(\mathfrak{a}=0,1,\dots,r)} P_{\mathfrak{a}}\Phi_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}} \qquad (\mathfrak{b}=0,1,\dots,r)$$

nur von $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_r$ abhängen, ihre Ableitungen nach Ξ_0 müssen also identisch verschwinden. Mithin ist

$$0 = \frac{\partial}{\partial \Xi_0} \frac{\sum_{\mathfrak{a}} P_{\mathfrak{a}}(F_1, \dots, F_r)\Phi_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}}{\sum_{\mathfrak{a}} P_{\mathfrak{a}}(F_1, \dots, F_r)\Phi_{\mathfrak{a}\mathfrak{c}}} \qquad (\mathfrak{b}, \mathfrak{c} = 0, 1, 2, \dots, r) \tag{90.}$$

oder:

$$\left\{\begin{aligned} 0 = &\sum_{\mathfrak{a}} P_{\mathfrak{a}}\Phi_{\mathfrak{a}\mathfrak{c}} \left\{ \sum_{\mathfrak{a}} P_{\mathfrak{a}} \frac{\partial \Phi_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}}{\partial \Xi_0} + \sum_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} \frac{\partial P_{\mathfrak{a}}}{\partial F_{\mathfrak{b}}} \frac{\partial F_{\mathfrak{b}}}{\partial \Xi_0} \Phi_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}} \right\} \\ &- \sum_{\mathfrak{a}} P_{\mathfrak{a}}\Phi_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}} \left\{ \sum_{\mathfrak{a}} P_{\mathfrak{a}} \frac{\partial \Phi_{\mathfrak{a}\mathfrak{c}}}{\partial \Xi_0} + \sum_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} \frac{\partial P_{\mathfrak{a}}}{\partial F_{\mathfrak{b}}} \frac{\partial F_{\mathfrak{b}}}{\partial \Xi_0} \Phi_{\mathfrak{a}\mathfrak{c}} \right\}. \end{aligned}\right. \tag{91.}$$

Da nun die Coefficienten $P_{\mathfrak{a}}$ willkürliche Functionen von $x_1, x_2, \dots, x_r$ sind, so kann (90.) nur dann identisch bestehen, wenn in der entwickelten Gleichung die Coefficienten aller Glieder $P_0 \cdot \frac{\partial P_{\mathfrak{a}}}{\partial F_{\mathfrak{b}}}$ für sich identisch verschwinden; es ist also:

$$(\Phi_{0\mathfrak{c}}\Phi_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}} - \Phi_{0\mathfrak{b}}\Phi_{\mathfrak{a}\mathfrak{c}}) \frac{\partial F_{\mathfrak{b}}}{\partial \Xi_0} = 0. \qquad \left(\begin{smallmatrix}\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c} = 0, 1, 2, \dots, r; \\ \mathfrak{b} = 1, 2, \dots, r\end{smallmatrix}\right) \tag{92.}$$

Ertheilt man hierin dem Index $\mathfrak{b}$ einen festen Werth und nimmt an, es sei $\frac{\partial F_{\mathfrak{b}}}{\partial \Xi_0}$ von Null verschieden, so erhält man die Gleichungen:

$$\Phi_{0\mathfrak{c}}\Phi_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}} - \Phi_{0\mathfrak{b}}\Phi_{\mathfrak{a}\mathfrak{c}} = 0, \tag{93.}$$

in denen $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ noch ganz beliebig sind. Hieraus aber würde folgen, dass jede Zeile der Determinante

$$\Phi = |\Phi_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}| \qquad (\mathfrak{a}, \mathfrak{b} = 0, 1, 2, \dots, r) \tag{94.}$$

jeder anderen Zeile proportional ist, dass also Φ verschwindet, was ausgeschlossen ist, da man

$$\Phi = \left[\frac{\partial(F_0, F_1, \dots, F_r)}{\partial(\Xi_0, \xi_1, \dots, \xi_r)}\right]^r \tag{95.}$$

hat. *Folglich ziehen die Gleichungen* (92.) *nach sich, dass die Ausdrücke* F_1, $F_2, \dots, F_r$ *nur* $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_r$, *dagegen nicht* Ξ_0 *enthalten.*

Unter dieser Voraussetzung über $F_1, F_2, \ldots, F_r$ wird:

$$Y_a = -\sum_b \frac{\Phi_{ab}}{\Phi_{00}} H_b,$$

sodass (87.) übergeht in:

$$(96.) \qquad \sum_{(a,b=1,2,\ldots,r)} P_a \Phi_{ab} H_b + P_0 \Phi_{00} - P_1 \Phi_{10} - P_2 \Phi_{20} - \cdots - P_r \Phi_{r0} = 0.$$

Dabei ist nach Gleichung (36.):

$$\Phi_{ab} = F_{00} . \operatorname{adj} F_{ab}, \qquad (a, b = 1, 2, 3, \ldots, r)$$

sodass (96.) nach Division mit F_{00} übergeht in:

$$(97.) \qquad \sum_a P_a(F_1, F_2, \ldots, F_r) \operatorname{adj} F_{ab} . H_b + \frac{P_0 \Phi_{00} - \Sigma P_a \Phi_{a0}}{F_{00}} = 0,$$

wo jetzt die Coefficienten von $H_1, H_2, \ldots, H_r$ Functionen von $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_r$ allein sind. Daher muss auch

$$\frac{P_0 \Phi_{00} - \Sigma P_a \Phi_{a0}}{F_{00}}$$

eine Function von $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_r$ allein sein. Das ist aber, da $P_0, P_1, \ldots, P_r$ willkürlich sind, nur möglich, wenn es auch von den Ausdrücken

$$\frac{\Phi_{00}}{F_{00}}, \quad \frac{\Phi_{10}}{F_{00}}, \quad \ldots, \quad \frac{\Phi_{r0}}{F_{00}}$$

gilt. Nun hängt

$$\Phi_{00} = |F_{ab}| \qquad (a, b = 1, 2, \ldots, r)$$

nur von $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_r$ ab, folglich ist

$$F_{00} = \frac{\partial F_0}{\partial \Xi_0}$$

nothwendig eine Function von $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_r$ allein. Das besagt aber, dass F_0 selbst eine lineare Function von Ξ_0 ist:

$$(98.) \qquad F_0 = \Xi_0 G(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_r) + H(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_r).$$

Da nunmehr

$$F_{00} = G(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_r)$$

wird, so müssen auch

$$\Phi_{10}, \quad \Phi_{20}, \quad \ldots, \quad \Phi_{r0}$$

Functionen von $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_r$ allein sein. Das bedeutet aber nach der Definition der Grössen Φ_{a0}, dass die r Gleichungen erfüllt sind:

$$(99.) \qquad \sum_{(b=1,2,\ldots,r)} \left(\Xi_0 \frac{\partial G}{\partial \xi_b} + \frac{\partial H}{\partial \xi_b} \right) \operatorname{adj} F_{ab} = K_a(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_r),$$

aus welchen durch Auflösung folgt:

$$(100.)\qquad \Xi_0 \frac{\partial G}{\partial \xi_b} + \frac{\partial H}{\partial \xi_b} = L_b(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_r). \qquad (b = 1, 2, \ldots, r)$$

Da nun G und H nur $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_r$ enthalten, so können die Gleichungen (100.) nur bestehen, wenn die Relationen

$$(101.)\qquad \frac{\partial G}{\partial \xi_b} = 0 \qquad (b = 1, 2, \ldots, r)$$

identisch stattfinden. *Mithin ist G eine Constante, welche mit λ bezeichnet werde.*

Jede Transformation der verlangten Art, welche (87.) *in* (88.) *überführt, hat also die Gestalt*

$$(102.)\qquad \begin{cases} X_0 = \lambda \Xi_0 + H(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_r), \\ x_1 = F_1(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_r), \quad \ldots, \quad x_r = F_r(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_r). \end{cases}$$

Geht man nunmehr zu den ursprünglichen Veränderlichen zurück, so erhält man die Transformation:

$$(103.)\qquad \begin{cases} x_0 = \xi_0^\lambda . g(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_r), \\ x_1 = f_1(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_r), \quad \ldots, \quad x_r = f_r(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_r), \end{cases}$$

in welcher λ eine Constante ist und wo $g, f_1, \ldots, f_r$ willkürliche Functionen von $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_r$ bedeuten. Diese Transformation lässt sich zerlegen in die beiden:

$$(104.)\qquad x_0 = \xi_0', \quad x_1 = f_1(\xi_1', \xi_2', \ldots, \xi_r'), \quad \ldots, \quad x_r = f_r(\xi_1', \xi_2', \ldots, \xi_r')$$

und

$$(105.)\qquad \xi_0' = \xi_0^\lambda . g(\xi_1', \xi_2', \ldots, \xi_r'), \quad \xi_1' = \xi_1, \ \ldots, \ \xi_r' = \xi_r.$$

Dass die erste von ihnen jede lineare homogene partielle Differentialgleichung beliebiger, also auch erster Ordnung, in eine Gleichung derselben Art überführt, ist schon oben gezeigt worden. Die zweite ergiebt aber:

$$\frac{\partial \xi_0'}{\partial \xi_a'} = \lambda \xi_0^{\lambda-1} g \frac{\partial \xi_0}{\partial \xi_a} + \xi_0^\lambda \frac{\partial g}{\partial \xi_a},$$

sodass bei ihrer Anwendung die Gleichung:

$$\Sigma \Pi_a'(\xi_1', \xi_2', \ldots, \xi_r') \frac{\partial \xi_0'}{\partial \xi_a'} - \Pi_0'(\xi_1', \xi_2', \ldots, \xi_r') . \xi_0' = 0,$$

in welche (83.) durch (104.) verwandelt worden ist, übergeführt wird in:

$$(106.)\qquad \begin{cases} \lambda g(\xi_1, \ldots, \xi_r) \sum\limits_a \Pi_a'(\xi_1, \ldots, \xi_r) \dfrac{\partial \xi_0}{\partial \xi_a} \\ \qquad + \left(\sum\limits_a \Pi_a'(\xi_1, \ldots, \xi_r) \dfrac{\partial g}{\partial \xi_a} - \Pi_0'(\xi_1, \ldots, \xi_r) \right) \xi_0 = 0, \end{cases}$$

also wieder in eine lineare homogene partielle Differerentialgleichung erster Ordnung.

Das am Schlusse des sechsten Abschnittes ausgesprochene Theorem I. wird also *ergänzt* durch das nunmehr gewonnene

Theorem II.

Die einzigen Transformationen der Form:

$$x_0 = f_0(\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_r), \quad x_1 = f_1(\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_r), \quad \ldots, \quad x_r = f_r(\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_r),$$

welche die Eigenschaft haben, auf eine beliebige lineare homogene partielle Differentialgleichung erster Ordnung $D(x_0) = 0$ *angewandt wieder eine solche Gleichung* $\Delta(\xi_0) = 0$ *zu ergeben, sind die Transformationen:*

$$x_0 = \xi_0^\lambda g(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_r), \quad x_1 = f_1(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_r), \quad \ldots, \quad x_r = f_r(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_r),$$

in denen λ *eine willkürliche Constante ist, während* $g, f_1, f_2, \ldots, f_r$ *beliebige Functionen von* $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_r$ *bedeuten, die nur der Bedingung genügen müssen, dass die Functionaldeterminante von* $f_1, f_2, \ldots, f_r$ *nicht identisch verschwindet.*

Hiermit ist die am Anfange dieser Abhandlung gestellte Aufgabe vollständig gelöst. Zum Schluss möge nur noch bemerkt werden, dass die dabei angewandte Untersuchungsmethode weiter reicht und auch bei anderen Klassen partieller Differentialgleichungen zum Ziele führt.

Halle a. S., März 1894.

Bemerkungen zur Theorie der Fundamentalgleichung.

(Von Herrn *Ludwig Schlesinger*.)

Lässt man die unabhängige Variable x einer homogenen linearen Differentialgleichung

$$\text{(A.)}\qquad P(y) = \frac{d^n y}{dx^n} + p_1\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + p_n y = 0$$

einen geschlossenen Weg U durchlaufen, der die Coefficienten $p_1, p_2, \ldots, p_n$ zu ihren Ausgangswerthen zurückführt, so erfahren die Elemente $y_1, y_2, \ldots, y_n$ eines Fundamentalsystems eine lineare Substitution. Bezeichnen wir mit *Casorati**) durch θf das, was aus einer Function f von x wird, wenn x den Umlauf U vollzieht, so ist also:

$$\text{(1.)}\qquad \theta y_k = \sum_{h=1}^{n} a_{kh} y_h, \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

$$|a_{kh}| \neq 0, \qquad (k, h = 1, 2, \ldots, n)$$

und man nennt dann nach Herrn *Fuchs***) die Gleichung

$$\text{(B.)}\qquad F(\omega) = |a_{hk} - \delta_{hk}\omega| = 0, \qquad (h, k = 1, 2, \ldots, n)$$

wo

$$\delta_{hk} = 0 \quad \text{für} \quad h \neq k,$$
$$\delta_{hh} = 1$$

zu nehmen ist, die zum Umlaufe U gehörige *Fundamentalgleichung*. Die bekannten Arbeiten der Herren *Fuchs, Hamburger, Casorati* u. A. haben gelehrt, wie den Wurzeln der Gleichung (B.) gewisse Integrale der Differentialgleichung zugeordnet werden können, die ein Fundamentalsystem bilden, und dass diese Integrale ebenso wie die Fundamentalgleichung selbst, von der Wahl des zu Grunde gelegten Fundamentalsystems $y_1, y_2, \ldots, y_n$ unabhängig sind. Herr *Hamburger* und nach ihm besonders *Casorati* haben die Ergebnisse der Theorie der bilinearen Formen auf die Fundamental-

---

*) Annali di Matematica Ser. 2 Tom. 10 p. 10—43.

**) Dieses Journal Bd. 66 S. 133.

gleichung angewandt und dadurch Resultate von hoher Eleganz erzielt. Es soll im Folgenden versucht werden, diese Resultate herzuleiten, ohne unmittelbaren Gebrauch von der Theorie der bilinearen Formen zu machen; man kann im Gegentheil, wenn man die nachfolgenden Betrachtungen von dem analytischen Beiwerke, mit welchem sie hier dargelegt werden sollen, loslöst, auf sie eine Theorie der bilinearen Formen gründen, die mit der eleganten Darstellung, die Herr *Eduard Weyr**) dieser Theorie gegeben hat, die engsten Beziehungen zeigt.

I.

Wir beginnen mit einer neuen Definition der Fundamentalgleichung. Es seien $x_1, x_2, \ldots, x_n$ Unbestimmte (willkürliche Constanten), also

$$v = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k,$$

das allgemeine Integral der Differentialgleichung (A.). Bilden wir die $n+1$ Integrale

$$v, \quad \theta v, \quad \theta^2 v, \quad \ldots, \quad \theta^n v,$$

so ist zufolge der Gleichungen (1.)

$$\theta^\lambda v = \sum_{k=1}^{n} y_k \sum_{h=1}^{n} a_{hk}^{(\lambda)} x_h, \tag{2.}$$

wo

$$\left\{\begin{aligned} a_{hk}^{(\lambda)} &= \sum_{i=1}^{n} a_{hi}^{(\lambda-1)} a_{ik}, \\ a_{hk}^{(1)} &= a_{hk}, \quad a_{hk}^{(0)} = \delta_{hk}, \end{aligned}\right. \qquad (\lambda = 1, 2, 3, \ldots) \tag{3.}$$

gesetzt wurde. Bezeichnen wir die durch die Gleichungen (1.) dargestellte lineare Substitution durch

$$A = (a_{hk}), \qquad (h, k = 1, 2, \ldots, n)$$

so ist die λte Potenz derselben

$$A^\lambda = (a_{hk}^{(\lambda)}), \qquad (h, k = 1, 2, \ldots, n)$$

und wenn wir ferner setzen

$$\left\{\begin{aligned} x_k^{(\lambda)} &= \sum_i a_{ik}^{(\lambda)} x_i = \sum_i a_{ik} x_i^{(\lambda-1)}, \\ x_i^{(0)} &= x_i, \end{aligned}\right. \qquad (k = 1, 2, \ldots, n) \tag{4.}$$

*) Monatshefte für Mathematik, Bd. I S. 163—236.

so ist

$$\theta^\lambda v = \sum_{k=1}^{n} x_k^{(\lambda)} y_k.$$

Nehmen wir diese Gleichung für $\lambda = 0, 1, 2, \ldots, n$, so folgt, dass die Determinante

$$\begin{vmatrix} v & x_1 & x_2 & \ldots & x_n \\ \theta v & x_1' & x_2' & \ldots & x_n' \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \theta^n v & x_1^{(n)} & x_2^{(n)} & \ldots & x_n^{(n)} \end{vmatrix} = V$$

identisch verschwinden muss. Ordnen wir nach der ersten Reihe, so ist also

$$(5.) \qquad V = c_n \theta^n v + c_{n-1} \theta^{n-1} v + \cdots + c_0 v = 0$$

die zwischen den $n+1$ Integralen $\theta^\lambda v$ $(\lambda = 0, 1, \ldots, n)$ bestehende homogene lineare Relation. Die Coefficienten derselben sind durch die Gleichung

$$c_n \omega^n + c_{n-1} \omega^{n-1} + \cdots + c_0 = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_2 & \ldots & x_n \\ \omega & x_1' & x_2' & \ldots & x_n' \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \omega^n & x_1^{(n)} & x_2^{(n)} & \ldots & x_n^{(n)} \end{vmatrix}$$

definirt, wo ω eine unbestimmte Variable bedeutet. Die im zweiten Gliede dieser Gleichung stehende Determinante lässt sich schreiben

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & \ldots & x_n \\ 0 & x_1' - \omega x_1 & \ldots & x_n' - \omega x_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & x_1^{(n)} - \omega x_1^{(n-1)} & \ldots & x_n^{(n)} - \omega x_n^{(n-1)} \end{vmatrix} = |x_k^{(\lambda)} - \omega x_k^{(\lambda-1)}|, \qquad (k, \lambda = 1, 2, \ldots, n)$$

oder da zufolge der Gleichungen (4.)

$$\sum_{h=1}^{n} (a_{hk} - \delta_{hk} \omega) x_h^{(\lambda-1)} = x_k^{(\lambda)} - \omega x_k^{(\lambda-1)}$$

ist, so haben wir

$$|x_k^{(\lambda)} - \omega x_k^{(\lambda-1)}| = |x_i^{(\lambda-1)}|\,|a_{ik} - \delta_{ik} \omega|, \qquad (i, k, \lambda = 1, 2, \ldots, n)$$

d. h. es ist

$$c_n \omega^n + c_{n-1} \omega^{n-1} + \cdots + c_0 = |x_i^{(\lambda-1)}|\, F(\omega).$$

Für unbestimmte x_i, wo also die Determinante

$$|x_i^{(\lambda-1)}|$$

sicher von Null verschieden ist, stimmen demnach die Coefficienten der homogenen linearen Beziehung (5.), *die zwischen dem allgemeinen Integrale v und*

*seinen durch n-malige Wiederholung des Umlaufs U entstehenden Zweigen besteht, abgesehen von einem gemeinsamen Factor mit den Coefficienten der zu diesem Umlaufe gehörigen Fundamentalgleichung überein**). Lassen wir nun $c_n, c_{n-1}, \ldots, c_0$ direct die Coefficienten der Fundamentalgleichung $F(\omega) = 0$ bedeuten, so wird also die Gleichung (5.) durch alle v für willkürliche Wahl der $x_1, \ldots, x_n$ befriedigt. Setzen wir in (5.) die Ausdrücke (2.) ein und beachten, dass $y_1, y_2, \ldots, y_n$ ein Fundamentalsystem constituiren, so erhalten wir die Gleichungen

$$\sum_{h=1}^{n} x_h(c_n a_{hk}^{(n)} + \cdots + c_0 \delta_{hk}) = 0. \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

Diese müssen durch willkürliche $x_1, \ldots, x_n$ befriedigt werden, es müssen folglich sämmtliche Coefficienten verschwinden, d. h. wir haben

$$c_n a_{hk}^{(n)} + \cdots + c_0 \delta_{hk} = 0. \qquad (h, k = 1, 2, \ldots, n)$$

Hieraus schliessen wir, *dass die Gleichung* (5.), *wenn* $c_n, \ldots, c_0$ *die Coefficienten der Fundamentalgleichung sind, auch durch jedes specielle Integral der Differentialgleichung* (A.) *befriedigt wird.*

II.

Für specielle Werthe der $x_1, \ldots, x_n$, kann v schon einer Differentialgleichung niedrigerer, etwa μter Ordnung

$$Q(z) = 0, \qquad (\mu < n)$$

genügen (es ist hier und im Folgenden stets eine lineare homogene Differentialgleichung gemeint, deren Coefficienten beim Umlaufe U ungeändert bleiben). Sei dann

$$G(\omega) = g_\mu \omega^\mu + \cdots + g_0 = 0$$

die Fundamentalgleichung von $Q = 0$, so genügt das allgemeine Integral z von $Q = 0$ der Gleichung

$$g_\mu \theta^\mu z + g_{\mu-1} \theta^{\mu-1} z + \cdots + g_0 z = 0;$$

diese Gleichung wird also auch für $z = v$ erfüllt. *Wir fragen allgemein, wie muss eine Relation*

$$(6.) \qquad g_\mu \theta^\mu z + g_{\mu-1} \theta^{\mu-1} z + \cdots + g_0 z = 0$$

beschaffen sein, wenn dieselbe durch (nicht identisch verschwindende) Integrale v *der Differentialgleichung* (A.) *soll erfüllt werden können.*

---

*) Vergl. *Casorati*, a. a. O. S. 18 § 12.

seine Linearfactoren zerfällt

$$G(\omega) = g_\mu(\omega-e_\mu)(\omega-e_{\mu-1})\dots(\omega-e_1),$$

so folgt also durch wiederholte Anwendung der Zerlegung (14.) die Compositionsgleichung:

$$(15.)\qquad (g_\mu a_{hk}^{(\mu)}+\dots+g_0\delta_{hk}) = g_\mu^\mu(a_{hk}-\delta_{hk}e_\mu)(a_{hk}-\delta_{hk}e_{\mu-1})\dots(a_{hk}-\delta_{hk}e_1), \quad {\scriptstyle (h,\, k = 1,\, 2,\, \dots,\, n)}$$

und folglich ist die Determinante

$$(16.)\qquad |g_\mu a_{hk}^{(\mu)}+\dots+g_0\delta_{hk}| = g_\mu^\mu F(e_\mu)F(e_{\mu-1})\dots F(e_1).$$

Die Bedingungsgleichung (8.) erfordert also das Verschwinden eines oder mehrerer der im zweiten Gliede von (16.) stehenden Factoren, d. h.:

Damit es nicht identisch verschwindende Integrale v *der Differentialgleichung* (A.) *gebe, die der Gleichung* (6.) *Genüge leisten, muss* $G(\omega)$ *für eine Wurzel der Fundamentalgleichung verschwinden; bedeuten* $g_\mu, \dots, g_0$ *irgendwelche feste Grössen, die dieser Bedingung genügen, und bezeichnet* $x_1, \dots, x_n$ *das allgemeinste Lösungssystem der Gleichungen* (7.), *so stellt*

$$v = \sum_k x_k y_k$$

das allgemeinste Integral von (A.) *dar, welches die Gleichung* (6.) *erfüllt.*

Für $\mu = 1$ erhalten wir das Theorem von Herrn *Fuchs*, wonach es stets Integrale u_a' giebt, die sich beim Umlaufe U mit einer Wurzel ω_a der Fundamentalgleichung multipliciren.

Lassen wir $G(\omega) = 0$ wieder die Fundamentalgleichung der Differentialgleichung μter Ordnung $Q = 0$ bedeuten, so können wir sagen:

Haben zwei Differentialgleichungen $P = 0$, $Q = 0$ *Integrale gemein, so haben die linken Seiten ihrer Fundamentalgleichungen einen gemeinsamen Theiler.*

III.

Bedeutet $n-\tau$ den Rang des Systems

$$(g_\mu a_{hk}^{(\mu)}+\dots+g_0\delta_{hk}), \qquad {\scriptstyle (h,\, k = 1,\, 2,\, \dots,\, n)}$$

so besitzt bekanntlich das Gleichungssystem (7.) genau τ von einander linear unabhängige Lösungssysteme*)

$$x_{a1},\quad x_{a2},\quad \dots,\quad x_{an}, \qquad {\scriptstyle (a = 1,\, 2,\, \dots,\, \tau)}$$

es giebt folglich genau τ linear unabhängige Integrale

$$v_a = \sum_{k=1}^{n} x_{ak} y_k, \qquad {\scriptstyle (a = 1,\, 2,\, \dots,\, \tau)}$$

---

*) Vgl. z. B. *Weyr* a. a. O.

die die Gleichung (6.) befriedigen, und jedes andere diese Gleichung erfüllende Integral von (A.) ist durch $v_1, v_2, \ldots, v_\tau$ homogen linear mit constanten Coefficienten darstellbar. Bedeutet also $G(\omega) = 0$ die Fundamentalgleichung von $Q = 0$, so ist τ die Anzahl der linear unabhängigen Integrale, die die Differentialgleichungen $P = 0$, $Q = 0$ mit einander gemein haben. Denken wir uns die Zerlegung (9.) so ausgeführt, dass

$$L(\omega) = l_\lambda \omega^\lambda + \cdots + l_0$$

den grössten gemeinsamen Theiler von $F(\omega)$ und $G(\omega)$ bedeutet, so verschwindet

$$m_{\mu-\lambda}\omega^{\mu-\lambda} + \cdots + m_0$$

für keine Wurzel der Fundamentalgleichung $F(\omega) = 0$ von (A.), es ist also die Determinante

$$|m_{\mu-\lambda} a_{hk}^{(\mu-\lambda)} + \cdots + m_0 \delta_{hk}| \neq 0, \qquad (h,\ k = 1, 2, \ldots, n)$$

und folglich der Rang der Gleichungssysteme (7.) und (13.) derselbe. ***Man hat also, um τ zu finden, nur den Rang des zum grössten gemeinsamen Theiler von $F(\omega)$ und $G(\omega)$ gehörigen Gleichungssystems aufzusuchen.***

Sei $R = 0$ die Differentialgleichung, der die sämmtlichen gemeinsamen Integrale von $P = 0$, $Q = 0$ genügen, so ist $R = 0$ von der τten Ordnung und $v_1, v_2, \ldots, v_\tau$ bilden ein Fundamentalsystem dieser Differentialgleichung. Ferner lässt sich*) P in die Form setzen

$$P = SR,$$

wo S einen linearen Differentialausdruck $(n-\tau)$-ter Ordnung bedeutet; die Coefficienten von R und S bleiben beim Umlaufe U ungeändert. Seien $y_{\tau+1}, \ldots, y_n$ $n-\tau$ Integrale von (A.), die mit $v_1, v_2, \ldots, v_\tau$ zusammengenommen ein Fundamentalsystem von (A.) constituiren, so bilden bekanntlich die $n-\tau$ Functionen

$$z_k = R(y_k), \qquad (k = \tau+1, \ldots, n)$$

ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung

$$S(z) = 0.$$

Bedeutet also

$$H(\omega) = h_\tau \omega^\tau + \cdots + h_0 = 0$$

die Fundamentalgleichung von $R = 0$,

$$K(\omega) = k_{n-\tau}\omega^{n-\tau} + \cdots + k_0 = 0$$

---

*) Vgl. *Frobenius*, dieses Journal Bd. 76, S. 256ff.

die von $S = 0$, so ist nach Nr. I

(17.) $$h_\tau \theta^\tau v_i + \cdots + h_0 v_i = 0, \qquad (i = 1, 2, \ldots, \tau)$$

und

(18.) $$k_{n-\tau} \theta^{n-\tau} z_i + \cdots + k_0 z_i = 0. \qquad (i = \tau+1, \ldots, n)$$

Nun ist aber

$$R(k_{n-\tau}\theta^{n-\tau} y_i + \cdots + k_0 y_i) = k_{n-\tau}\theta^{n-\tau} z_i + \cdots + k_0 z_i, \qquad (i = \tau+1, \ldots, n)$$

also sind zufolge von (18.) die

$$v_i = k_{n-\tau}\theta^{n-\tau} y_i + \cdots + k_0 y_i \qquad (i = \tau+1, \ldots, n)$$

Integrale von $R = 0$ und genügen also der Gleichung (17.). Setzen wir

$$H(\omega).K(\omega) = \gamma_n \omega^n + \cdots + \gamma_0,$$

so wird also die Gleichung

(19.) $$\gamma_n \theta^n y + \cdots + \gamma_0 y = 0$$

befriedigt, durch $y_{\tau+1}, \ldots, y_n$ und ausserdem durch $v_1, \ldots, v_\tau$, also durch das allgemeine Integral von (A.), und folglich stimmen nach Nr. I die Coefficienten $\gamma_n, \ldots, \gamma_0$ mit den $c_n, \ldots, c_0$ bis auf einen constanten gemeinsamen Factor überein. Von einem solchen abgesehen ist also

$$F = HK,$$

d. h.: *Wird die Differentialgleichung* (A.) *durch alle Integrale von* $R = 0$ *befriedigt, so ist die linke Seite der Fundamentalgleichung von* (A.) *durch die linke Seite der Fundamentalgleichung von* $R = 0$ *theilbar.*

Bedeutet $R = 0$ die Differentialgleichung, der die gemeinsamen Integrale von $P = 0$ und $Q = 0$ genügen, so ist $H(\omega)$ auch ein Theiler von $G(\omega)$; *wir wollen beweisen, dass* $H(\omega)$ *den grössten gemeinschaftlichen Theiler von* $G(\omega)$ *und* $F(\omega)$ *darstellt.*

IV.

Zu dem Ende betrachten wir allgemein einen Factor

$$L(\omega) = l_\lambda \omega^\lambda + \cdots + l_0$$

von $F(\omega)$ und suchen die Integrale v, die der Relation

(20.) $$l_\lambda \theta^\lambda v + \cdots + l_0 v = 0$$

Genüge leisten. Wir haben dann das Gleichungssystem

(21.) $$\sum_{h=1}^{n} (l_\lambda a_{hk}^{(\lambda)} + \cdots + l_0 \delta_{hk}) x_h = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

aufzulösen; erweist sich dasselbe vom Range $n-\tau$, so besitzt es genau τ linear unabhängige Lösungssysteme, und es giebt also genau τ linear unabhängige Integrale

$$v_1, \quad v_2, \quad \dots, \quad v_\tau$$

von (A.), die der Gleichung (20.) genügen. Da θv_i auch ein ebenso beschaffenes Integral von (A.) darstellt, für $i = 1, 2, \dots, \tau$, so ist

$$\theta v_i = \sum_{k=1}^{\tau} b_{ik} v_k; \qquad (i = 1, 2, \dots, \tau)$$

die $v_1, \dots, v_\tau$ bilden folglich ein Fundamentalsystem einer Differentialgleichung $R = 0$, die alle ihre Integrale mit (A.) gemein hat. Also ist:

$$P = SR,$$

S ein Differentialausdruck von der Ordnung $n-\tau$, und wenn wie oben $H(\omega) = 0$ die Fundamentalgleichung von $R = 0$, $K(\omega) = 0$ die von $S = 0$ bedeutet, so ist nach Nr. III:

$$F = HK \tag{22.}$$

und die Gleichung

$$h_\tau \theta^\tau v + \dots + h_0 v = 0$$

wird durch das allgemeine Integral von $R = 0$, also auch durch alle Integrale von (A.), die der Gleichung (20.) Genüge leisten, befriedigt. Es sind nun die drei Möglichkeiten

$$\tau > \lambda, \quad \tau = \lambda, \quad \tau < \lambda$$

ins Auge zu fassen.

Bedeutet

$$B(\omega) = b_\sigma \omega^\sigma + \dots + b_0,$$

den grössten gemeinsamen Theiler von $H(\omega)$ und $L(\omega)$, so lässt sich derselbe auf die Form bringen

$$B(\omega) = H_1 H + L_1 L,$$

wo H_1, L_1 ganze Functionen von ω sind; die Gleichung

$$b_\sigma \theta^\sigma v + \dots + b_0 v = 0 \tag{23.}$$

wird folglich durch alle Integrale von $R = 0$, d. h. durch alle Integrale von (A.), die der Gleichung (20.) genügen, befriedigt.

Wäre nun $\tau < \lambda$, so müsste $L(\omega)$ einen Linearfactor $\omega - \omega_a$ enthalten, der in $H(\omega)$ entweder gar nicht, oder doch in geringerer Vielfachheit wie in $L(\omega)$ enthalten ist; es wäre also jedenfalls auch noch

$$(\omega - \omega_a) B(\omega)$$

ein Theiler $L(\omega)$, und es müsste zu Folge der Gleichung (22.) der Factor $\omega-\omega_a$ auch in $K(\omega)$ enthalten sein. Dann giebt es aber ein Integral z_a von $S=0$, von der Beschaffenheit, dass

$$\theta z_a = \omega_a z_a, \tag{24.}$$

und es ist

$$z_a = \sum_{i=\tau+1}^{n} c_i z_i.$$

Wird also

$$y_a = \sum_{i=\tau+1}^{n} c_i y_i$$

gesetzt, so ist nach Gleichung (24.)

$$R(\theta y_a - \omega_a y_a) = 0,$$

d.h.: es ist $\theta y_a - \omega_a y_a$ ein Integral von $R=0$ und befriedigt folglich die Gleichung (23.). Also befriedigt das Integral y_a von (A.) die Gleichung (20.), weil

$$(\omega-\omega_a)B(\omega)$$

ein Theiler von $L(\omega)$ ist; es wäre also y_a selbst ein Integral von $R=0$, was der Annahme, dass

$$v_1, \quad \ldots, \quad v_\tau, \quad y_{\tau+1}, \quad \ldots, \quad y_n$$

ein Fundamentalsystem von (A.) bilden, widerspricht. Es muss folglich $\tau \geqq \lambda$ sein.

Nun ist aber leicht einzusehen, dass jeder Linearfactor von $H(\omega)$ in $L(\omega)$ enthalten sein muss. Denn sei $\omega-\omega_\beta$ ein Factor von $H(\omega)$, so giebt es ein Integral v_β von $R=0$, für welches

$$\theta v_\beta = \omega_\beta v_\beta;$$

dieses v_β genügt aber auch der Gleichung (20.), folglich muss, da v_β nicht identisch Null ist, $L(\omega)$ durch $\omega-\omega_\beta$ theilbar sein. Da überdies $H(\omega)$ ein Theiler von $F(\omega)$ ist, so erhalten wir den Satz:

Wenn $L(\omega)$ ein Factor λten Grades der linken Seite der Fundamentalgleichung von (A.) *ist, so ist der Rang des Gleichungssystems* (21.) *höchstens gleich $n-\lambda$, und er kann nur dann kleiner sein als $n-\lambda$, wenn ein Linearfactor von $L(\omega)$ in $F(\omega)$ zu einer höheren Potenz erhoben auftritt wie in $L(\omega)$ selbst.*

Die am Schlusse der Nr. III aufgestellte Behauptung lässt sich nun sofort erweisen. Bedeutet nämlich $L(\omega)$ den grössten gemeinsamen Theiler von $F(\omega)$ und $G(\omega)$, so ist $H(\omega)$ jedenfalls in $L(\omega)$ enthalten; die Anzahl τ

der linear unabhängigen Integrale von (A.), die der Differentialgleichung $Q = 0$ genügen, giebt nach Nr. III (S. 149) von n abgezogen den Rang des zu $L(\omega)$ gehörigen Gleichungssystemes (21.), also kann $n-\tau$ nicht grösser sein als $n-\lambda$; also ist nothwendig $\tau = \lambda$ und folglich $H(\omega)$ mit $L(\omega)$ identisch.

V.

Es sei nun ω_a eine λ-fache Wurzel der Fundamentalgleichung von (A.); betrachten wir den Factor

$$L(\omega) = (\omega-\omega_a)^\lambda$$

und suchen diejenigen Integrale

$$u_a = \sum_{k=1}^{n} \xi_k y_k$$

der Differentialgleichung (A.) zu bestimmen, die der zu $L(\omega)$ gehörigen Relation

$$(25.) \qquad \theta^\lambda u_a - \lambda \omega_a \theta^{\lambda-1} u_a + \lambda_2 \omega_a^2 \theta^{\lambda-2} u_a - \cdots + (-1)^\lambda \omega_a^\lambda u_a = 0$$

Genüge leisten. Dann haben die $\xi_1, \ldots, \xi_n$ den Gleichungen

$$(26.) \qquad \sum_{h=1}^{n} (a_{hk}^{(\lambda)} - \lambda \omega_a a_{hk}^{(\lambda-1)} + \cdots + (-1)^\lambda \omega_a^\lambda \vartheta_{hk}) \xi_h = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

zu genügen. Der Rang dieses Gleichungssystems ist zufolge des Satzes der Nr. IV genau gleich $n-\lambda$, wir erhalten also λ linear unabhängige Lösungssysteme $\xi_1, \ldots, \xi_n$ und entsprechend λ linear unabhängige Integrale u_a von (A.), die die Gleichung (25.) befriedigen, d. h. genau so viele, wie der Grad der Vielfachheit der Wurzel ω_a angiebt. Bezeichnen

$$\omega_a, \quad \omega_\beta, \quad \omega_\gamma, \quad \ldots, \quad \omega_\delta$$

die von einander verschiedenen Wurzeln der Fundamentalgleichung und $\lambda, \mu, \nu, \ldots, \varrho$ die Grade ihrer Vielfachheit, sodass also

$$\lambda+\mu+\nu+\cdots+\varrho = n$$

ist, bedeuten ferner

$$(27.) \qquad \begin{cases} u_{a1}, & u_{a2}, & \ldots, & u_{a\lambda}, \\ u_{\beta 1}, & u_{\beta 2}, & \ldots, & u_{\beta\mu}, \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ u_{\delta 1}, & u_{\delta 2}, & \ldots, & u_{\delta\varrho} \end{cases}$$

die zu diesen Wurzeln gehörigen Integrale, so ist die Anzahl derselben gleich n und die in einer Zeile des Schemas (27.) stehenden sind linear unabhängig. Um zu zeigen, dass auch zwischen diesen n Integralen überhaupt keine lineare Beziehung bestehen kann, verfahren wir wie folgt. Die λ Integrale u_{ai} bilden ein Fundamentalsystem einer Differentialgleichung λter Ordnung $R_a = 0$, deren Fundamentalgleichung durch

$$(\omega-\omega_a)^\lambda = 0$$

gegeben wird; ebenso bilden die $u_{\beta i}$ ein Fundamentalsystem einer Differentialgleichung μter Ordnung $R_\beta = 0$ mit der Fundamentalgleichung

$$(\omega-\omega_\beta)^\mu = 0,$$

die $u_{\gamma i}$ ein Fundamentalsystem einer Differentialgleichung νter Ordnung $R_\gamma = 0$ mit der Fundamentalgleichung

$$(\omega-\omega_\gamma)^\nu = 0,$$

u. s. w. Die Coefficienten dieser Differentialgleichungen bleiben beim Umlaufe U ungeändert. Bestände zwischen den

$$(28.)\qquad \begin{cases} u_{ai} & (i=1,2,\ldots,\lambda) \\ u_{\beta i} & (i=1,2,\ldots,\mu) \end{cases}$$

eine homogene lineare Beziehung mit constanten Coefficienten, so würden die Differentialgleichungen

$$R_a = 0, \quad R_\beta = 0$$

Integrale gemein haben; ihre Fundamentalgleichungen müssten also nach Nr. II eine gemeinschaftliche Wurzel haben, was, da $\omega_a \neq \omega_\beta$ sein sollte, ausgeschlossen ist. Also sind die $\lambda+\mu$ Integrale (28.) linear unabhängig, sie bilden folglich ein Fundamentalsystem einer Differentialgleichung $(\lambda+\mu)$-ter Ordnung $R_{a\beta} = 0$, deren Fundamentalgleichung lautet

$$(\omega-\omega_a)^\lambda(\omega-\omega_\beta)^\mu = 0.$$

Bestände zwischen den Integralen (28.) und

$$u_{\gamma i} \qquad (i=1,2,\ldots,\nu)$$

eine lineare Beziehung, so würden die Differentialgleichungen

$$R_{a\beta} = 0, \quad R_\gamma = 0$$

Integrale, ihre Fundamentalgleichungen folglich Wurzeln gemein haben, was

ausgeschlossen ist, da ω_γ von ω_α und ω_β verschieden ist. So weiter schliessend erkennt man, dass die n Integrale (27.) ein Fundamentalsystem constituiren, man erhält also das zum Umlaufe U gehörige kanonische Fundamentalsystem in der Form, wie es Herr *Fuchs**) zuerst aufgestellt hat. Um nun noch die Zerlegung der zur λ-fachen Wurzel ω_α der Fundamentalgleichung gehörigen Integralgruppe in die *Hamburger*schen Untergruppen**) zu erhalten, betrachten wir die Factoren

$$L_i(\omega) = (\omega-\omega_\alpha)^i \qquad (i = 1, 2, \ldots, \lambda)$$

von $F(\omega)$ und suchen die Integrale $u_{\alpha i}$, die zu $L_i(\omega)$ gehören, d. h. die Gleichung

$$(29.) \qquad \theta^i u_{\alpha i} - i\omega_\alpha \theta^{i-1} u_{\alpha i} + \cdots + (-1)^i \omega_\alpha^i u_{\alpha i} = 0$$

erfüllen. Die Anzahl $\tau_{\alpha i}$ der linear unabhängigen $u_{\alpha i}$ wird durch den Rang $n-\tau_{\alpha i}$ des Gleichungssystems

$$(30.) \qquad \sum_{h=1}^{n} (a_{hk}^{(i)} - i\omega_\alpha a_{hk}^{(i-1)} + \cdots + (-1)^i \omega_\alpha^i \delta_{hk}) \xi_h = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

oder des Systems der Coefficienten

$$(31.) \qquad (a_{hk}^{(i)} - i\omega_\alpha a_{hk}^{(i-1)} + \cdots + (-1)^i \omega_\alpha^i \delta_{hk}) \qquad (h, k = 1, 2, \ldots, n)$$

gegeben. Dieses System ist nach der in der Nr. II angegebenen Zerlegungsformel gleich

$$(32.) \qquad (a_{hk} - \delta_{hk}\omega_\alpha)^i.$$

Nun sind aber offenbar die $u_{\alpha,i-1}$ unter den $u_{\alpha i}$ enthalten, ebenso wie die sämmtlichen $u_{\alpha i}$ für $i = 1, 2, \ldots, \lambda-1$ unter den u_α enthalten sind; wir haben folglich

$$\lambda \geqq \tau_{\alpha i} \geqq \tau_{\alpha,i-1}. \qquad (i = 2, 3, \ldots, \lambda-1)$$

Andererseits ist zufolge des Satzes der Nr. IV der Rang des Systems (32.) höchstens gleich $n-i$, also ist

$$\tau_{\alpha i} \geqq i, \qquad (i = 1, 2, \ldots, \lambda-1)$$

und die Anzahl der linear unabhängigen $u_{\alpha i}$, die nicht schon zu den $u_{\alpha,i-1}$ gehören, ist also gleich

$$\varrho_{\alpha i} = \tau_{\alpha i} - \tau_{\alpha,i-1} \geqq 0, \qquad (i = 2, 3, \ldots, \lambda)$$

$$\tau_{\alpha\lambda} = \lambda.$$

*) Dieses Journal Bd. 66 Nr. III.

**) Dieses Journal Bd. 76, S. 121.

Setzen wir noch $\tau_{a1} = \varrho_{a1}$, so geben also die Zahlen

$$\varrho_{a1}, \quad \varrho_{a2}, \quad \dots, \quad \varrho_{a\lambda}$$

die Anzahlen derjenigen linear unabhängigen Integrale $u_{a1}, u_{a2}, \dots, u_{a\lambda}$, die nicht schon unter jenen mit kleinerem zweiten Index enthalten sind, und es ist

$$\varrho_{a1} + \varrho_{a2} + \dots + \varrho_{a\lambda} = \lambda.$$

Für ein solches u_{ai}, welches nicht schon unter den $u_{a,i-1}$ enthalten ist, wird offenbar

$$(33.) \qquad \theta u_{ai} - \omega_a u_{ai}$$

gleich einem $u_{a,i-1}$ sein, welches nicht schon unter den $u_{a,i-2}$ vorkommt. Bilden wir also den Ausdruck (33.) für alle ϱ_{ai} linear unabhängigen *wirklichen* u_{ai}, so erhalten wir ebenso viele linear unabhängige *wirkliche* $u_{a,i-1}$, und es ist folglich

$$\varrho_{a,i-1} \geqq \varrho_{ai}. \qquad (i = 2, 3, \dots, \lambda)$$

Wir verfahren nun wie folgt. Sei ϱ_{al} die letzte in der Reihe der Zahlen

$$\varrho_{a1}, \quad \varrho_{a2}, \quad \dots, \quad \varrho_{a\lambda},$$

die nicht gleich Null ist, sodass also alle

$$\varrho_{ai} = 0; \qquad (i > l)$$

dann sind die Systeme

$$(a_{hk} - \delta_{hk}\omega_a)^i$$

für $i \geqq \lambda$ vom Range $n - \lambda$, und wir haben

$$\varrho_{a1} + \varrho_{a2} + \dots + \varrho_{al} = \lambda.$$

Die Anzahl der linear unabhängigen wirklichen u_{al} ist gleich ϱ_{al}, diese denken wir uns ganz willkürlich gewählt. Dann bilden wir die ϱ_{al} Ausdrücke

$$\theta u_{al} - \omega_a u_{al},$$

so liefern uns diese ebenso viele linear unabhängige wirkliche $u_{a,l-1}$, diesen fügen wir noch $\varrho_{a,l-1} - \varrho_{a,l}$ beliebig zu wählende wirkliche $u_{a,l-1}$ hinzu, die mit ihnen zusammen ein System von $\varrho_{a,l-1}$ linear unabhängigen wirklichen $u_{a,l-1}$ bilden. Die $\varrho_{a,l-1}$ Ausdrücke

$$\theta u_{a,l-1} - \omega_a u_{a,l-1}$$

liefern dann $\varrho_{a,l-1}$ linear unabhängige wirkliche $u_{a,l-2}$, denen wir dann noch $\varrho_{a,l-2} - \varrho_{a,l-1}$ andere wirkliche $u_{a,l-2}$ hinzufügen, um im ganzen $\varrho_{a,l-2}$ linear

unabhängige $u_{a,l-2}$ zu erhalten. Mit diesen bilden wir die Ausdrücke

$$\theta u_{a,l-2} - \omega_a u_{a,l-2}$$

und fahren so fort, bis wir endlich ϱ_{a2} von den ϱ_{a1} linear unabhängigen u_{a1} durch die Formeln

$$\theta u_{a2} - \omega_a u_{a2}$$

bestimmt und diese dann durch noch $\varrho_{a1} - \varrho_{a2}$ andere zu einem vollen Systeme linear unabhängiger u_{a1} ergänzt haben. Wir erhalten auf diese Weise die λ linear unabhängigen Integrale u_a in die *Hamburger*schen Untergruppen gesondert, und zwar ergeben sich

ϱ_{al}	Untergruppen	von je	l Elementen,
$\varrho_{a,l-1} - \varrho_{al}$	-	- -	$l-1$ -
. . .	. . .	. . .	. . .
$\varrho_{a1} - \varrho_{a2}$	-	- -	einem Element.

Bedeuten $u_1, u_2, \ldots, u_m$ die Elemente einer solchen Untergruppe, so ist eines dieser Integrale, etwa u_1, ein u_{a1}, ein anderes, etwa u_2, ein wirkliches u_{a2}, endlich eines, etwa u_m, ein wirkliches u_{am} und wir haben die Beziehungen*)

$$\begin{aligned} \theta u_1 &= \omega_a u_1, \\ \theta u_2 &= \omega_a u_2 + u_1, \\ &\cdots\cdots \\ \theta u_m &= \omega_a u_m + u_{m-1}. \end{aligned}$$

Es ergiebt sich also die folgende, zuerst von Herrn *Eduard Weyr***) aufgestellte Regel: ***Ist ω_a eine λ-fache Wurzel der Fundamentalgleichung, so bestimme man die Rangzahlen der Systeme***

$$(a_{hk} - \delta_{hk}\omega_a), \quad (a_{hk} - \delta_{hk}\omega_a)^2, \quad \ldots, \quad (a_{hk} - \delta_{hk}\omega_a)^\lambda.$$

Diese bilden eine nicht abnehmende, die Reihe der Differenzen je zweier auf einander folgenden dieser Zahlen eine nicht zunehmende Folge. Diese Differenzen sind die Zahlen

$$\varrho_{a1}, \quad \varrho_{a2}, \quad \ldots, \quad \varrho_{a\lambda};$$

die Reihe ihrer Differenzen bestimmt unmittelbar die Anzahl, und durch den zweiten Index des Subtrahendus die Elementenzahl der Untergruppen, in die die Gruppe der λ zu ω_a gehörigen Integrale u_a zerfällt.

---

*) *Hamburger,* a. a. O.

**) a. a. O.

Die Differenzen

$$\varrho_{a1} - \varrho_{a2}, \quad \varrho_{a2} - \varrho_{a3}, \quad \ldots, \quad \varrho_{al}$$

geben bekanntlich die Anzahl, und durch den zweiten Index des Subtrahendus den Grad der von Herrn *Weierstrass* in die Theorie der bilinearen Formen eingeführten *Elementartheiler*, in die der Theiler $(\omega - \omega_a)^\lambda$ der Determinante

$$|a_{hk} - \delta_{hk}\omega| \qquad (h, k = 1, 2, \ldots, n)$$

zerfällt.

Berlin, 28. März 1894.

Ueber die *Hamburger*schen Untergruppen, in die das zu einem singulären Punkte der Bestimmtheit einer homogenen linearen Differentialgleichung gehörige kanonische Fundamentalsystem zerfällt.

(Von Herrn *Ludwig Schlesinger.*)

Die Frage nach der Zerlegung der zu gleichen Wurzeln der Fundamentalgleichung gehörigen *Fuchs*schen Integralgruppe*) in die *Hamburger*schen Untergruppen**) im Falle eines singulären Punktes, für welchen sich die sämmtlichen Integrale einer linearen homogenen Differentialgleichung bestimmt verhalten, kommt, wie mein Freund *Heffter****) hervorgehoben hat, darauf zurück, zu entscheiden, ob zu einer bestimmten Wurzel der diesem singulären Punkte entsprechenden determinirenden Fundamentalgleichung ein in Reihenform darstellbares Integral gehört. Damit dies der Fall sei, muss die für eine solche Reihe gültige Recursionsformel durch endliche Werthe der Coefficienten befriedigt werden können, d. h. es muss ein gewisses System homogener linearer Gleichungen durch ein Werthsystem der Unbekannten zu befriedigen sein, in welchem eine bestimmte dieser Unbekannten nicht verschwindet. Die Bedingungen hierfür hat Herr *Heffter* für das bei der erwähnten analytischen Frage in Betracht kommende Gleichungssystem†) aufgestellt, dieselben lassen sich jedoch in eine mehr explicite Form setzen, wenn man von einem Satze Gebrauch macht, der als besonderer Fall in einem allgemeinen Theoreme des Herrn *Frobenius*††) enthalten ist. Ich werde in dieser Notiz zunächst einen Beweis des gedachten spe-

---

*) Dieses Journal Bd. 66, S. 133ff.

**) Dieses Journal Bd. 76, S. 113ff.

***) Habilitationsschrift (Leipzig 1888).

†) Dieses Journal Bd. 111, S. 59.

††) Dieses Journal Bd. 82. Ueber das *Pfaff*sche Problem, § 3, S. 238, 239.

ciellen Satzes und dann seine Anwendung auf das erwähnte analytische Problem geben.

I.

Sei das Gleichungssystem

$$\sum_{k=0}^{\nu} a_{ik} g_k = 0, \qquad (i = 1, 2, \ldots, \nu)$$

welches wir kurz durch

$$(a_{ik})_g$$

bezeichnen wollen, vorgelegt; wir fragen nach den nothwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, dass dieses Gleichungssystem durch Werthe $g_0, g_1, \ldots, g_\nu$ befriedigt werden könne, wo

$$g_l \neq 0.$$

Sei $\nu-\tau$ der Rang des gegebenen Gleichungssystems, so besitzt dasselbe genau $\tau+1$ linear unabhängige Lösungssysteme

$$g_0^{(\lambda)}, \quad g_1^{(\lambda)}, \quad \ldots, \quad g_\nu^{(\lambda)}, \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, \tau+1)$$

durch welche jedes andere Lösungssystem homogen und linear darstellbar ist. Nehmen wir an, es sei wenigstens eine der Grössen $g_l^{(\lambda)}$ von Null verschieden, etwa

$$g_l^{(\mu)} \neq 0,$$

setzen wir dann

$$\begin{aligned} \bar{g}_p^{(\mu)} &= g_p^{(\mu)}, \\ \bar{g}_p^{(\lambda)} &= g_p^{(\lambda)} g_l^{(\mu)} - g_p^{(\mu)} g_l^{(\lambda)}, \quad \lambda \neq \mu, \end{aligned} \qquad (p = 0, 1, \ldots, \nu)$$

so befriedigen die $\tau+1$ Systeme

$$\bar{g}_0^{(\lambda)}, \quad \bar{g}_1^{(\lambda)}, \quad \ldots, \quad \bar{g}_\mu^{(\lambda)} \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, \tau+1)$$

das gegebene Gleichungssystem und sind, wie leicht einzusehen ist, auch linear unabhängig von einander. Aber

$$\bar{g}_l^{(\lambda)} = 0, \quad \text{wenn} \quad \lambda \neq \mu;$$

bezeichnen wir also durch (k) das quadratische System, welches aus (a_{ik}) entsteht, wenn man in diesem letzteren Systeme die Reihe

$$a_{il} \qquad (i = 1, 2, \ldots, \nu)$$

weglässt, und durch $(k)_u$ ein Gleichungssystem für die Unbekannten $u_1, u_2, \ldots, u_\nu$, dessen Coefficientensystem durch (k) dargestellt wird, so liefern die Systeme

$$\bar{g}_p^{(\lambda)}, \quad \lambda \neq \mu, \quad p \neq l$$

τ Lösungssysteme der Gleichungen $(l)_u$, und man übersieht auch sofort, dass diese τ Systeme linear unabhängig sind. Es ist aber auch jedes beliebige Lösungssystem

$$\bar{g}_p, \quad p \neq l$$

der Gleichungen $(l)_u$ durch diese τ Systeme linear und homogen darstellbar. Denn setzen wir

$$\bar{g}_l = 0,$$

so haben wir in

$$\bar{g}_0, \quad \bar{g}_1, \quad \ldots, \quad \bar{g}_\nu,$$

ein Lösungssystem der gegebenen Gleichungen $(a_{ik})_g$, es lassen sich also Constanten $c_1, c_2, \ldots, c_{\tau+1}$ so bestimmen, dass

$$\bar{g}_p = \sum_{a=1}^{\tau+1} c_a \bar{g}_p^{(a)}. \qquad (p = 0, 1, \ldots, \nu)$$

Für $p = l$ ist aber hiernach

$$0 = c_\mu \bar{g}_l^{(\mu)},$$

und folglich

$$c_\mu = 0, \quad \text{da} \quad \bar{g}_l^{(\mu)} = g_l^{(\mu)} \neq 0;$$

d. h. wir erhalten für $p \neq l$:

$$\bar{g}_p = c_1 \bar{g}_p^{(1)} + \cdots + c_{\mu-1} \bar{g}_p^{(\mu-1)} + c_{\mu+1} \bar{g}_p^{(\mu+1)} + \cdots + c_{\tau+1} \bar{g}_p^{(\tau+1)},$$

was zu beweisen war. Hieraus folgt, dass der Rang des Gleichungssystems $(l)_u$, oder des quadratischen Systems (l) selbst, gleich $\nu - \tau$ ist. Damit also wenigstens eines der $g_l^{(\lambda)}$ von Null verschieden sei, ist nothwendig, dass der Rang des quadratischen Systems (l) mit dem Range des ganzen Systems (a_{ik}) übereinstimmt. Andererseits ist sofort ersichtlich, dass diese nothwendige Bedingung auch hinreichend ist, denn würde in sämmtlichen $\tau+1$ linear unabhängigen Lösungssystemen von $(a_{ik})_g$

$$g_l^{(\lambda)} = 0 \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, \tau+1)$$

sein, so wären diese Systeme schon selbst $\tau+1$ linear unabhängige Lösungen der Gleichungen $(l)_u$, es wäre also der Rang des quadratischen Systems (l) höchstens gleich $\nu - \tau + 1$; d. h:

> ***Damit das Gleichungssystem $(a_{ik})_g$ durch ein Werthsystem $g_0, g_1, \ldots, g_\nu$ befriedigt werden könne, worin g_l von Null verschieden ist, ist nothwendig und hinreichend, dass der Rang des Systems (l) mit dem Range des Systems (a_{ik}) genau übereinstimmt.***

Dies ist der Satz des Herrn *Frobenius*, soweit wir von demselben Gebrauch zu machen haben werden.

II.

Wir betrachten nun den besonderen Fall, wo das gegebene Gleichungssystem ein *dreieckiges,* d. h. so beschaffen ist, dass

$$\text{(I.)} \qquad a_{\alpha\beta} = 0, \quad \text{wenn} \quad \beta > \alpha;$$

dies ist die Form, auf welche man ein Gleichungssystem zu bringen hat, wenn man dasselbe nach den gewöhnlichen Methoden auflösen will. Es sollen die Kriterien dafür, dass sich dieses dreieckige System durch Werthe der $g_0, g_1, \ldots, g_\nu$ befriedigen lässt, wo

$$g_0 \neq 0$$

ist, in expliciter Form angegeben werden, wenn überdies vorausgesetzt wird, dass gewisse der Grössen a_{kk} verschwinden. Sei

$$\text{(II.)} \qquad a_{s_0 s_0} = 0, \quad a_{s_1 s_1} = 0, \quad \ldots, \quad a_{s_{k-1} s_{k-1}} = 0,$$

wo

$$\text{(III.)} \qquad \nu \geqq s_0 > s_1 > \cdots > s_{k-1},$$

dann ist nur das Gleichungssystem

$$\text{(IV.)} \qquad (a_{\alpha\beta})_g \qquad \begin{pmatrix} \alpha = 1, 2, \ldots, s_0 \\ \beta = 0, 1, 2, \ldots, s_0 \end{pmatrix}$$

der Untersuchung zu Grunde zu legen, da die etwa noch folgenden Gleichungen, in denen $a_{\alpha\alpha} \neq 0$ ist, die

$$g_\alpha \qquad (\alpha > s_0)$$

eindeutig durch die vorhergenden $g_0, g_1, \ldots, g_{s_0}$ bestimmen.

Es werde die aus den Elementen des Systems

$$\text{(V.)} \qquad (a_{\alpha\beta}) \qquad \begin{pmatrix} \alpha = 1, 2, \ldots, s_0 \\ \beta = 0, 1, 2, \ldots, s_0 \end{pmatrix}$$

gebildete Determinante, die die Reihen $i_0, i_1, \ldots, i_{\nu-1}$ und die Zeilen $k_1, k_2, \ldots, k_{\nu-1}$ *nicht* enthält, durch

$$\begin{pmatrix} i_0 & i_1 & \ldots & i_{\nu-1} \\ & k_1 & \ldots & k_{\nu-1} \end{pmatrix},$$

diejenige Determinante, die aus den in den Reihen $i_0, i_1, \ldots, i_\nu$ und den Zeilen $k_0, k_1, \ldots, k_\nu$ stehenden Elementen zusammengesetzt ist, durch

$$\begin{Bmatrix} i_0 & i_1 & \ldots & i_\nu \\ k_0 & k_1 & \ldots & k_\nu \end{Bmatrix}$$

bezeichnet und insbesondere

$$\begin{Bmatrix} 0 & 1 & \dots & \nu-1 \\ 1 & 2 & \dots & \nu \end{Bmatrix} = h_\nu$$

gesetzt; ν bedeutet hier eine der Zahlen 1, 2, ..., s_0. Dann folgt aus den Voraussetzungen (I.), (II.), (III.) das Bestehen der folgenden Identität:

$$\text{(VI.)}\quad \left| \begin{aligned} &\begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & s_i-1 & s_0 \\ & 1 & 2 & \dots & s_i \end{pmatrix} = \begin{Bmatrix} s_i & \dots & s_0-1 \\ s_i+1 & \dots & s_0 \end{Bmatrix} \\ &= \begin{Bmatrix} s_i & \dots & s_{i-1}-1 \\ s_i+1 & \dots & s_{i-1} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} s_{i-1} & \dots & s_{i-2}-1 \\ s_{i-1}+1 & \dots & s_{i-2} \end{Bmatrix} \dots \begin{Bmatrix} s_1 & \dots & s_0-1 \\ s_1+1 & \dots & s_0 \end{Bmatrix} \\ &\quad = \begin{Bmatrix} s_i & \dots & s_{i-1}-1 \\ s_i+1 & \dots & s_{i-1} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} s_{i-1} & \dots & s_0-1 \\ s_{i-1}+1 & \dots & s_0 \end{Bmatrix}. \quad \begin{pmatrix} i=1,2,\dots,k \\ s_k=0 \end{pmatrix} \end{aligned} \right.$$

Das quadratische System (0) ist mindestens vom Range s_0-k, da

$$\begin{pmatrix} 0 & s_0 & s_1 & \dots & s_{k-1} \\ & s_0 & s_1 & \dots & s_{k-1} \end{pmatrix} \neq 0,$$

es kann aber auch von höherem Range sein. Die aus den Elementen dieses quadratischen Systems gebildete Determinante s_0-ter Ordnung, die selbst durch (0) zu bezeichnen sein wird, ist jedenfalls gleich Null, unter ihren Subdeterminanten der (s_0-1)-ten Ordnung kann nur

$$\begin{pmatrix} 0 & s_0 \\ & s_{k-1} \end{pmatrix} = a_{11} \dots a_{s_{k-1}-1, s_{k-1}-1} \begin{Bmatrix} s_{k-1} & \dots & s_0-1 \\ s_{k-1}+1 & \dots & s_0 \end{Bmatrix}$$

von Null verschieden sein. Ist dies der Fall, d. h. ist

$$\begin{Bmatrix} s_{k-1} & \dots & s_0-1 \\ s_{k-1}+1 & \dots & s_0 \end{Bmatrix} \neq 0,$$

so ist das System (0) vom Range s_0-1; damit dann g_0 von Null verschieden sei, ist also nach dem Satze der Nr. I nothwendig und hinreichend, dass sämmtliche Determinanten s_0-ter Ordnung des Systems (V.) verschwinden. Unter diesen letzteren könnte nur

$$(s_0) = h_{s_{k-1}} \begin{Bmatrix} s_{k-1} & \dots & s_0-1 \\ s_{k-1}+1 & \dots & s_0 \end{Bmatrix}$$

von Null verschieden sein; soll auch diese Determinante verschwinden, so muss also

$$h_{s_{k-1}} = 0$$

sein, diese letztere Bedingung ist also, falls (0) vom Range s_0-1 ist, nothwendig und hinreichend dafür, dass $g_0 \neq 0$ sei.

Ist

$$\begin{Bmatrix} s_{k-1} & \dots & s_0-1 \\ s_{k-1}+1 & \dots & s_0 \end{Bmatrix} = 0,$$

so sind alle Subdeterminanten (s_0-1)-ter Ordnung von (0) gleich Null, weil diese sämmtlich mit Ausnahme von $\begin{pmatrix} 0 & s_0 \\ & s_{k-1} \end{pmatrix}$ den Factor $a_{s_{k-1}s_{k-1}}$ enthalten. Unter den Subdeterminanten (s_0-2)-ter Ordnung von (0) befindet sich

$$\begin{pmatrix} 0 & s_0 & s_{k-1} \\ & s_{k-1} & s_{k-2} \end{pmatrix} =$$

$$a_{11}\dots a_{s_{k-1}-1, s_{k-1}-1}\, a_{s_{k-1}+1, s_{k-1}+1}\dots a_{s_{k-2}-1, s_{k-2}-1}\cdot \begin{Bmatrix} s_{k-2} & \dots & s_0-1 \\ s_{k-2}+1 & \dots & s_0 \end{Bmatrix};$$

ist also

$$\begin{Bmatrix} s_{k-2} & \dots & s_0-1 \\ s_{k-2}+1 & \dots & s_0 \end{Bmatrix} \neq 0,$$

so ist das System (0) vom Range s_0-2. Damit dann das ganze System (V.) vom selben Range sei, müssen die sämmtlichen Subdeterminanten (s_0-1)-ter Ordnung der Determinanten

$$(1),\quad (2),\quad \dots,\quad (s_0)$$

verschwinden. Dazu ist in erster Linie nothwendig:

$$h_{s_{k-1}} = 0;$$

ferner haben wir

$$\begin{pmatrix} s_0 & s_{k-1} \\ & s_{k-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_{k-1} & s_{k-2} & s_{k-2}+1 & \dots & s_0 \\ s_{k-1} & s_{k-2}+1 & s_{k-2}+2 & \dots & s_0 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} s_{k-2} & \dots & s_0-1 \\ s_{k-2}+1 & \dots & s_0 \end{Bmatrix},$$

also muss auch noch die Determinante

$$\begin{pmatrix} s_{k-1} & s_{k-2} & s_{k-2}+1 & \dots & s_0 \\ s_{k-1} & s_{k-2}+1 & s_{k-2}+2 & \dots & s_0 \end{pmatrix} = h_{s_{k-2};s_{k-1}},$$

die aus $h_{s_{k-2}}$ durch Weglassung der Reihe und Zeile s_{k-1} entsteht, verschwinden. Dies ist aber zugleich hinreichend, wie man aus der Form des Systems (V.) leicht übersehen kann*). Wenn also das System (0) vom

*) Vgl. *Heffter,* Habilitationsschrift S. 29.

Range s_0-2 ist, so ist für $g_0 \neq 0$ nothwendig und hinreichend:

$$h_{s_{k-1}} = 0, \quad h_{s_{k-2};s_{k-1}} = 0.$$

Damit allgemein alle Subdeterminanten (s_0-i+1)-ter Ordnung von (0) verschwinden, ist erforderlich und hinreichend, dass die Determinanten

$$\begin{Bmatrix} s_{k-1} & \dots & s_0-1 \\ s_{k-1}+1 & \dots & s_0 \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} s_{k-2} & \dots & s_0-1 \\ s_{k-2}+1 & \dots & s_0 \end{Bmatrix}, \quad \dots, \quad \begin{Bmatrix} s_{k-i+1} & \dots & s_0-1 \\ s_{k-i+1}+1 & \dots & s_0 \end{Bmatrix}$$

gleich Null sind; hierfür ist aber zufolge der Gleichung (VI.) nothwendig und ausreichend, dass die letzte dieser Determinanten verschwindet. Unter den Determinanten (s_0-i)-ter Ordnung des Systems (0) befindet sich

$$\begin{pmatrix} 0 & s_0 & s_{k-1} & \dots & s_{k-i+1} \\ s_{k-1} & \dots & s_{k-i+1} & s_{k-i} & \end{pmatrix} = \frac{\prod\limits_{\lambda=1}^{s_{k-1}} a_{\lambda\lambda}}{\Pi a_{\lambda\lambda}} \begin{Bmatrix} s_{k-i} & \dots & s_0-1 \\ s_{k-i}+1 & \dots & s_0 \end{Bmatrix}; \quad (\lambda = s_{k-1}, s_{k-2}, \dots, s_i)$$

wenn diese von Null verschieden ist, so ist das System (0) mindestens vom Range s_0-i, also sind die beiden Bedingungen

$$\begin{Bmatrix} s_{k-i+1} & \dots & s_0-1 \\ s_{k-i+1}+1 & \dots & s_0 \end{Bmatrix} = 0, \quad \begin{Bmatrix} s_{k-i} & \dots & s_0-1 \\ s_{k-i}+1 & \dots & s_0 \end{Bmatrix} \neq 0$$

nothwendig und hinreichend dafür, dass (0) genau vom Range s_0-i sei. Sind diese erfüllt, so handelt es sich um die Aufstellung der Bedingungen dafür, dass das ganze System (V.) vom selben Range sei. Damit alle Subdeterminanten (s_0-i+2)-ter Ordnung der Systeme oder Determinanten (1), (2), ..., (s_0), verschwinden, ist erforderlich:

$$h_{s_{k-1}} = 0, \quad h_{s_{k-2};s_{k-1}} = 0, \quad h_{s_{k-3};s_{k-1},s_{k-2}} = 0, \quad \dots, \quad h_{s_{k-i+1};s_{k-1},s_{k-2},\dots,s_{k-i+2}} = 0,$$

hierin bedeutet

$$h_{\nu;\alpha,\beta,\dots,\gamma}$$

die Determinante, welche entsteht, wenn man in h_ν die Reihen und Zeilen $\alpha, \beta, \dots, \gamma$ weglässt. Ferner muss die Determinante (s_0-i+1)-ter Ordnung

$$\begin{pmatrix} s_0 & s_{k-1} & s_{k-2} & \dots & s_{k-i+1} \\ & s_{k-1} & s_{k-2} & \dots & s_{k-i+1} \end{pmatrix} = h_{s_{k-i};s_{k-1},s_{k-2},\dots,s_{k-i+1}} \begin{Bmatrix} s_{k-i} & \dots & s_0-1 \\ s_{k-i}+1 & \dots & s_0 \end{Bmatrix}$$

verschwinden, d. h. es muss noch

$$h_{s_{k-i};s_{k-1},s_{k-2},\dots,s_{k-i+1}} = 0$$

sein, dann sind aber schon alle übrigen Determinanten (s_0-i+1)-ter Ordnung des Systems (V.) von selbst gleich Null. Wir erhalten also das folgende

Kriterium. *Man bilde die Reihe der Determinanten*

$$\begin{Bmatrix} s_{k-1} & \dots & s_0-1 \\ s_{k-1}+1 & \dots & s_0 \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} s_{k-2} & \dots & s_0-1 \\ s_{k-2}+1 & \dots & s_0 \end{Bmatrix}, \dots \begin{Bmatrix} s_1 & \dots & s_0-1 \\ s_1+1 & \dots & s_0 \end{Bmatrix},$$

ist unter diesen

$$\begin{Bmatrix} s_{k-i} & \dots & s_0-1 \\ s_{k-i}+1 & \dots & s_0 \end{Bmatrix}$$

die erste, die von Null verschieden ist, während

$$\begin{Bmatrix} s_{k-i+1} & \dots & s_0-1 \\ s_{k-i+1}+1 & \dots & s_0 \end{Bmatrix} = 0,$$

so ist das System (0) *vom Range* s_0-i; *insbesondere ist es vom Range* s_0-1, *wenn*

$$\begin{Bmatrix} s_{k-1} & \dots & s_0-1 \\ s_{k-1}+1 & \dots & s_0 \end{Bmatrix} \neq 0.$$

Ergiebt sich für das System (0) *der Rang* s_0-i, *so ist für die Existenz eines Lösungssystems* $g_0, g_1, \dots, g_{s_0}$ *der Gleichungen* (IV.) *mit nicht verschwindendem* g_0 *nothwendig und hinreichend, dass die Determinanten*

$$h_{s_{k-1}}, \quad h_{s_{k-2};s_{k-1}}, \quad \dots, \quad h_{s_{k-i};s_{k-1},s_{k-2},\dots,s_{k-i+1}}$$

sämmtlich verschwinden.

III.

Es sei

$$P(x^\varrho) = x^\varrho . f(x, \varrho)$$

die *charakteristische Function**) einer homogenen linearen Differentialgleichung $n$ter Ordnung

$$\text{(A)} \qquad P(y) = x^n P_n(x) y^{(n)} + x^{n-1} P_{n-1}(x) y^{(n-1)} + \dots + P_0(x) y = 0,$$

wo $P_n, P_{n-1}, \dots, P_0$ in der Umgebung von $x=0$ reguläre Functionen bedeuten, dann lautet bekanntlich im Falle der Bestimmtheit, wo also**) $P_n = 1$ genommen werden kann, die Recursionsformel für die Coefficienten einer die Differentialgleichung (A) befriedigenden Reihe

$$g(x, \varrho) = \sum_{\nu=0}^{\infty} g_\nu(\varrho) x^{\varrho+\nu},$$

*) *Frobenius,* dieses Journal Bd. 80, S. 318.
**) *Fuchs,* dieses Journal Bd. 68, S. 360, Nr. III.

wie folgt:

$$\text{(I.)} \qquad a_{\nu 0}(\varrho)g_0(\varrho)+a_{\nu 1}(\varrho)g_1(\varrho)+\cdots+a_{\nu\nu}(\varrho)g_\nu(\varrho) = 0; \qquad (\nu = 1, 2, \ldots)$$

hierin ist

$$\text{(II.)} \qquad a_{\alpha\beta}(\varrho) = f_{\alpha-\beta}(\varrho+\beta), \qquad (\beta = 0, 1, 2, \ldots, \alpha)$$

wenn

$$f(x, \varrho) = \sum_{\nu=0}^{\infty} f_\nu(\varrho)x^\nu$$

die Entwickelung von $f(x, \varrho)$ in der Umgebung von $x = 0$ darstellt.

Bedeute $\varrho = r_k$ eine Wurzel der determinirenden Fundamentalgleichung

$$\text{(B)} \qquad f_0(\varrho) = 0,$$

und möge diese Gleichung auch noch durch die Werthe

$$r_0 = r_k+s_0, \quad r_1 = r_k+s_1, \quad \ldots, \quad r_{k-1} = r_k+s_{k-1}$$

befriedigt werden, wo $s_0, s_1, \ldots, s_{k-1}$ eine Reihe abnehmender positiver ganzer Zahlen darstellt, während alle anderen Wurzeln von (B) entweder von r_k nicht um ganze Zahlen verschieden oder in ihrem realen Theile kleiner als r_k sind; dann giebt es ein in der Umgebung von $x = 0$ in Reihenform darstellbares Integral der Differentialgleichung, welches zum Exponenten r_k gehört, wenn die Gleichungen (I.) für

$$\varrho = r_k, \quad \nu = 1, \quad 2, \quad \ldots, \quad s_0$$

durch ein Werthsystem $g_0(r_k), g_1(r_k), \ldots, g_{s_0}(r_k)$ befriedigt werden können, wo

$$g_0(r_k) \neq 0.$$

Die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen hierfür sind in Nr. II entwickelt, dieselben lassen sich aber zufolge der speciellen durch die Gleichung (II.) dargestellten Beschaffenheit der Coefficienten $a_{\alpha\beta}$ noch etwas umgestalten. Bezeichnen wir nämlich die aus den $a_{\alpha\beta}(\varrho)$ für unbestimmtes ϱ gebildeten Determinanten h_ν durch $h_\nu(\varrho)$, so ist

$$a_{\alpha\beta}(\varrho+\lambda) = f_{\alpha-\beta}(\varrho+\lambda+\beta) = a_{\alpha+\lambda,\beta+\lambda}(\varrho),$$

und folglich für $\varrho = r_k$,

$$\begin{Bmatrix} s_i & \ldots & s_0-1 \\ s_i+1 & \ldots & s_0 \end{Bmatrix} = h_{s_0-s_i}(r_k+s_i),$$

$$\begin{Bmatrix} s_i & \ldots & s_{i-1}-1 \\ s_i+1 & \ldots & s_{i-1} \end{Bmatrix} = h_{s_{i-1}-s_i}(r_k+s_i).$$

Das Kriterium für die Existenz eines zum Exponenten r_k gehörigen und in Reihenform darstellbaren Integrals lautet demnach wie folgt:

Wenn in der Reihe der Determinanten

$$h_{r_0-r_{k-1}}(r_{k-1}),\quad h_{r_0-r_{k-2}}(r_{k-2}),\quad \ldots,\quad h_{r_0-r_2}(r_2),\quad h_{r_0-r_1}(r_1)$$

die Determinante

$$h_{r_0-r_{k-i}}(r_{k-i})$$

die erste ist, die nicht verschwindet, während

$$h_{r_0-r_{k-i+1}}(r_{k-i+1}) = 0$$

ist, so ist das System (0) *für* $\varrho = r_k$ *vom Range* $r_0 - r_k - i$, *und für die Existenz einer zum Exponenten* r_k *gehörigen Reihe* $g(x, r_k)$ *ist nothwendig und hinreichend, dass die Determinanten*

$$\text{(III.)}\qquad h_{r_{k-1}-r_k}(\varrho),\quad h_{r_{k-2}-r_k,\, r_{k-1}-r_k}(\varrho),\quad \ldots,\quad h_{r_{k-i}-r_k,\, r_{k-1}-r_k,\, r_{k-2}-r_k, \ldots, r_{k-i+1}-r_k}(\varrho)$$

für $\varrho = r_k$ *sämmtlich verschwinden.*

Ist insbesondere

$$h_{r_0-r_{k-1}}(r_{k-1}) \neq 0,$$

so ist das System (0) für $\varrho = r_k$ vom Range $r_0 - r_k - 1$, und in diesem Falle ist also

$$h_{r_{k-1}-r_k}(r_k) = 0$$

die einzige nothwendige und hinreichende Bedingung; andererseits ist das Verschwinden der sämmtlichen Determinanten (III.) für $\varrho = r_k$, wenn $i = k$ genommen wird, stets hinreichend; dies hat schon mein Freund *Heffter**) auf anderem Wege bewiesen.

Bezeichnet man durch $r_0, r_1, \ldots, r_\mu$ eine Gruppe von sich nur um ganze Zahlen unterscheidenden Wurzeln der Gleichung (B), die so geordnet ist, dass der reale Theil jeder dieser Wurzeln grösser ist als der reale Theil aller auf dieselbe folgenden, und die auch alle Wurzeln der Gleichung (B) enthält, die von r_0 nur um ganze Zahlen verschieden sind, so zerfällt die der Wurzel

$$e^{2\pi i r_0}$$

der Fundamentalgleichung entsprechende *Fuchs*sche Integralgruppe in so viele *Hamburger*sche Untergruppen, als es in der Wurzelgruppe $r_0, r_1, \ldots, r_\mu$

*) Habilitationsschrift, S. 30.

Elemente giebt, zu denen ein in Reihenform darstellbares Integral gehört. Die Anzahl dieser Integrale wird durch den Rang des Systems

$$(a_{\alpha\beta}(r_\mu)) \qquad \begin{pmatrix} \alpha = 1, 2, \ldots, r_0 - r_\mu \\ \beta = 0, 1, \ldots, r_0 - r_\mu \end{pmatrix}$$

bestimmt; ist nämlich $r_0 - r_\mu - \tau$ der Rang dieses Systems, so ist $\tau + 1$ jene Anzahl, d. h. die Anzahl der gedachten Untergruppen. Wir bemerken, dass die Elemente einer und derselben Untergruppe zu verschiedenen Wurzeln der determinirenden Fundamentalgleichung als Exponenten gehören können.

Berlin, 30. April 1894.

Note über ebene Curven dritter Ordnung.

(Hierzu Tafel I.)

(Von Herrn *Ernst Kötter*.)

Man weiss, wie durchsichtig sich die Geometrie der Curven dritter Ordnung gestaltet, wenn man ihre Coordinaten als elliptische Functionen eines Parameters ausdrückt. Den Geometer mag interessiren, dass man — wenigstens für die reellen Theile der Curve — sich auf Grund höchst einfacher, rein geometrischer Schlüsse in den Besitz dieses Hülfsmittels setzen kann. Unser Resultat wird folgendes sein:

Jedem reellen Punkte einer Curve dritter Ordnung kann ein zwischen den Grenzen* 0 *und* 1 *liegender Parameterwerth so zugeordnet werden, dass für irgend drei Punkte in gerader Linie die Summe der zugehörigen Zahlen den Werth* 1 *oder* 2 *ergiebt. Auf jedem der — höchstens zwei — Züge wächst der Parameterwerth stetig von* 0 *bis* 1, *wenn der Punkt von einer bestimmten Anfangslage an einen vollständigen Umlauf über denselben macht.

Von den rationalen Curven dritter Ordnung sind nur die mit isolirtem Punkte dem Satze unterworfen.

I.

1. Als ein Zug Z_3 werde ein durch das Unendliche hindurch geschlossener Zug bezeichnet, der von der Verbindungslinie zweier ihm angehörigen Punkte Q und R in einem dritten Punkte P getroffen wird; und zwar soll sich P auf Z_3 stetig verändern, wenn dies mit Q und R der Fall ist. Speciell erhalten wir also den Satz, dass jedem Curvenpunkte eine Tangente zukommt, die sich mit ihm stetig verändert. Der unpaare Zug einer Curve dritter Ordnung, die entweder ohne zweifachen Punkt ist, oder doch einen isolirten Punkt besitzt, genügt der unendlich vielfachen projectivischen Erzeugbarkeit wegen diesen Bedingungen; aber es kommen solche Züge bei algebraischen Curven beliebig hoher Ordnung vor; auch kann

man sie [vgl. Fig. 1] aus heterogenen Curvenstücken zusammensetzen. Für alle diese Gebilde gelten die in diesem Abschnitte zu entwickelnden Sätze. Auf einem Zuge Z_3 kann man zwei entgegengesetzte Bewegungsrichtungen unterscheiden, und man hat, wie ich bei früherer Gelegenheit*) gezeigt habe, die Sätze:

Bewegt man zwei Punkte Q und R in derselben Richtung über einen Zug Z_3, so bewegt sich der letzte Schnittpunkt P der Geraden QR in der entgegengesetzten Richtung über die Curve; er macht $\alpha+\beta$ vollständige Umläufe, wenn Q und R α bez. β Umläufe machen.

Zwei Punkte, die in entgegengesetzten Richtungen α- bez. β-mal über dieselbe Bahn geführt werden und nicht gleichzeitig ruhen, begegnen sich zu $\alpha+\beta$ Zeitpunkten.

2. Lässt man die Punkte Q und R des ersten Satzes zusammenfallen, so erhält man in P den Tangentialpunkt von Q. Geht also Q einmal über den Zug, so bewegt sich sein Tangentialpunkt zweimal in entgegengesetzter Richtung über denselben. Daher sendet jeder Punkt des Zuges zwei Tangenten an denselben, und es fällt an genau drei Stellen — den Wendepunkten W_1, W_2, W_3 — Q mit seinem Tangentialpunkte zusammen. Dieselben zerlegen den Zug in drei „Hauptbogen" W_1W_2, W_2W_3, W_3W_1. Lassen wir nun zwei Punkte Q und R im „positiven" Sinne $W_1W_2W_3$ je einen vollständigen Umlauf von W_1 aus über Z_3 machen, und zwar so, dass sie in W_2 wie in W_3 gleichzeitig anlangen, so bewegt sich der letzte Schnittpunkt P zweimal in negativer Richtung von W_1 aus über den Zug, und zwar gelangt er in den drei erwähnten Zeiträumen von W_1 nach W_2, von W_2 nach W_3, von W_3 nach W_1. Während des zweiten Intervalls findet der Uebergang über W_1 statt, der den ersten Umlauf beendet. Innerhalb des ersten Intervalls hat P mithin nur ein Curvenstück durchlaufen, d. h. ist von W_1 über W_3 nach W_2 gelangt. Wir folgern:

Die drei Schnittpunkte einer Geraden mit Z_3 können niemals einem und demselben Hauptbogen angehören. Insbesondere sind ein Punkt und die Berührungspunkte der beiden Tangenten, die von ihm aus an Z_3 sich legen lassen, stets auf die drei Hauptbogen vertheilt. Die einzige von einem Wendepunkte W_i noch ausgehende Tangente berührt den ihm nicht angrenzenden Hauptbogen im Punkte V_i.

*) *Beiträge zur Theorie der Osculationen bei ebenen Curven dritter Ordnung,* Inaugural-Dissertation. Berlin 1884.

Die Punkte W_i und V_i liegen in der Reihenfolge

$$W_1 \quad V_3 \quad W_2 \quad V_1 \quad W_3 \quad V_2 \quad W_1$$

und zerlegen die Curve in sechs Theilbogen. Diejenigen, welche einem Hauptbogen benachbart sind, enthalten die Berührungspunkte P', P'' der Tangenten, die von seinen Punkten ausgehen. Während P in positiver Richtung die Hauptbogen W_1W_2, W_2W_3, W_3W_1 überschreitet, durchläuft P' in negativer Richtung V_1W_2, V_2W_3, V_3W_1, P'' die Bogen V_2W_1, V_3W_2, V_1W_3*).

3. Wir legen jetzt jedem Curvenpunkte einen zwischen den Grenzen 0 und 1 liegenden Parameterwerth bei, speciell den Punkten

$$W_1, \quad V_3, \quad W_2, \quad V_1, \quad W_3, \quad V_2, \quad W_1.$$

die Werthe

$$0, \quad \tfrac{1}{6}, \quad \tfrac{1}{3}, \quad \tfrac{1}{2}, \quad \tfrac{2}{3}, \quad \tfrac{5}{6}, \quad 1.$$

Der Parameter eines anderen Punktes soll zwischen denen der beiden Punkte liegen, die ihn von den vier anderen trennen. Trifft dies für den Parameterwerth u eines Punktes zu, so können den beiden zugehörigen Berührungspunkten ohne Widerspruch die Zahlen $\frac{1}{2}(1-u)$ und $\frac{1}{2}(2-u)$ beigelegt werden. Je nachdem nämlich P den Hauptbogen W_1W_2, W_2W_3, W_3W_1 angehört, unterliegen die Zahlen u, $\frac{1}{2}(1-u)$, $\frac{1}{2}(2-u)$ den Bedingungen:

$$0<u<\tfrac{1}{3}, \quad \tfrac{1}{2}>\frac{1-u}{2}>\tfrac{1}{3}, \quad 1>\frac{2-u}{2}>\tfrac{5}{6},$$

$$\tfrac{1}{3}<u<\tfrac{2}{3}, \quad \tfrac{1}{3}>\frac{1-u}{2}>\tfrac{1}{6}, \quad \tfrac{5}{6}>\frac{2-u}{2}>\tfrac{2}{3};$$

$$\tfrac{2}{3}<u<1, \quad \tfrac{1}{6}>\frac{1-u}{2}>0, \quad \tfrac{2}{3}>\frac{2-u}{2}>\tfrac{1}{2}.$$

---

*) Für eigentliche Curven dritter Ordnung hat diese und verwandte Sätze Herr *Sturm* rein geometrisch nachgewiesen. Vergl. die Abhandlung: *Ueber die ebenen Curven dritter Ordnung*, dieses Journal, Bd. 90, S. 85—101. Aus der Parameterdarstellung hat sie *Durège* gefolgert. Vergl. die Arbeiten *Ueber fortgesetztes Tangentenziehen etc.* Mathematische Annalen Bd. 1, Seite 509—532 und *Ueber Curven dritter Ordnung und ihre Abbildung auf einem Kreise*, Zeitschrift für Mathematik und Physik, Bd. XVII, S. 433—444. Aus dem Obigen ersieht man, dass ihnen eine weitere Geltung zukommt. Setzt man einen Zug Z_2 z. B. aus Kegelschnittstücken zusammen, so müssen sich die drei Wendepunkte unter den Uebergangsstellen von einem Kegelschnitt zu einem anderen befinden. Da dieselben sich an einer solchen Stelle berühren, so müssen wenigstens von drei verschiedenen Kegelschnitten Bogen zur Verwendung kommen. Der unpaare Zug von Fig. 1 besteht z. B. aus zwei Kreisbogen und einem Hyperbelbogen.

In den drei Fällen kann man daher

$$P' \text{ mit } \frac{1-u}{2}, \quad P'' \text{ mit } \frac{2-u}{2};$$

$$P' \text{ mit } \frac{2-u}{2}, \quad P'' \text{ mit } \frac{1-u}{2};$$

$$P' \text{ mit } \frac{1-u}{2}, \quad P'' \text{ mit } \frac{2-u}{2}$$

bezeichnen.

4. Auf diese Art kann man offenbar immer neue Punkte von Z_3 mit Zahlen versehen. Von den Punkten V_1, V_2, V_3 aus Tangenten legend kommt man zu Punkten mit den Zahlen

$$\tfrac{1}{12}, \quad \tfrac{1}{4}, \quad \tfrac{5}{12}, \quad \tfrac{7}{12}, \quad \tfrac{3}{4}, \quad \tfrac{11}{12},$$

durch höchstens m-maliges Tangentenlegen von W_1, W_2, W_3 aus zu Punkten für alle Zahlen von der Form

$$u = \frac{\mu}{3.2^m}. \qquad (\mu = 0, 1, 2, 3, \ldots, 3.2^m - 1)$$

Die Punkte, die hierbei in den Bogen $W_3 V_2$ gelangen, seien der Reihe nach*)

$$W_3, \quad P_1, \quad P_2, \quad \ldots, \quad P_r, \quad V_2$$

mit den zugehörigen Parameterwerthen

$$\tfrac{2}{3}, \quad u_1, \quad u_2, \quad \ldots, \quad u_r, \quad \tfrac{5}{6};$$

die zugehörigen Tangentialpunkte

$$W_3, \quad Q_1, \quad Q_2, \quad \ldots, \quad Q_r, \quad W_2$$

haben die Parameter

$$\tfrac{2}{3}, \quad 2-2u_1, \quad 2-2u_2, \quad \ldots, \quad 2-2u_r, \quad \tfrac{1}{3}$$

und folgen in negativer Richtung auf einander. Es sind dies alle Punkte, die man nach höchstens $(m-1)$-maligem Tangentenlegen von W_1, W_2, W_3 aus im Hauptbogen $W_1 W_2$ vorfindet. Ist nun

$$\tfrac{1}{3} < 2-2u_r < 2-2u_{r-1} < \cdots < 2-2u_1 < \tfrac{2}{3},$$

so ist zugleich

$$\tfrac{2}{3} < u_1 < u_2 < \cdots < u_r < \tfrac{5}{6}.$$

Es liegt also z. B. der Punkt mit dem Parameterwerth $\frac{3}{4}$ zwischen denen

*) Vgl. Fig. 2. Dieselbe enthält die Punkte mit den Parameterwerthen $\frac{\mu}{24}$ bei einer eigentlichen Curve dritter Ordnung. Jeder Punkt ist durch den Zähler μ gekennzeichnet, W_3 und V_2 haben also die Zahlen 16 und 20. Der Punkt 21 liegt ausserhalb des Blattes.

mit den Zahlen $\frac{2}{3}$ und $\frac{5}{6}$. Da analoge Schlüsse für jeden anderen der sechs Theilbogen gelten, so folgt der Reihe nach, dass die bei höchstens zwei-, drei-, ..., m-maligem Tangentenlegen erhaltenen Punkte bei einem Umlaufe in positiver Richtung von W_1 aus in der Reihenfolge getroffen werden, in der ihre Parameterwerthe der Grösse nach folgen.

5. Besitzt ein von Z_3 verschiedener Zug $\mathfrak{Z}_2$ (Fig. 1.) die Eigenschaft, dass die Verbindungslinie zweier Punkte $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{R}$ desselben dem Zuge Z_3 in einem Punkte P, ihm selbst aber nicht mehr begegnet, und dass eine stetige Veränderung zweier der Punkte eine stetige Bewegung des dritten nach sich zieht, so soll $\mathfrak{Z}_2$ dem Zuge Z_3 beigeordnet heissen. Wie ich am angeführten Orte gezeigt habe, kann man jedem der beiden Richtungssinne auf Z_3 einen „ihm gleichen" auf $\mathfrak{Z}_2$ in der Art zuweisen, dass unser Hauptsatz [(1.)] erhalten bleibt. Bewegt sich also ein Punkt $\mathfrak{Q}$ in positiver Richtung über $\mathfrak{Z}_2$, so wird sich sein Tangentialpunkt zweimal in negativer Richtung über Z_3 bewegen, so dass jeder Punkt dieses Zuges zwei Tangenten an $\mathfrak{Z}_2$ sendet. Von den beiden zu W_1 gehörenden Berührungspunkten bezeichnen wir den einen mit $\mathfrak{W}_1$, den anderen mit $\mathfrak{V}_1$. Geht ein Punkt in positiver Richtung von $\mathfrak{W}_1$ nach $\mathfrak{V}_1$, so macht der Tangentialpunkt in negativer Richtung von W_1 aus einen vollen Umlauf über Z_3. Wir begegnen also zuerst einem Punkte $\mathfrak{V}_3$, der eine Tangente aus W_3, hernach einem Punkte $\mathfrak{W}_2$, der seine Tangente aus W_2 erhält. Gehen wir von $\mathfrak{V}_1$ nach $\mathfrak{W}_1$ zurück, so begegnen wir zuerst einem Punkte $\mathfrak{W}_3$, dessen Tangente W_3, dann einem Punkte $\mathfrak{V}_2$, dessen Tangente W_2 enthält. Den sechs in positiver Richtung auf einander folgenden Punkten

$$\mathfrak{W}_1, \quad \mathfrak{V}_3, \quad \mathfrak{W}_2, \quad \mathfrak{V}_1, \quad \mathfrak{W}_3, \quad \mathfrak{V}_2, \quad \mathfrak{W}_1$$

legen wir die Parameterwerthe

$$0, \quad \tfrac{1}{6}, \quad \tfrac{1}{3}, \quad \tfrac{1}{2}, \quad \tfrac{2}{3}, \quad \tfrac{5}{6}, \quad 1$$

bei und ordnen sie dadurch den Punkten

$$W_1, \quad V_3, \quad W_2, \quad V_1, \quad W_3, \quad V_2, \quad W_1$$

zu. Jedem Punkte von Z_3 können wir einen Punkt von $\mathfrak{Z}_2$ durch die Forderung zuweisen, dass beide den Tangentialpunkt gemein haben und entsprechenden Theilbogen angehören sollen. Giebt man entsprechenden Punkten denselben Parameterwerth, so folgt:

Durch m-maliges Tangentenlegen kann man, ausgehend von den drei

Wendepunkten, jeder Zahl von der Form

$$\frac{\mu}{3.2^m} \qquad (\mu = 0, 1, 2, 3, \ldots, 3.2^m - 1)$$

einen Punkt sowohl auf Z_3, wie auf jedem Z_3 beigeordnetem paaren Zuge $\mathfrak{Z}_2$ zuordnen. Erhält hierbei ein Punkt den Parameterwerth u, so kommen den Berührungspunkten der von ihm ausgehenden Tangenten die Werthe $\frac{1}{2}(1-u)$ und $\frac{1}{2}(2-u)$ zu. Bei einem Umlaufe in positiver Richtung von einem bestimmten Punkte des betreffenden Zuges aus begegnet man beliebig vielen dieser Punkte in der Reihenfolge, wie ihre Parameterwerthe auf einander folgen.

6. Ehe wir zu den algebraischen Curven dritter Ordnung übergehen, beweisen wir noch einen — in dieser Allgemeinheit, wie es scheint, noch nicht bekannten — Hülfssatz:

Schneidet eine Gerade den Zug Z_3 in den Punkten A, B, C, eine zweite in den Punkten A_1, B_1, C_1, so müssen wenigstens zwei der letzteren einem der drei Bogen angehören, in die A, B, C den Zug zerlegen.

Von zwei beweglichen Punkten Q, R mag der eine in den Zeiträumen t_1, t_2, t_3 die Bogen BC, CA, AB, der zweite die Bogen CA, AB, BC im Richtungssinne ABC durchlaufen. Alsdann macht der letzte Schnittpunkt P der Geraden QR in entgegengesetzter Richtung zwei volle Umläufe über Z_3 und gelangt in den drei Zeiträumen von A nach B, von B nach C, endlich von C nach A. Im zweiten Zeitraume z. B. kann er direct von B über A nach C gehen oder diese Bewegung noch zusätzlich nach einem vollen Umlaufe über Z_3 ausführen. Jedenfalls überschreitet er jeden Punkt der Bogen AB und CA während der zweiten, jeden Punkt von AB und BC während der dritten Epoche mindestens einmal. Während des ersten Zeitraums kann er also nicht in den Bogen AB gelangen. Da analoge Schlüsse für die zweite und dritte Epoche Platz greifen, so befindet sich P stets mit einem der Punkte Q oder R in demselben der Bogen BC, CA, AB. Liegen aber von den Schnittpunkten einer zweiten Geraden zwei in verschiedenen dieser drei Bogen, so können sie als gleichzeitige Lagen von P, Q, R angesehen werden.

II.

7. Bei einer algebraischen Curve dritter Ordnung, die mit Hülfe eines Strahlenbüschels und eines zu ihm projectivischen Büschels von Curven dritter Ordnung auf unendlich vielfache Art erzeugt werden kann, liegen

nun die drei Wendepunkte in gerader Linie. Wir erhalten also mit Rücksicht auf (2.) und (6.):

Von den drei Schnittpunkten des unpaaren Zuges einer Curve dritter Ordnung mit einer Geraden gehören zwei einem, der dritte einem anderen Hauptbogen an.

Ferner gilt allgemein der Satz von der Satellite, d. h. die n-ten Tangentialpunkte dreier Punkte in gerader Linie werden wieder von einer Geraden ausgeschnitten. Da für jeden Punkt der von uns construirten Mannigfaltigkeit alle Tangentialpunkte von einem bestimmten ersten an mit einem Wendepunkte zusammenfallen, so folgt:

Die Verbindungslinie zweier Punkte unserer Mannigfaltigkeit schneidet stets einen dritten Punkt derselben aus.

Indem wir uns zunächst auf den unpaaren Zug beschränken, erhalten wir zu drei Punkten P, Q, R in gerader Linie die Berührungspunkte P', P''; Q', Q''; R', R''. Jede der vier Linien, die einen der Punkte Q', Q'' mit einem der Punkte R', R'' verbindet, schneidet einen der Punkte P', P'' aus und hat PQR zur Satellite. Nun liegen zwei der drei Punkte P, Q, R, etwa Q, R in einem, der dritte, P, in einem anderen Hauptbogen [vgl. Fig. 3]. Der übrig bleibende Hauptbogen empfängt also aus allen drei Punkten Tangenten [(2.)]. Ihre Berührungspunkte P'', Q'', R'' liegen [(2.)] nicht in einer Geraden. Die gesuchten vier Geraden sind also

$$P'Q''R'',\quad P''Q'R'',\quad P''Q''R',\quad P'Q'R'.$$

Die neun Punkte seien nun angehörige unserer Mannigfaltigkeit mit den Parameterwerthen u, u', u''; v, v', v''; w, w', w''*), so dass z. B. u' die eine, u'' die andere der beiden Zahlen $\frac{1}{2}(1-u)$, $\frac{1}{2}(2-u)$ ist, und die Relationen

$$u'-u'' = \pm\tfrac{1}{2},\quad v'-v'' = \pm\tfrac{1}{2},\quad w'-w'' = \pm\tfrac{1}{2}$$

bestehen. In der Gleichung

$$u''+v''+w'' = \tfrac{1}{2}[m-(u+v+w)]$$

ist m eine der Zahlen 1, 2, ..., 6. Da P'', Q'', R'' demselben Hauptbogen angehören, so liegen u'', v'', w'' alle drei zwischen den Grenzen 0 und $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{3}$ und $\frac{2}{3}$, $\frac{2}{3}$ und 1. $u''+v''+w''$ liegt also *innerhalb* eines der Intervalle von 0 bis 1, 1 bis 2, 2 bis 3. Ist $u+v+w$ gleich 1 oder 2, so ist $u''+v''+w''$

*) In unserer Fig. 3 haben P, Q, R die Zahlen $\frac{11}{12}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{7}{12}$.

eine der Zahlen $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$ oder $\frac{5}{2}$ und mithin sind

$$u'+v''+w'', \quad u''+v'+w'', \quad u''+v''+w', \quad u'+v'+w'$$

ganze Zahlen (1 oder 2). Ist etwa P einer der Wendepunkte, W_i, so fällt einer der Punkte P', P'' mit W_i, der andere mit V_i zusammen. Liegt nun Q in dem einen, R in dem anderen W_i angrenzenden Hauptbogen, so erhalten wir, ganz so wie vorher, in dem dritten Bogen drei nicht in gerader Linie liegende Berührungspunkte V_i, Q'', R''. Anderenfalls können Q und R beide dem W_i nicht angrenzenden Hauptbogen angehören, alsdann erhält jeder andere Hauptbogen von Q, wie von R aus eine Tangente, deren Berührungspunkte mit W_i zusammen eine Terne P'', Q'', R'' bilden, wie sie unserem Beweise zu Grunde liegt. Ist endlich PQR mit der Wendelinie $W_1W_2W_3$ identisch, so ist jedes der Tripel $W_2V_1W_3$, $W_3V_2W_1$, $W_1V_3W_2$ als Tripel $P''Q''R''$ zu betrachten. Ergeben also irgend drei in gerader Linie liegende Punkte unserer Mannigfaltigkeit auf dem unpaaren Zuge die Parametersumme 1 oder 2, so tritt dasselbe für die vier Geraden ein, deren Satellite sie ist. Nun ist für die Wendelinie

$$u+v+w = 0+\tfrac{1}{3}+\tfrac{2}{3} = 1.$$

Das Gesetz, dass für irgend drei Punkte in gerader Linie die Parametersumme gleich 1 oder 2 ist, überträgt sich also zunächst auf die vier Geraden

$$W_1W_2W_3, \quad W_1V_2V_3, \quad V_1W_2V_3, \quad V_1V_2W_3,$$

welche die Wendelinie zur Satellite haben, alsdann auf die durch zwei-, drei-, ..., m-maliges Tangentenlegen von einem der Wendepunkte aus erreichbaren Punkte, d. h. es gilt in der Punktmenge des unpaaren Zuges allgemein.

8. Ist die Curve dritter Ordnung zweitheilig, so bleibt der Satz von der Satellite bestehen. Irgend zwei der Punkte

$$\mathfrak{W}_1, \quad \mathfrak{W}_2, \quad \mathfrak{W}_3, \quad \mathfrak{V}_1, \quad \mathfrak{V}_2, \quad \mathfrak{V}_3$$

liegen daher mit einem der Punkte

$$W_1, \quad W_2, \quad W_3, \quad V_1, \quad V_2, \quad V_3$$

auf einer Geraden. Macht nun $\mathfrak{Q}$ in positiver Richtung einen Umlauf über $\mathfrak{Z}_2$ von $\mathfrak{W}_1$ aus, so macht der letzte Schnittpunkt P der Geraden $\mathfrak{W}_1\mathfrak{Q}$ von W_1 aus einen Umlauf in negativer Richtung über den unpaaren Zug. Daher schneiden die Tangente in $\mathfrak{W}_1$ und die Geraden

$$\mathfrak{W}_1\mathfrak{V}_3, \quad \mathfrak{W}_1\mathfrak{W}_2, \quad \mathfrak{W}_1\mathfrak{V}_1, \quad \mathfrak{W}_1\mathfrak{W}_3, \quad \mathfrak{W}_1\mathfrak{V}_2$$

der Reihe nach die Punkte

$$W_1, \quad V_2, \quad W_3, \quad V_1, \quad W_2, \quad V_3$$

aus. Man erkennt, dass die drei Tripel

$$W_1\mathfrak{W}_2\mathfrak{W}_3, \quad \mathfrak{W}_1 W_2\mathfrak{W}_3, \quad \mathfrak{W}_1\mathfrak{W}_2 W_3$$

von Geraden ausgeschnitten werden.

Durchlaufen nun $\mathfrak{Q}$ und $\mathfrak{R}$ von W_1 aus in positiver Richtung den paaren Zug, und zwar so, dass sie in $\mathfrak{W}_2$ und in $\mathfrak{W}_3$ gleichzeitig anlangen, so geht der letzte Schnittpunkt zweimal in negativer Richtung über den unpaaren Zug, und zwar gelangt er in den drei Zeitabschnitten — vgl. (6.) — von W_1 über W_3 nach W_2, von W_2 über W_1 nach W_3, endlich von W_3 über W_2 nach W_1. Also ergiebt sich:

Zwei Punkte des paaren Zuges können ihre entsprechenden Punkte nicht beide in dem Hauptbogen haben, dem der letzte Schnittpunkt ihrer Verbindungslinie angehört.

Legt man nun von P, Q, R aus auch an den paaren Zug Tangenten, so liegen drei der Berührungspunkte, $\mathfrak{P}''$, $\mathfrak{Q}''$, $\mathfrak{R}''$, in einem der Bogen $\mathfrak{W}_2\mathfrak{W}_3$, $\mathfrak{W}_3\mathfrak{W}_1$, $\mathfrak{W}_1\mathfrak{W}_2$; derselbe entspricht dem Hauptbogen, der P'', Q'', R'' enthält. Keines der Tripel

$$P''\mathfrak{Q}''\mathfrak{R}'', \quad \mathfrak{P}''Q''\mathfrak{R}'', \quad \mathfrak{P}''\mathfrak{Q}''R''$$

wird daher von einer Geraden ausgeschnitten. Eine Linie, die z. B. einen der Punkte $\mathfrak{Q}'$, $\mathfrak{Q}''$ mit einem der Punkte R', R'' verbindet, muss aber einen der Punkte $\mathfrak{P}'$, $\mathfrak{P}''$ treffen; es ergeben sich also die Geraden

$$\mathfrak{P}'\mathfrak{Q}''R'', \quad \mathfrak{P}''\mathfrak{Q}'R'', \quad \mathfrak{P}''\mathfrak{Q}''R', \quad \mathfrak{P}'\mathfrak{Q}'R'$$

[vgl. Fig. 3]. Zwei Punkte unserer Mannigfaltigkeit auf $\mathfrak{Z}_2$ und die entsprechenden Punkte auf Z_3 liegen also mit demselben Punkte des letzteren auf einer Geraden. Da entsprechende Punkte gleiche Parameterwerthe haben, so folgt:

Mag die vorgelegte Curve dritter Ordnung eintheilig oder zweitheilig sein, so liegen irgend zwei Punkte unserer Mannigfaltigkeit mit einem dritten auf einer Geraden. Die Parameterwerthe dieser drei Punkte ergeben die Summe 1 ***oder*** 2.

9. Man betrachte nun (Fig. 2) auf dem unpaaren Zuge die Punkte $W_1P_1P_2P_3\ldots W_1$ mit den Parametern

$$\frac{\mu}{3.2^m}, \qquad (\mu = 0, 1, \ldots, 3.2^m)$$

die also durch höchstens m-maliges Tangentenlegen von den Wendepunkten aus entstehen. Die Geraden

$$P_l P_m \quad \text{und} \quad P_{l+1} P_{m+1}$$

ergeben die Parametersummen

$$\frac{l+m}{3.2^m} \quad \text{und} \quad \frac{l+m+2}{3.2^m}$$

und schneiden daher zwei Punkte P_{n+2} und P_n aus. Soll nun eine Gerade die Bogen $P_l P_{l+1}$ und $P_m P_{m+1}$ in Q und R treffen, so ist ihr letzter Schnittpunkt P jedenfalls auf zwei Hauptbogen beschränkt. Liegen $P_l P_{l+1}$ und $P_m P_{m+1}$ in verschiedenen Hauptbogen, so muss er einem derselben ebenfalls angehören (6.); liegen sie aber in demselben Hauptbogen, so kann P in denselben nicht hineingelangen (2.). Durchlaufen also Q und R in positiver Richtung die Bogen $P_l P_{l+1}$ und $P_m P_{m+1}$, so bewegt sich P in negativer Richtung nur über ein Curvenstück und geht also von P_{n+2} über P_{n+1} nach P_n. Beschreibt nun, während man R einen Zeitraum hindurch ruhen lässt, Q den Bogen AB, so durchläuft P in negativer Richtung den Bogen $A_1 B_1$, der also höchstens einen der Punkte $W_1, P_1, P_2, \dots, W_1$, nämlich P_{n+1}, enthalten kann. Da irgend zwei Punkte unserer Mannigfaltigkeit auf Z_3 als Glieder einer solchen begrenzten Reihe aufgefasst und zwischen ihnen noch unbegrenzt viele Punkte der Mannigfaltigkeit eingeschaltet werden können, so folgt:

Ein Curvenstück AB, des unpaaren Zuges, das keinen Punkt der Mannigfaltigkeit enthält, wird von jedem Punkte aus in einen Bogen $A_1 B_1$ projicirt, der höchstens einen der Punkte enthält. Zwischen je zwei Punkten der Mannigfaltigkeit befinden sich unendlich viele derartige Bogen $A_1 B_1$, von denen keine zwei einen Punkt des Zuges gemeinsam haben.

Da jeder Punkt der Curve Endpunkt eines wohldefinirten Bogens $B_1 A_1$ ist, in den nämlich BA von dem letzten Schnittpunkte der Geraden AA_1 aus projicirt wird, so gelangen wir zu dem Widerspruch, dass die Punktmenge auf Z_3, wenn sie nicht überall dicht ist, ohne Häufungspunkt sein müsste, oder anders ausgedrückt, dass auch in jedem endlichen von zwei Punkten der Mannigfaltigkeit begrenzten Curvenstück unendlich viele Strecken von endlicher Länge sich finden müssten, von denen keine zwei einen Punkt mit einander gemein haben. Wir schliessen daher:

Innerhalb jedes beliebigen Stückes AB des unpaaren Zuges befinden sich unendlich viele Punkte unserer Mannigfaltigkeit.

Ist ein paarer Zug vorhanden, so überträgt sich dies nach der Art ihrer Entstehung auch auf seine Mannigfaltigkeit von Punkten. Stellen wir die Forderung, dass bei einem positiven Umlaufe von W_1 bez. $\mathfrak{W}_1$ aus der Parameter u von 0 bis 1 stetig wachsen soll, so ergiebt sich nun auf Grund wohlbekannter Schlüsse für jeden Punkt ein rationaler oder irrationaler Parameterwerth, wie umgekehrt jedem Werthe ein Punkt zugehört. Für irgend drei Punkte in gerader Linie gilt der an die Spitze gestellte Satz.

10. Werden die Punkte $P_1, \ldots, P_6$ auf der C_3 von einem Kegelschnitte ausgeschnitten, so liegen die drei letzten Schnittpunkte der Geraden

$$P_1 P_2, \quad P_3 P_4, \quad P_5 P_6$$

ihrerseits auf einer vierten Geraden. Man schliesst also:

Für die Parameterwerthe von sechs Punkten, die auf einem Kegelschnitte liegen, besteht die Beziehung

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_6 = m,$$

wo m eine der Zahlen 1, 2, ..., 5 *ist.*

Ebenso folgt:

3n *Punkte der Curve werden von einer Curve n-ter Ordnung dann und nur dann ausgeschnitten, wenn die zugehörigen Parameterwerthe zur Summe eine der Zahlen*

$$1, \quad 2, \quad 3, \quad \ldots, \quad 3n-1$$

haben.

Berlin, Mai 1894.

Untersuchung der durch die eine homogene Relation $y_1^p - y_2 y_3 y_4 \dots y_{p+1} = 0$ verbundenen Integrale einer homogenen linearen Differentialgleichung.

(Von Herrn *Georg Wallenberg*.)

In meiner Arbeit über die Anwendung der Differentialinvarianten (dieses Journal Bd. 113, Heft I, S. 1) bin ich auf eine Klasse von linearen homogenen Differentialgleichungen $(p+1)$-ter Ordnung gestossen, für welche gewisse Differentialinvarianten verschwinden (l. c. pag. 28) und welche Integrale der Form

$$y_1 = \sqrt[k]{R_1(x)}, \quad y_i = \sqrt[\lambda]{R_1(x)}.e^{\varepsilon_i \int \sqrt[p]{R(x)} dx} \qquad (i = 2, 3, \dots, p+1)$$

besitzen, worin k eine positive ganze Zahl, ε_i eine primitive $p$te Einheitswurzel und $R(x)$ sowie $R_1(x)$ rationale Functionen von x bedeuten; zwischen diesen Integralen besteht, wenn p eine Primzahl ist, eine einzige homogene irreductible Relation, nämlich:

$$y_1^p - y_2 y_3 y_4 \dots y_{p+1} = 0.$$

Da nun *nicht* umgekehrt aus dem Bestehen dieser *einen* Relation mittelst der in § II der genannten Abhandlung angegebenen Transformationsmethode auf das Verschwinden jener Invarianten und somit auf die Natur der Integrale geschlossen werden kann, so soll im Folgenden die Theorie der *Umläufe* benutzt werden, um aus der Existenz dieser einen homogenen Relation den functionalen Charakter der ihr genügenden Integrale zu erschliessen.

Es möge also zwischen den ein Fundamentalsystem bildenden Integralen einer linearen homogenen Differentialgleichung $(p+1)$-ter Ordnung*)

*) p braucht in der folgenden Untersuchung nicht als Primzahl angenommen zu werden.

mit rationalen Coefficienten die *eine* homogene Relation

$$(1.)\qquad y_1^p - y_2 y_3 \dots y_{p+1} = 0$$

bestehen: durch einen Umlauf um einen singulären Punkt gehe y_k über in

$$y_k' = \alpha_{k_1} y_1 + \dots + \alpha_{k_{p+1}} y_{p+1}. \qquad (k = 1, 2, \dots, p+1)$$

Es muss also auch die Relation bestehen:

$$(2.)\quad \begin{cases} (\alpha_{1_1} y_1 + \dots + \alpha_{1_{p+1}} y_{p+1})^p - (\alpha_{2_1} y_1 + \dots + \alpha_{2_{p+1}} y_{p+1})(\alpha_{3_1} y_1 + \dots + \alpha_{3_{p+1}} y_{p+1}) \dots \\ \qquad \dots (\alpha_{p+1_1} y_1 + \dots + \alpha_{p+1_{p+1}} y_{p+1}) = 0. \end{cases}$$

Da aber nach Voraussetzung die Integrale $y_1, \dots, y_{p+1}$ nur die *eine* Relation (1.) befriedigen sollen, so muss die linke Seite von (2.) mit der linken Seite von (1.) bis auf einen constanten Factor übereinstimmen, d. h. es muss *identisch* sein:

$$(3.)\quad \begin{cases} (\alpha_{1_1} y_1 + \dots + \alpha_{1_{p+1}} y_{p+1})^p - (\alpha_{2_1} y_1 + \dots + \alpha_{2_{p+1}} y_{p+1}) \dots (\alpha_{p+1_1} y_1 + \dots + \alpha_{p+1_{p+1}} y_{p+1}) \\ \qquad = C(y_1^p - y_2 y_3 \dots y_{p+1}). \end{cases}$$

Es sei nun zunächst $p+1 > 3$; da die Gleichung (3.) identisch, d. h. für beliebige $y_1, y_2, \dots, y_{p+1}$ besteht, so kann man in derselben z. B. y_1 und eines der $y_k (k = 2, 3, \dots, p+1)$ gleich Null setzen und erhält dadurch folgendes System identischer Gleichungen:

$$(4.)\quad \begin{cases} (\alpha_{1_2} y_2 + \dots + \alpha_{1_{p+1}} y_{p+1})_k^p - (\alpha_{2_2} y_2 + \dots + \alpha_{2_{p+1}} y_{p+1})_k \dots \\ \qquad \dots (\alpha_{p+1_2} y_2 + \dots + \alpha_{p+1_{p+1}} y_{p+1})_k = 0; \\ \qquad (k = 2, 3, \dots, p+1) \end{cases}$$

der Index k soll anzeigen, dass in diesen Summen beziehentlich das Glied $\alpha_{i_k} y_k (i = 1, 2, \dots, p+1)$ fehlt. Würden die Grössen $\alpha_{1_2}, \alpha_{1_3}, \dots, \alpha_{1_{p+1}}$ nicht sämmtlich verschwinden, so könnte das Gleichungssystem (4.) nur bestehen, wenn

$$\alpha_{r_s} = \lambda_r \alpha_{1_s} \qquad (r, s = 2, 3, \dots, p+1)$$

und gleichzeitig

$$\lambda_2 . \lambda_3 \dots \lambda_{p+1} = 1$$

ist. Die Gleichung (3.) lautet dann, wenn

$$\alpha_{1_2} y_2 + \alpha_{1_3} y_3 + \dots + \alpha_{1_{p+1}} y_{p+1} = Y$$

gesetzt wird:

$$(\alpha_{1_1} y_1 + Y)^p - (\alpha_{2_1} y_1 + \lambda_2 Y)(\alpha_{3_1} y_1 + \lambda_3 Y) \dots (\alpha_{p+1_1} y_1 + \lambda_{p+1} Y) = C(y_1^k - y_2 y_3 \dots y_{p+1}).$$

Setzt man hierin $y_1 = 0$, so ist die linke Seite identisch 0, folglich müsste

$C = 0$ sein und identisch die Gleichung bestehen:

$$(\alpha_{1_1} y_1 + Y)^p - (\alpha_{2_1} y_1 + \lambda_2 Y)(\alpha_{3_1} y_1 + \lambda_3 Y) \dots (\alpha_{p+1_1} y_1 + \lambda_{p+1} Y) = 0,$$

d. h. es müsste auch sein:

$$\alpha_{r_1} = \lambda_r \alpha_{1_1}. \qquad (r = 2, 3, \dots, p+1)$$

Es würden also *alle* Integrale $y_1, y_2, \dots, y_{p+1}$ nach dem Umlaufe bis auf einen constanten Factor übergehen in

$$\alpha_{1_1} y_1 + \alpha_{1_2} y_2 + \dots + \alpha_{1_{p+1}} y_{p+1}$$

und demgemäss kein Fundamentalsystem mehr bilden, was nicht möglich ist. Es müssen daher sämmtliche Grössen $\alpha_{1_2}, \alpha_{1_3}, \dots, \alpha_{1_{p+1}}$ verschwinden, also y_1 nach dem Umlaufe in $\alpha_{1_1} y_1$ übergehen. Setzt man voraus, dass die Differentialgleichung, welcher die Integrale y_i genügen, zur *Fuchs*schen Klasse gehört*) und dass die Wurzeln ihrer determinirenden Fundamentalgleichungen rationale Zahlen sind, so folgt hieraus, dass y_1 Wurzel aus einer rationalen Function ist:

$$y_1 = \sqrt[\mu]{R(x)}.$$

Das Gleichungssystem (4.) lautet nunmehr:

$$(\alpha_{2_2} y_2 + \dots + \alpha_{2_{p+1}} y_{p+1})_k \dots (\alpha_{p+1_2} y_2 + \dots + \alpha_{p+1_{p+1}} y_{p+1})_k = 0. \qquad (k = 2, 3, \dots, p+1)$$

Eine solche Gleichung kann nur bestehen, wenn einer der Factoren des links stehenden Productes verschwindet, und zwar muss in jeder Gleichung des Systems ein *anderer* Factor verschwinden, da sonst eines der Integrale $y_2, \dots, y_{p+1}$ nach dem Umlaufe in y_1, multiplicirt mit einer Constanten, überginge, was nicht angängig ist. Es wird also $y_k (k = 2, 3, \dots, p+1)$ nach einem Umlaufe übergehen in $\alpha_{k_1} y_1 + \alpha_{k_{\varrho_k}} y_{\varrho_k}$, wo die Indices ϱ_k von einander verschiedene Zahlen aus der Reihe $2, 3, \dots, p+1$ bedeuten; die Gleichung (3.) lautet dann:

$$\alpha_{1_1}^p y_1^p - (\alpha_{2_1} y_1 + \alpha_{2_{\varrho_2}} y_{\varrho_2})(\alpha_{3_1} y_1 + \alpha_{3_{\varrho_3}} y_{\varrho_3}) \dots (\alpha_{p+1_1} y_1 + \alpha_{p+1_{\varrho_{p+1}}} y_{\varrho_{p+1}}) = C(y_1^p - y_2 y_3 \dots y_{p+1}).$$

Setzt man hierin z. B. $y_{\varrho_2} = 0$, so erhält man:

$$\alpha_{1_1}^p y_1^p - \alpha_{2_1} y_1 (\alpha_{3_1} y_1 + \alpha_{3_{\varrho_3}} y_{\varrho_3}) \dots (\alpha_{p+1_1} y_1 + \alpha_{p+1_{\varrho_{p+1}}} y_{\varrho_{p+1}}) = C y_1^p.$$

Es muss daher

$$\alpha_{2_1} y_1 (\alpha_{3_1} y_1 + \alpha_{3_{\varrho_3}} y_{\varrho_3}) \dots (\alpha_{p+1_1} y_1 + \alpha_{p+1_{\varrho_{p+1}}} y_{\varrho_{p+1}})$$

*) *Ludwig Schlesinger*, Diss., S. 1; *Fuchs*, dieses Journal Bd. 66, S. 146.

durch y_1^p theilbar sein, und das ist, da nach Obigem die Grössen $\alpha_{3_{\varrho_3}}, \ldots, \alpha_{p+1_{\varrho_{p+1}}}$ sämmtlich von Null verschieden sind, nur möglich, wenn $\alpha_{2_1} = 0$ ist; in derselben Weise schliesst man, dass auch $\alpha_{3_1}, \ldots, \alpha_{p+1_1} = 0$ sein müssen.

Wir haben nunmehr gefunden, dass $y_k (k = 2, 3, \ldots, p+1)$ nach einem Umlaufe übergeht in $\alpha_{k_{\varrho_k}} y_{\varrho_k}$, d. h. die Integrale $y_2, y_3, \ldots, y_{p+1}$ gehen nach einem Umlaufe der unabhängigen Veränderlichen bis auf eine multiplicative Constante in einander über; setzt man daher die logarithmische Ableitung

$$\frac{y_k'}{y_k} = u_k, \qquad (k = 2, 3, \ldots, p+1)$$

so werden die u_k durch diesen Umlauf nur mit einander vertauscht: die elementarsymmetrischen Functionen der u_k sind also eindeutige, und deshalb in Folge der über die Differentialgleichung gemachten Voraussetzungen rationale Functionen der unabhängigen Veränderlichen, die u_k sind folglich Wurzeln einer algebraischen Gleichung $p$ten Grades, deren Coefficienten rationale Functionen sind. — Setzt man noch

$$(5.) \qquad y_k = y_1 v_k, \qquad (k = 2, 3, \ldots, p+1)$$

so genügen, da y_1 Wurzel aus einer rationalen Function ist, auch die logarithmischen Ableitungen der v_k einer algebraischen Gleichung $p$ten Grades, deren Coefficienten rationale Functionen sind; und zwar ist insbesondere der Coefficient der $(p-1)$-ten Potenz der Unbekannten gleich Null; denn durch die Substitution (5.) geht die Relation (1.) über in

$$v_2 . v_3 \ldots v_{p+1} = 1,$$

und aus dieser folgt durch logarithmische Differentiation:

$$\frac{v_2'}{v_2} + \frac{v_3'}{v_3} + \cdots + \frac{v_{p+1}'}{v_{p+1}} = 0.$$

Setzt man

$$\frac{v_k'}{v_k} = A_k(x), \qquad (k = 2, 3, \ldots, p+1)$$

wo nach Obigem $A_k(x)$ eine algebraische Function von x bedeutet, so haben die Integrale $y_1, y_2, \ldots, y_{p+1}$ die Form:

$$y_1 = \sqrt[\mu]{R(x)}, \quad y_k = \sqrt[\mu]{R(x)} . e^{\int A_k(x) dx}. \qquad (k = 2, 3, \ldots, p+1; \ \Sigma A_k(x) = 0)$$

Nach den über die Differentialgleichung gemachten Voraussetzungen sind übrigens die Integrale $\int A_k(x) dx$ *Abel*sche Integrale erster oder dritter Gattung, da sie nur logarithmische Unstetigkeitspunkte besitzen dürfen. —

—

Es bleibt noch der Fall $p+1 = 3$ zu erledigen; in diesem Falle lautet die Relation zwischen den Integralen y_1, y_2, y_3:

$$(6.)\qquad y_2^2-y_1y_3 = 0.$$

Dieselbe *kann* in der soeben beschriebenen Weise befriedigt werden, dass nach einem Umlaufe, abgesehen von einer multiplicativen Constanten, y_2 in sich selbst übergeht, während sich y_1 und y_3 i. a. mit einander vertauschen; die Integrale lauten dann:

$$(7.)\qquad y_2 = \sqrt[\mu]{R(x)},\quad y_1 = \sqrt[\mu]{R(x)}e^{\int\sqrt[2]{R_1(x)}\,dx},\quad y_3 = \sqrt[\mu]{R(x)}.e^{-\int\sqrt[2]{R_1(x)}\,dx}.$$

Aber die oben (S. 182 u. f.) angewendete Schlussweise ist hier nicht zwingend; in der That kann die Relation (6.) noch allgemeiner dadurch befriedigt werden*), dass man

$$(8.)\qquad y_1 = \xi_1^2,\quad y_2 = \xi_1\xi_2,\quad y_3 = \xi_2^2$$

setzt, wo ξ_1 und ξ_2 Fundamentalintegrale einer Differentialgleichung zweiter Ordnung bedeuten. Ein Umlauf möge ξ_1 in ξ_1' und ξ_2 in ξ_2' überführen:

$$\xi_1' = \alpha_1\xi_1+\alpha_2\xi_2,\quad \xi_2' = \beta_1\xi_1+\beta_2\xi_2,$$

so gehen durch denselben Umlauf y_1, y_2, y_3 über in:

$$\begin{aligned} y_1' &= \alpha_1^2y_1+2\alpha_1\alpha_2y_2+\alpha_2^2y_3,\\ y_2' &= \alpha_1\beta_1y_1+(\alpha_1\beta_2+\alpha_2\beta_1)y_2+\alpha_2\beta_2y_3,\\ y_3' &= \beta_1^2y_1+2\beta_1\beta_2y_2+\beta_2^2y_3; \end{aligned}$$

in der That besteht die aus der Theorie der binären quadratischen Formen bekannte Identität:

$$\begin{aligned} (\alpha_1\beta_1y_1+(\alpha_1\beta_2+\alpha_2\beta_1)y_2+\alpha_2\beta_2y_3)^2-(\alpha_1^2y_1+2\alpha_1\alpha_2y_2+\alpha_2^2y_3)(\beta_1^2y_1+2\beta_1\beta_2y_2+\beta_2^2y_3)\\ = (\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1)^2(y_2^2-y_1y_3). \end{aligned}$$

Aus den Untersuchungen von *Fuchs***), *Wallenberg****) u. A. geht hervor, dass dies die *allgemeinste* Art der Umläufe ist, durch welche die linke Seite der Relation (6.) in sich selbst, multiplicirt mit einer Constanten, übergeht; auch die oben erwähnte Art der Umläufe ist in dieser enthalten: man hat nur entweder α_1 und β_2 oder α_2 und β_1 gleich Null zu setzen.

---

*) Cfr. *Fuchs*, Acta Mathematica Bd. 1, S. 333; *Wallenberg*, dieses Journal Bd. 113, S. 15. —

**) l. c.

***) l. c.

Sowohl die Differentialgleichung

$$(9.)\qquad \frac{d^3v}{dz^3} - \frac{dv}{dz} = 0$$

als auch die Differentialgleichung

$$(10.)\qquad \frac{d^3v}{dz^3} = 0$$

besitzt die Eigenschaft, dass ihre Integrale der Relation (6.) genügen; *jede* Differentialgleichung dritter Ordnung (y, x), zwischen deren Integralen die Relation (6.) besteht, lässt sich daher*) durch eine Substitution

$$y = \varrho(x).v,$$
$$z = \psi(x)$$

auf die Differentialgleichung (9.) oder (10.) zurückführen; der Differentialgleichung (9.) entspricht der Typus der Integrale (7.), der Differentialgleichung (10.) der Typus der Integrale (8.). Aber noch interessanter ist es, dass nach denselben Principien die Differentialgleichungen (9.) und (10.), also auch die Integrale (7.) und (8.) sich durch eine analoge Substitution *in einander* transformiren lassen.

Berlin, März 1894.

*) Vgl. meine Arbeit, dieses Journal Bd. 113, S. 13.

Ueber das Trägheitsgesetz der quadratischen Formen*).

(Von Herrn *G. Frobenius.*)

Betrachtet man zwei quadratische Formen mit reellen Coefficienten als äquivalent, wenn jede durch eine reelle lineare Substitution in die andere transformirt werden kann, so umfasst jede Klasse Formen, die nur die Quadrate der Variabeln enthalten, und in allen diesen Formen findet sich die gleiche Anzahl von positiven und von negativen Coefficienten. Die Differenz dieser Anzahlen nenne ich die *Signatur,* ihre Summe den *Rang* der Klasse und auch jeder individuellen Form der Klasse. Der Rang r einer quadratischen Form ist gleich dem Range ihrer Determinante, also dadurch bestimmt, dass die aus dem Systeme ihrer Coefficienten gebildeten Determinanten $(r+1)$-ten Grades alle verschwinden, die $r$ten Grades aber nicht sämmtlich. Die Signatur s der Form

$$(1.) \qquad \sum_{\alpha,\beta}^{n} a_{\alpha\beta} x_\alpha x_\beta$$

ist gleich der Differenz zwischen der Anzahl der Zeichenfolgen und der der Zeichenwechsel in der Reihe der $r+1$ Grössen

$$(2.) \qquad A_0 = 1, \quad A_1 = a_{11}, \quad A_2 = a_{11}a_{22} - a_{12}^2, \quad \ldots, \quad A_r = \Sigma \pm a_{11} \ldots a_{rr}.$$

Dabei ist aber vorausgesetzt, dass keine dieser Determinanten verschwindet. Ist diese Bedingung nicht erfüllt, so versucht man in der Regel zunächst, ob ihr nicht vielleicht bei einer anderen Anordnung der Variabeln genügt wird. Es giebt aber Fälle, wo bei jeder Anordnung einzelne jener Ausdrücke Null sind, z. B. wenn die Hauptelemente $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ sämmtlich verschwinden. Dann kann man die Signatur berechnen, indem man durch eine Transformation zu einer äquivalenten Form übergeht, und es ist leicht

*) Abgedruckt aus den Sitzungsberichten der Berliner Akademie vom 8. März und 10. Mai 1894.

zu zeigen, dass es in jeder Klasse Formen giebt, die der obigen Bedingung genügen.

Bequemer ist es aber in diesem Falle, die Signatur mittelst einer von Herrn *Gundelfinger* gefundenen Regel zu berechnen. (*Hesse,* Analytische Geometrie des Raumes, 3. Aufl. S. 460; dieses Journal Bd. 91, S. 235).

Man kann die Variabeln stets so anordnen, dass unter den Grössen (2.) nie zwei auf einander folgende verschwinden, und dass A_r von Null verschieden ist. Ist dann $A_\varrho = 0$, so haben $A_{\varrho-1}$ und $A_{\varrho+1}$ entgegengesetzte Vorzeichen, und die Signatur s ist gleich der Differenz zwischen der Anzahl der Zeichenfolgen und der der Zeichenwechsel in der Reihe (2.), wobei es gleichgültig ist, ob man die verschwindenden Determinanten als positiv oder negativ betrachtet. (Für ternäre Formen findet sich diese Regel schon bei *Gauss,* Disqu. arithm. § 271). Versteht man unter sign(a) nach *Kronecker* den Werth $+1$ oder -1 oder 0, je nachdem a positiv oder negativ oder Null ist, so ist demnach

$$s = \sum_{\varrho}{}_1^r \operatorname{sign}(A_{\varrho-1}A_\varrho). \tag{3.}$$

Zu diesem Resultate führt in besonders einfacher Weise der Weg, auf dem ich in meiner Arbeit *Ueber das Pfaffsche Problem* (dieses Journal Bd. 82; § 5) analoge Eigenschaften der alternirenden Systeme erhalten habe.

Aus den Vorzeichen der Grössen (2.) kann man, aber nicht nach der Formel (3.), die Signatur auch dann noch berechnen, wenn an einer oder mehreren Stellen *zwei* auf einander folgende derselben verschwinden, doch im allgemeinen nicht mehr, wenn *drei* auf einander folgende Null sind. Es giebt aber specielle Arten quadratischer Formen, bei denen, auch wenn beliebig viele der Grössen (2.) Null sind, die Signatur auf diesem Wege gefunden werden kann. Dies tritt namentlich bei solchen Formen ein, deren Coefficienten $a_{\alpha\beta}$ nur von der Summe der Indices $\alpha+\beta$ abhängen, und bei solchen, deren Coefficienten bei der Elimination einer Variabeln aus zwei algebraischen Gleichungen nach der Methode von *Bézout* auftreten. Durch die Betrachtung derselben kann man die Sätze, die *Kronecker* über die *Sturm*schen Functionen gefunden hat, indem er das ursprüngliche *Sturm*sche Verfahren mit den Ergebnissen der Theorie der quadratischen Formen verglich, ohne Benutzung desselben allein aus identischen Determinantenrelationen ableiten.

§ 1.

In dem Philosophical Magazine vom Jahre 1851 (S. 297) theilt *Sylvester* ohne Beweis ein bemerkenswerthes Theorem über Determinanten mit, das er bezeichnet als „one of the most prolific in results of any with which I am acquainted". Da es die Grundlage der ganzen folgenden Untersuchung bildet, so will ich den Beweis, den ich dafür im 86. Bande dieses Journals (S. 54) gegeben habe, auf eine Form bringen, die mit der hier entwickelten Theorie im engsten Zusammenhange steht. Ist

$$(1.)\qquad \varphi = \sum_{\alpha,\beta}{}_1^n a_{\alpha\beta} x_\alpha y_\beta$$

eine bilineare Form von zwei Reihen von je n Variabeln $x_1, \dots, x_n$, $y_1, \dots, y_n$, und setzt man

$$(2.)\qquad \xi_\beta = \frac{\partial \varphi}{\partial y_\beta} = \sum_\alpha a_{\alpha\beta} x_\alpha, \quad \eta_\alpha = \frac{\partial \varphi}{\partial x_\alpha} = \sum_\beta a_{\alpha\beta} y_\beta$$

und

$$(3.)\qquad \psi = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1r} & \eta_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{r1} & \dots & a_{rr} & \eta_r \\ \xi_1 & \dots & \xi_r & \varphi \end{vmatrix} = \Sigma B_{\alpha\beta} x_\alpha y_\beta,$$

so ist

$$(4.)\qquad B_{\alpha\beta} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1r} & a_{1\beta} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{r1} & \dots & a_{rr} & a_{r\beta} \\ a_{\alpha 1} & \dots & a_{\alpha r} & a_{\alpha\beta} \end{vmatrix}.$$

Ist also einer der beiden Indices α oder $\beta \leqq r$, so ist $B_{\alpha\beta} = 0$. Demnach hängt ψ nur von den Variabeln $x_{r+1}, \dots, x_n$ und $y_{r+1}, \dots, y_n$ ab und verschwindet identisch, wenn alle aus den Coefficienten von φ gebildeten Determinanten $(r+1)$-ten Grades Null sind. Ist

$$(5.)\qquad A_r = \Sigma \pm a_{11} \dots a_{rr}$$

von Null verschieden, so sind $\xi_1, \dots, \xi_r, x_{r+1}, \dots, x_n$ n von einander unabhängige lineare Functionen von $x_1, \dots, x_n$. Setzt man

$$(6.)\qquad \chi = -\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1r} & \eta_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{r1} & \dots & a_{rr} & \eta_r \\ \xi_1 & \dots & \xi_r & 0 \end{vmatrix},$$

so ist

$$(7.)\qquad A_r\varphi = \chi+\psi,$$

und demnach ist φ, als Function von $\xi_1, \dots, \xi_r, x_{r+1}, \dots, x_n$ und $\eta_1, \dots, \eta_r, y_{r+1}, \dots, y_n$ betrachtet, in eine Summe von zwei bilinearen Formen *zerlegbar*, von denen die eine χ nur von $\xi_1, \dots, \xi_r$ und $\eta_1, \dots, \eta_r$ abhängt, die andere ψ nur von $x_{r+1}, \dots, x_n$ und $y_{r+1}, \dots, y_n$. Folglich ist die Determinante dieser Form gleich dem Producte der Determinanten von χ und von ψ.

Da aber χ die adjungirte Form von $\sum_{\alpha,\beta}^{r} a_{\alpha\beta}x_\alpha y_\beta$ ist, so ist ihre Determinante gleich A_r^{r-1}. Die Determinante von ψ ist

$$\Sigma\pm B_{r+1,r+1}\dots B_{nn}.$$

Betrachtet man aber $\chi+\psi$ als Function von $x_1, \dots, x_n$, so tritt zu der eben berechneten Determinante noch das Product der Substitutionsdeterminanten A_rA_r als Factor hinzu. So ergiebt sich *Sylvesters* Determinantensatz

$$(8.)\qquad \Sigma\pm B_{r+1,r+1}\dots B_{nn} = A_r^{n-r-1}\Sigma\pm a_{11}\dots a_{nn}.$$

Diese Formel ist ganz allgemein gültig, weil sie für alle Werthe der Coefficienten $a_{\alpha\beta}$ dargethan ist, für die A_r von Null verschieden ist.

Wenn die Determinanten $(r+1)$-ten Grades $B_{\alpha\beta}$ sämmtlich verschwinden, aber A_r von Null verschieden ist, so ist $\varphi = A_r^{-1}\psi$ eine bilineare Form von $r+r$ unabhängigen Variabeln $\xi_1, \dots, \xi_r$ und $\eta_1, \dots, \eta_r$, und folglich verschwinden alle Unterdeterminanten $(r+1)$-ten Grades aus den Coefficienten $a_{\alpha\beta}$. Dieser Satz von *Kronecker* (dieses Journal Bd. 72, S. 152) ist daher in *Sylvesters* Determinantensatz enthalten und kann auch auf folgendem Wege daraus hergeleitet werden. Ersetzt man in der Determinante (4.) das letzte Element durch 0, so geht sie in $B_{\alpha\beta}-A_ra_{\alpha\beta}$ über. Sind demnach $\alpha, \beta, \dots, \vartheta$ irgend s der Indices $1, 2, \dots, n$ und ebenso $\varkappa, \lambda, \dots, \tau$, so ist

$$\Sigma\pm(B_{\alpha\varkappa}-A_ra_{\alpha\varkappa})\dots(B_{\vartheta\tau}-A_ra_{\vartheta\tau}) = A_r^{s-1}\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1r} & a_{1\varkappa} & \dots & a_{1\tau} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{r1} & \dots & a_{rr} & a_{r\varkappa} & \dots & a_{r\tau} \\ a_{\alpha1} & \dots & a_{\alpha r} & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{\vartheta1} & \dots & a_{\vartheta r} & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix},$$

verschwindet mithin identisch, falls $s > r$ ist. Ist also A_r von Null verschieden und sind alle Determinanten $B_{\alpha\beta} = 0$, so verschwinden alle Determinanten $s$ten Grades des Systems $a_{\alpha\beta}$. Ist $s = r$, so ist identisch

$$(9.)\qquad \Sigma\pm(A_ra_{\alpha\varkappa}-B_{\alpha\varkappa})\dots(A_ra_{\vartheta\tau}-B_{\vartheta\tau}) = A_r^{r-1}(\Sigma\pm a_{\alpha1}\dots a_{\vartheta r})(\Sigma\pm a_{1\varkappa}\dots a_{r\tau}),$$

und folglich unter derselben Voraussetzung

$$(10.)\quad (\Sigma\pm a_{11}\ldots a_{rr})(\Sigma\pm a_{\alpha\varkappa}\ldots a_{\vartheta\tau}) = (\Sigma\pm a_{\alpha 1}\ldots a_{\vartheta r})(\Sigma\pm a_{1\varkappa}\ldots a_{r\tau}),$$

wie ich auf einem anderen Wege im 82. Bande dieses Journals (S. 240, I) bewiesen habe.

Für den Fall, wo $a_{\alpha\beta} = a_{\beta\alpha}$ und

$$\varphi = \Sigma a_{\alpha\beta}x_\alpha x_\beta$$

eine quadratische Form von $x_1, \ldots, x_n$ ist, ergiebt sich aus der Formel (7.) eine wichtige Folgerung. Ist A_r von Null verschieden, so sind

$$\xi_1, \;\ldots,\; \xi_r,\; x_{r+1},\; \ldots,\; x_n$$

unabhängige Variabeln, und da χ nur von $\xi_1, \ldots, \xi_r$ und ψ nur von $x_{r+1}, \ldots, x_n$ abhängt, so kann man φ in eine Summe von Quadraten transformiren, indem man jede der beiden Functionen χ und ψ für sich transformirt. Daher ist Signatur und Rang von φ gleich der Summe der Signaturen bez. Rangzahlen von χ und von ψ. Ist aber die Determinante einer quadratischen Form von r Variabeln $A_r^{-1}\chi$ von Null verschieden, so hat sie dieselbe Signatur wie ihre reciproke Form. Denn wird sie durch eine Substitution von nicht verschwindender Determinante in eine Summe von r Quadraten $\Sigma c_\varrho y_\varrho^2$ transformirt, so geht $\Sigma \frac{1}{c_\varrho} y_\varrho^2$ durch die transponirte Substitution in die reciproke Form über. Demnach ergiebt sich der Satz:

Die Signatur (der Rang) der quadratischen Form

$$\varphi = \sum_{\alpha,\beta}{}_1^n a_{\alpha\beta}x_\alpha x_\beta$$

ist, wenn man

$$A_r = \Sigma\pm a_{11}\ldots a_{rr}, \quad B_{\alpha\beta} = \Sigma\pm a_{11}\ldots a_{rr}a_{\alpha\beta}$$

setzt, falls A_r von Null verschieden ist, gleich der Summe der Signaturen (Rangzahlen) der beiden quadratischen Formen

$$\sum_{\alpha,\beta}{}_1^r a_{\alpha\beta}x_\alpha x_\beta \quad \text{und} \quad \frac{1}{A_r}\sum_{\alpha,\beta}{}_{r+1}^n B_{\alpha\beta}x_\alpha x_\beta,$$

von denen die erste aus der Form φ hervorgeht, indem man darin $x_{r+1}, \ldots, x_n$ Null setzt, die andere, indem man darin $\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial\varphi}{\partial x_r}$ Null setzt.

§ 2.

Zu dem in der Einleitung erwähnten Satze des Herrn *Gundelfinger* kann man durch folgende Ueberlegungen gelangen.

1. Wenn in einem symmetrischen Systeme die Hauptunterdeterminante $r$ten Grades

$$A_r = \Sigma \pm a_{11} \dots a_{rr}$$

von Null verschieden ist, aber alle Hauptunterdeterminanten $(r+1)$-ten Grades

$$\Sigma \pm a_{11} \dots a_{rr} a_{\alpha\alpha} \qquad (\alpha = r+1, \dots, n)$$

und $(r+2)$-ten Grades

$$\Sigma \pm a_{11} \dots a_{rr} a_{\alpha\alpha} a_{\beta\beta} \qquad (\alpha, \beta = r+1, \dots, n)$$

verschwinden, so verschwinden alle Unterdeterminanten $(r+1)$-ten Grades.

Hauptunterdeterminante nenne ich eine Unterdeterminante, deren Diagonalelemente (Hauptelemente) alle der Diagonale des gegebenen Systems angehören. Ist $B_{\alpha\beta}$ die Determinante (4.) § 1, so ist $B_{\alpha\beta} = B_{\beta\alpha}$ und nach einem bekannten Satze über die adjungirten Systeme oder auch nach dem Satze von *Sylvester*

$$(1.) \qquad B_{\alpha\alpha} B_{\beta\beta} - B_{\alpha\beta}^2 = A_r \Sigma \pm a_{11} \dots a_{rr} a_{\alpha\alpha} a_{\beta\beta},$$

also gleich Null, und weil $B_{\alpha\alpha} = 0$ ist, so ist auch $B_{\alpha\beta} = 0$. Nach dem Satze von *Kronecker* verschwinden daher in dem System $a_{\alpha\beta}$ alle Unterdeterminanten $(r+1)$-ten Grades.

2. Wenn in einem symmetrischen Systeme alle Hauptunterdeterminanten $r$ten und $(r+1)$-ten Grades verschwinden, so verschwinden alle Unterdeterminanten $r$ten und höheren Grades.

Ist $r = 1$, so ist nach der Voraussetzung $a_{\alpha\alpha} = 0$ und $a_{\alpha\alpha} a_{\beta\beta} - a_{\alpha\beta}^2 = 0$, also auch $a_{\alpha\beta} = 0$. Ich nehme daher an, der Satz sei für einen bestimmten Werth von r bereits bewiesen und zeige, dass er dann auch für den Werth $r+1$ richtig ist. In dem betrachteten symmetrischen Systeme verschwinden demnach alle Hauptunterdeterminanten $(r+1)$-ten und $(r+2)$-ten Grades. Wenn dann erstens ausserdem noch alle Hauptunterdeterminanten $r$ten Grades verschwinden, so sind nach den Voraussetzungen des Inductionsschlusses alle Unterdeterminanten $r$ten und höheren Grades Null. Ist aber zweitens eine Hauptunterdeterminante $r$ten Grades, z. B. A_r von Null verschieden, so verschwinden nach Satz 1. alle Unterdeterminanten $(r+1)$-ten Grades und folglich auch alle von höherem Grade.

3. Ist r der Rang eines symmetrischen Systems, so giebt es in demselben eine nicht verschwindende *Haupt*unterdeterminante vom Grade r.

Nach der Voraussetzung verschwinden alle Hauptunterdeterminanten $(r+1)$-ten Grades. Sollten also auch alle Hauptunterdeterminanten $r$ten Grades verschwinden, so würden nach 2. alle Unterdeterminanten $r$ten Grades Null sein. Dann wäre aber der Rang des Systems kleiner als r.

Im 82. Bande dieses Journals (S. 242) habe ich diesen Satz auf einem anderen Wege hergeleitet [vgl. oben Formel (10.) § 1]. Einen dritten Beweis giebt Herr *Gundelfinger*, dieses Journal Bd. 91, S. 229.

4. Man kann die Variabeln einer beliebigen quadratischen Form $\Sigma a_{\alpha\beta} x_\alpha x_\beta$ vom Range r stets in einer solchen Reihenfolge mit $x_1, x_2, \dots, x_n$ bezeichnen, dass unter den Grössen

(2.) $\quad A_0 = 1,\ A_1 = a_{11},\ A_2 = a_{11}a_{22} - a_{12}^2,\ \dots,\ A_r = \Sigma \pm a_{11} \dots a_{rr}$

nie zwei auf einander folgende verschwinden und dass A_r von Null verschieden ist.

Wenn die n Elemente $a_{\alpha\alpha}$ nicht sämmtlich verschwinden, so wähle man die erste Variable so, dass a_{11} von Null verschieden ist. Wenn die Unterdeterminanten $a_{11}a_{\alpha\alpha} - a_{12}^2$ nicht sämmtlich verschwinden, so wähle man die zweite Variable so, dass A_2 von Null verschieden ist, u. s. w. Gelangt man so bis zu der von Null verschiedenen Determinante $A_\varrho = \Sigma \pm a_{11} \dots a_{\varrho\varrho}$, sind aber alle Unterdeterminanten

$$\Sigma \pm a_{11} \dots a_{\varrho\varrho} a_{\alpha\alpha} \qquad (\alpha = \varrho+1, \dots, n)$$

Null, so können, falls $\varrho < r$ ist, nach 1. nicht alle Unterdeterminanten

$$\Sigma \pm a_{11} \dots a_{\varrho\varrho} a_{\alpha\alpha} a_{\beta\beta} \qquad (\alpha, \beta = \varrho+1, \dots, n)$$

verschwinden. Daher kann man $x_{\varrho+1}$ und $x_{\varrho+2}$ so wählen, dass zwar $A_{\varrho+1} = 0$, aber $A_{\varrho+2}$ von Null verschieden ist. Ergiebt sich also bei Anwendung dieser Regel $A_{r-1} = 0$, so wird A_r von Null verschieden. Aber auch wenn A_{r-1} von Null verschieden ist, können nicht alle Unterdeterminanten $\Sigma \pm a_{11} \dots a_{r-1,r-1} a_{\alpha\alpha} = 0$ sein. Denn weil r der Rang der Form ist, sind alle Unterdeterminanten $(r+1)$-ten Grades

$$\Sigma \pm a_{11} \dots a_{r-1,r-1} a_{\alpha\alpha} a_{\beta\beta} = 0,$$

und folglich müssten nach 1. alle Unterdeterminanten $r$ten Grades verschwinden, also der Rang des Systems kleiner als r sein. Man kann aber auch von irgend einer nicht verschwindenden Hauptunterdeterminante A_r ausgehen, die nach 3. stets existirt, zu dieser eine nicht verschwindende Hauptunterdeterminante A_{r-1} suchen u. s. w. Kommt man dann zu einer Haupt-

unterdeterminante $A_{\varrho+1}$, deren Hauptunterdeterminanten ϱten Grades alle Null sind, so können doch, da $A_{\varrho+1}$ von Null verschieden ist, nicht alle Unterdeterminanten ϱten Grades von $A_{\varrho+1}$ verschwinden. Ist z. B. der Coefficient B_ϱ von $a_{\varrho,\varrho+1}$ von Null verschieden, und bezeichnet man den Coefficienten von $a_{\varrho\varrho}$ mit C_ϱ, so ist nach der Formel $A_{\varrho+1}A_{\varrho-1} = A_\varrho C_\varrho - B_\varrho^2 = -B_\varrho^2$ die Determinante $A_{\varrho-1}$ von Null verschieden.

Endlich kann man auch mit irgend einer nicht verschwindenden Hauptunterdeterminante A_s $(0 < s < r)$ anfangen und zu dieser

$$A_{s+1},\quad A_{s+2},\quad \dots,\quad A_r \quad \text{und} \quad A_{s-1},\quad A_{s-2},\quad \dots,\quad A_1$$

den geforderten Bedingungen gemäss bestimmen.

§ 3.

Die n Variabeln einer quadratischen Form vom Range r

$$\xi = \sum_{\alpha,\beta}{}_1^n a_{\alpha\beta} x_\alpha x_\beta$$

seien in einer solchen Reihenfolge mit $x_1, x_2, \dots, x_n$ bezeichnet, dass von den $r+1$ Grössen (2.) § 2 nie zwei auf einander folgende verschwinden und dass A_r von Null verschieden ist. Die Reihenfolge braucht nicht nothwendig auf dem im vorigen Paragraphen angegebenen Wege ermittelt zu sein. (Dabei ist nämlich nur dann $A_{\varrho+1} = 0$, wenn alle Determinanten

$$\Sigma \pm a_{11} \dots a_{\varrho\varrho} a_{\alpha\alpha} \qquad (\alpha = \varrho+1, \dots, n)$$

verschwinden. Diese Bedingung braucht aber hier nicht erfüllt zu sein.) Setzt man

$$B_\varrho = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots a_{1,\varrho-1} & a_{1,\varrho+1} \\ \cdot & \dots \cdot & \cdot \\ a_{\varrho-1,1} & \dots a_{\varrho-1,\varrho-1} & a_{\varrho-1,\varrho+1} \\ a_{\varrho 1} & \dots a_{\varrho,\varrho-1} & a_{\varrho,\varrho+1} \end{vmatrix}, \quad C_\varrho = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots a_{1,\varrho-1} & a_{1,\varrho+1} \\ \cdot & \dots \cdot & \cdot \\ a_{\varrho-1,1} & \dots a_{\varrho-1,\varrho-1} & a_{\varrho-1,\varrho+1} \\ a_{\varrho+1,1} & \dots a_{\varrho+1,\varrho-1} & a_{\varrho+1,\varrho+1} \end{vmatrix},$$

$(B_1 = a_{12},\ C_1 = a_{22})$, so ist nach Formel (1.) § 2

$$(1.) \qquad A_{\varrho-1}A_{\varrho+1} = A_\varrho C_\varrho - B_\varrho^2.$$

Ist nun $A_\varrho = 0$, so sind nach Voraussetzung $A_{\varrho-1}$ und $A_{\varrho+1}$, also auch B_ϱ von Null verschieden, und folglich haben $A_{\varrho-1}$ und $A_{\varrho+1}$ entgegengesetzte Vorzeichen. Setzt man

$$\xi_\alpha = \frac{1}{2}\frac{\partial \xi}{\partial x_\alpha} = \sum_\beta a_{\alpha\beta} x_\beta$$

und

$$\eta^{(\varrho)} = \begin{vmatrix} a_{11} \dots a_{1\varrho} \; \xi_1 \\ \cdot \;\; \cdots \;\; \cdot \;\; \cdot \\ a_{\varrho 1} \dots a_{\varrho\varrho} \; \xi_\varrho \\ \xi_1 \;\; \dots \xi_\varrho \;\; \xi \end{vmatrix}, \quad \zeta^{(\varrho)} = -\begin{vmatrix} a_{11} \dots a_{1\varrho} \; \xi_1 \\ \cdot \;\; \cdots \;\; \cdot \;\; \cdot \\ a_{\varrho 1} \dots a_{\varrho\varrho} \; \xi_\varrho \\ \xi_1 \;\; \dots \xi_\varrho \;\; 0 \end{vmatrix},$$

so ist, wie in § 1 gezeigt, $\eta^{(\varrho)} = \Sigma B_{\alpha\beta} x_\alpha x_\beta$ eine quadratische Form, die nur von den Variabeln $x_{\varrho+1}, \dots, x_n$ abhängt, und wenn r der Rang von ξ ist, so verschwindet die Form $\eta^{(r)}$ identisch, weil ihre Coefficienten Unterdeterminanten $(r+1)$-ten Grades des Systems $a_{\alpha\beta}$ sind. Ferner ist

$$(2.) \qquad A_\varrho \xi = \zeta^{(\varrho)} + \eta^{(\varrho)}$$

und folglich

$$(3.) \qquad \xi = \eta^{(0)} = \frac{\zeta^{(r)}}{A_r}.$$

Setzt man endlich $y_1 = \xi_1$, $y_{r+1} = 0$,

$$y_\varrho = \begin{vmatrix} a_{11} \dots a_{1,\varrho-1} \; \xi_1 \\ \cdot \;\; \cdots \;\; \cdot \;\; \cdot \\ a_{\varrho 1} \dots a_{\varrho,\varrho-1} \; \xi_\varrho \end{vmatrix},$$

so ist nach dem Determinantensatze (1.) § 2

$$A_{\varrho-1} \eta^{(\varrho)} = A_\varrho \eta^{(\varrho-1)} - y_\varrho^2$$

oder

$$(4.) \qquad \frac{\eta^{(\varrho-1)}}{A_{\varrho-1}} - \frac{\eta^{(\varrho)}}{A_\varrho} = \frac{\zeta^{(\varrho)}}{A_\varrho} - \frac{\zeta^{(\varrho-1)}}{A_{\varrho-1}} = \frac{y_\varrho^2}{A_{\varrho-1} A_\varrho}.$$

Sind also $A_0, A_1, \dots, A_r$ von Null verschieden, so ist nach (3.)

$$(5.) \qquad \xi = \Sigma_\varrho{}_1^r \frac{y_\varrho^2}{A_{\varrho-1} A_\varrho}.$$

Aus dieser bekannten Transformation von *Gauss* und *Jacobi* ergiebt sich die Formel

$$(6.) \qquad s = \Sigma_\varrho{}_1^r \operatorname{sign}(A_{\varrho-1} A_\varrho)$$

für die Signatur der Form ξ.

Damit die entwickelten Formeln auch brauchbar bleiben, wenn $A_\varrho = 0$ ist, forme ich sie in folgender Weise um. Setzt man

$$z_\varrho = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots a_{1,\varrho-1} & \xi_1 \\ \cdot & \cdots \;\; \cdot & \cdot \\ a_{\varrho-1,1} & \dots a_{\varrho-1,\varrho-1} & \xi_{\varrho-1} \\ a_{\varrho+1,1} & \dots a_{\varrho+1,\varrho-1} & \xi_{\varrho+1} \end{vmatrix}$$

$(z_1 = \xi_2)$, so ist

$$A_{\varrho-1} y_{\varrho+1} = A_\varrho z_\varrho - B_\varrho y_\varrho$$

und folglich

$$A_{\varrho-1}^2 y_{\varrho+1}^2 = A_\varrho^2 z_\varrho^2 - 2 A_\varrho B_\varrho z_\varrho y_\varrho + (A_\varrho C_\varrho - A_{\varrho-1} A_{\varrho+1}) y_\varrho^2$$

oder

$$(7.) \qquad \frac{\eta^{(\varrho-1)}}{A_{\varrho-1}} - \frac{\eta^{(\varrho+1)}}{A_{\varrho+1}} = \frac{y_\varrho^2}{A_{\varrho-1} A_\varrho} + \frac{y_{\varrho+1}^2}{A_\varrho A_{\varrho+1}} = \frac{A_\varrho z_\varrho^2 - 2 B_\varrho z_\varrho y_\varrho + C_\varrho y_\varrho^2}{A_{\varrho-1}^2 A_{\varrho+1}}.$$

Mittelst dieser Relation kann man in der Formel (5.) für $y_{\varrho+1}$ die Variable z_ϱ einführen. Ist dann $A_\varrho = 0$, so sind nach der Voraussetzung $A_{\varrho-1}$ und $A_{\varrho+1}$ von Null verschieden. Jene quadratische Form von y_ϱ und z_ϱ

$$\frac{y_\varrho}{A_{\varrho-1}^2 A_{\varrho+1}} (-2 B_\varrho z_\varrho + C_\varrho y_\varrho)$$

wird also ein Product von zwei reellen linearen Formen und hat folglich die Signatur 0. Ebenso ist aber in der Formel (6.) die Summe der beiden Glieder

$$\operatorname{sign}(A_{\varrho-1} A_\varrho) + \operatorname{sign}(A_\varrho A_{\varrho+1}) = 0,$$

gleichgültig ob man A_ϱ als positiv, negativ oder als verschwindend betrachtet.

Die obige Umformung kann man auch mit Hülfe des *Sylvester*schen Determinantensatzes ausführen. Nach diesem erhält man direct

$$A_{\varrho-1}^2 \eta^{(\varrho+1)} = \begin{vmatrix} A_\varrho & B_\varrho & y_\varrho \\ B_\varrho & C_\varrho & z_\varrho \\ y_\varrho & z_\varrho & \eta^{(\varrho-1)} \end{vmatrix},$$

also nach Gleichung (1.) die Formel (7.).

Der Vollständigkeit wegen füge ich noch folgende Bemerkung hinzu. Weil A_r von Null verschieden ist, sind $\xi_1, \ldots, \xi_r$ r von einander unabhängige lineare Functionen von $x_1, \ldots, x_n$. Nun hängt y_ϱ nur von $\xi_1, \ldots, \xi_\varrho$ ab, und der Coefficient von ξ_ϱ ist $A_{\varrho-1}$, und z_ϱ hängt nur von $\xi_1, \ldots, \xi_{\varrho+1}$ ab, und der Coefficient von $\xi_{\varrho+1}$ ist $A_{\varrho-1}$. Daher sind die an Stelle von $\xi_1, \ldots, \xi_r$ eingeführten r neuen Variabeln unabhängige lineare Verbindungen dieser r Veränderlichen.

Das oben erhaltene Ergebniss ist übrigens ganz der Regel analog, zu der man durch Anwendung einer reellen orthogonalen Substitution geführt wird. Durch eine solche kann man die quadratische Form ξ stets in $c_1 y_1^2 + \cdots + c_r y_r^2$ transformiren. Die r (verschiedenen oder gleichen) Coefficienten

$c_1, \ldots, c_r$ sind die r nicht verschwindenden Wurzeln der charakteristischen Gleichung

$$|xe_{\alpha\beta} - a_{\alpha\beta}| = 0, \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, n)$$

wo $e_{\alpha\beta} = 0$ oder 1 ist, je nachdem α und β verschieden oder gleich sind. Da die Wurzeln dieser Gleichung

$$a_0 x^n - a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} \cdots + (-1)^r a_r x^{n-r} = 0$$

alle reell sind, so können nach der *Harriot*schen Regel nie zwei auf einander folgende der Coefficienten

$$a_0, \quad a_1, \quad a_2, \quad \ldots, \quad a_r$$

verschwinden, und wenn $a_\varrho = 0$ ist, so haben $a_{\varrho-1}$ und $a_{\varrho+1}$ entgegengesetzte Vorzeichen. Daher ist

$$(8.) \qquad s = \sum_\varrho{}_1^r \operatorname{sign}(a_{\varrho-1} a_\varrho)$$

die Differenz zwischen der Anzahl der positiven und der negativen Wurzeln der charakteristischen Gleichung, also gleich der Signatur der Form ξ.

Als Anwendung der oben entwickelten Regel berechne ich die Signatur einer quadratischen Form, bei welcher $a_{\alpha\beta} = 0$ ist, falls $\alpha + \beta \leqq n$ ist. Dagegen sei ihre Determinante

$$A = A_n = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1,n} a_{2,n-1} \ldots a_{n,1}$$

von Null verschieden.

Ist $n = 2m$ gerade, so ist

$$A = (-1)^m a_{1,n}^2 a_{2,n-1}^2 \ldots a_{m,m+1}^2.$$

Dann betrachte ich die Reihe der Determinanten

$$A_0 = 1, \quad A_1 = a_{m,m} = 0, \quad A_2 = \Sigma \pm a_{m,m} a_{m+1,m+1} = -a_{m,m+1}^2,$$
$$A_3 = \Sigma \pm a_{m-1,m-1} a_{m,m} a_{m+1,m+1} = 0, \quad A_4 = \Sigma \pm a_{m-1,m-1} \ldots a_{m+2,m+2}$$
$$= a_{m,m+1}^2 a_{m-1,m+2}^2, \quad \text{u. s. w.}$$

Diese Grössen haben die Vorzeichen

$$+1, \quad 0, \quad -1, \quad 0, \quad +1, \quad 0, \quad \ldots, \quad 0, \quad (-1)^m,$$

und mithin ist die Signatur der Form $s = 0$.

Ist aber $n = 2m-1$ ungerade, so ist

$$A = (-1)^{m-1} a_{m,m} a^2_{m-1,m+1} \dots a^2_{1,n}.$$

Dann betrachte ich die Reihe der Determinanten

$$A_0 = 1, \quad A_1 = a_{m,m}, \quad A_2 = \Sigma \pm a_{m-1,m-1} a_{m,m} = 0,$$
$$A_3 = \Sigma \pm a_{m-1,m-1} a_{m,m} a_{m+1,m+1} = -a_{m,m} a^2_{m-1,m+1},$$
$$A_4 = \Sigma \pm a_{m-2,m-2} \dots a_{m+1,m+1} = 0,$$
$$A_5 = \Sigma \pm a_{m-2,m-2} \dots a_{m+2,m+2} = +a_{m,m} a^2_{m-1,m+1} a^2_{m-2,m+2}, \quad \text{u. s. w.}$$

Bezeichnet man das Vorzeichen von $a_{m,m}$ mit ε, so haben diese Grössen die Vorzeichen

$$1, \quad \varepsilon, \quad 0, \quad -\varepsilon, \quad \dots, \quad 0, \quad (-1)^{m-1}\varepsilon,$$

und mithin ist die Signatur der Form $s = \varepsilon$ oder

$$s = (-1)^{\frac{n-1}{2}} \operatorname{sign}(A). \tag{9.}$$

§ 4.

Die entwickelte Methode bleibt auch noch anwendbar, wenn in der Reihe der Grössen (2.) § 2 nie mehr als *zwei* auf einander folgende verschwinden. Sei $A_{\varrho+1} = A_{\varrho+2} = 0$, aber A_ϱ und $A_{\varrho+3}$ von Null verschieden. Setzt man dann, indem man ϱ als einen festen Index betrachtet,

$$B_{\alpha\beta} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots a_{1\varrho} & a_{1,\varrho+\beta} \\ \cdot & \dots\cdot & \cdot \\ a_{\varrho 1} & \dots a_{\varrho\varrho} & a_{\varrho,\varrho+\beta} \\ a_{\varrho+\alpha,1} & \dots a_{\varrho+\alpha,\varrho} & a_{\varrho+\alpha,\varrho+\beta} \end{vmatrix}, \quad z_\alpha = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots a_{1\varrho} & \xi_1 \\ \cdot & \dots\cdot & \cdot \\ a_{\varrho 1} & \dots a_{\varrho\varrho} & \xi_\varrho \\ a_{\varrho+\alpha,1} & \dots a_{\varrho+\alpha,\varrho} & \xi_{\varrho+\alpha} \end{vmatrix},$$

so ist nach dem Satze von *Sylvester*

$$A_\varrho^3 \eta^{(\varrho+3)} = \begin{vmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} & z_1 \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} & z_2 \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} & z_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 & \eta^{(\varrho)} \end{vmatrix}$$

und

$$A_\varrho^2 A_{\varrho+3} = \Sigma \pm B_{11} B_{22} B_{33},$$

also

$$(1.)\qquad \frac{\eta^{(\varrho)}}{A_\varrho}-\frac{\eta^{(\varrho+3)}}{A_{\varrho+3}} = -\frac{1}{A_\varrho}\begin{vmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} & z_1 \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} & z_2 \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} & z_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 & 0 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{vmatrix}.$$

Diese quadratische Form tritt also in der Formel (5.) § 3 an die Stelle der drei Quadrate

$$\frac{y_{\varrho+1}^2}{A_\varrho A_{\varrho+1}}+\frac{y_{\varrho+2}^2}{A_{\varrho+1}A_{\varrho+2}}+\frac{y_{\varrho+3}^2}{A_{\varrho+2}A_{\varrho+3}},$$

und die Signatur dieser Form ist in der Formel (6.) § 3 für die Summe der Vorzeichen der Nenner dieser drei Quadrate zu setzen. Jene Form ist aber die reciproke der Form $A_\varrho \Sigma_{\alpha,\beta}{}_1^3 B_{\alpha\beta}Z_\alpha Z_\beta$, und demnach haben wir die Signatur der ternären Form $\Sigma B_{\alpha\beta}Z_\alpha Z_\beta$ zu berechnen. Nun ist $B_{11} = A_{\varrho+1} = 0$ und $B_{11}B_{22}-B_{12}^2 = A_\varrho A_{\varrho+2} = 0$, also $B_{12} = 0$, und $\Sigma \pm B_{11}B_{22}B_{33} = A_\varrho^2 A_{\varrho+3}$, also

$$A_\varrho^2 A_{\varrho+3} = -B_{13}^2 B_{22},$$

also sind B_{13} und B_{22} von Null verschieden. Nach der am Ende des § 3 gegebenen Regel ist daher die Signatur der Form gleich $\operatorname{sign}(B_{22}) = -\operatorname{sign}(A_{\varrho+3})$ und die der Form $A_\varrho \Sigma B_{\alpha\beta}Z_\alpha Z_\beta$ oder ihrer reciproken Form (1.) gleich $-\operatorname{sign}(A_\varrho A_{\varrho+3})$. Bei der Berechnung der Signatur der Form ξ ist also in der Formel (6.) § 3, wenn $A_{\varrho+1} = A_{\varrho+2} = 0$, aber A_ϱ und $A_{\varrho+3}$ von Null verschieden sind, die Summe der drei Glieder

$$(2.)\qquad \operatorname{sign}(A_\varrho A_{\varrho+1})+\operatorname{sign}(A_{\varrho+1}A_{\varrho+2})+\operatorname{sign}(A_{\varrho+2}A_{\varrho+3}),$$

die verschwinden, durch

$$(2.^*)\qquad -\operatorname{sign}(A_\varrho A_{\varrho+3})$$

zu ersetzen. Die Signatur hängt demnach auch dann noch von den Grössen (2.) § 2 allein ab, wenn in der Reihe derselben nie mehr als zwei auf einander folgende Null sind und A_r von Null verschieden ist.

Wenn aber drei auf einander folgende dieser Grössen verschwinden, so ist, wie ich jetzt an einem Beispiel zeigen will, durch jene Grössen allein die Signatur noch nicht bestimmt. Sei $n = 4$ und

$$\xi = a_{22}x_2^2+a_{33}x_3^2+2a_{23}x_2x_3+2a_{14}x_1x_4,$$

also $a_{11} = a_{12} = a_{13} = a_{24} = a_{34} = a_{44} = 0$, dagegen sei a_{14} von Null verschieden und $a_{22}a_{33}-a_{23}^2 > 0$. Daher ist a_{22} von Null verschieden, kann aber positiv

oder negativ sein. Betrachtet man die Variabeln in der Reihenfolge x_2, x_3, x_1, x_4, so hat man die vier Grössen

$$1, \quad a_{22}, \quad a_{22}a_{33}-a_{23}^2, \quad 0, \quad -a_{14}^2(a_{22}a_{33}-a_{23}^2)$$

zu berechnen, und mithin ist nach § 3 die Signatur $s = 2\operatorname{sign}(a_{22})$. Durch die Grössen $A_0 = 1$, $A_1 = A_2 = A_3 = 0$ und die negative Grösse A_4 allein ist also s nicht bestimmt.

§ 5.

Es giebt specielle symmetrische Systeme, für die sich die Signatur von ξ aus den Grössen (2.) § 2 allein auch dann berechnen lässt, wenn beliebig viele derselben verschwinden. Dazu gehören besonders die Systeme, bei denen

$$a_{\alpha\beta} = a_{\alpha+\beta} \qquad (\alpha, \beta = 0, 1, \ldots, n-1)$$

nur von der Summe der Indices abhängt, und die ich *recurrirende* Systeme nennen will. Die Untersuchungen, die *Kronecker* darüber angestellt hat, lassen sich wesentlich vereinfachen durch Benutzung einer der von ihm selbst (Sitzungsberichte der Berliner Akademie 1882, S. 821) entdeckten linearen Relationen zwischen den Subdeterminanten eines symmetrischen Systems, für die ich in § 11 (12.) einen einfachen Beweis angeben werde. Ist

$$a_{\alpha\beta} \qquad (\alpha, \beta = 0, 1, \ldots, n-1)$$

ein beliebiges System, sind $\alpha\beta\ldots\vartheta$ irgend r der Indices $0, 1, \ldots, n-1$ und ebenso $\varkappa\lambda\ldots\tau$, so setze ich die Determinante $r$ten Grades

$$\Sigma \pm a_{\alpha\varkappa}a_{\beta\lambda}\ldots a_{\vartheta\tau} = \begin{pmatrix}\alpha\,\beta\ldots\vartheta\\ \varkappa\,\lambda\ldots\tau\end{pmatrix}.$$

Ist nun $a_{\alpha\beta} = a_{\beta\alpha}$, so bestehen zwischen den Subdeterminanten $(\varrho+2)$-ten Grades gewisse lineare Relationen, von denen ich die folgende dreigliedrige gebrauche:

$$\begin{pmatrix}1\ldots\varrho-1 & 0 & \varrho\\ 1\ldots\varrho-1 & \varrho+1 & \varrho+2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\ldots\varrho-1 & \varrho & \varrho+1\\ 1\ldots\varrho-1 & 0 & \varrho+2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\ldots\varrho-1 & \varrho+1 & 0\\ 1\ldots\varrho-1 & \varrho & \varrho+2\end{pmatrix} = 0,$$

die man auch schreiben kann

$$\begin{pmatrix}0 & 1\ldots\varrho-2 & \varrho-1 & \varrho+1\\ 1 & 2\ldots\varrho-1 & \varrho & \varrho+2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1 & 2\ldots\varrho-1 & \varrho & \varrho+1\\ 0 & 1\ldots\varrho-2 & \varrho-1 & \varrho-2\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}0 & 1\ldots\varrho-2 & \varrho-1 & \varrho\\ 1 & 2\ldots\varrho-1 & \varrho+1 & \varrho+2\end{pmatrix}.$$

Wendet man sie auf das System

$$\begin{matrix} 0 & a_0 & a_1 & \dots & a_{\varrho-2} & a_{\varrho-1} & x_0 & y_0 \\ a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{\varrho-1} & a_\varrho & x_1 & y_1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_\varrho & a_{\varrho+1} & x_2 & y_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{\varrho-2} & a_{\varrho-1} & a_\varrho & \dots & a_{2\varrho-3} & a_{2\varrho-2} & x_{\varrho-1} & y_{\varrho-1} \\ a_{\varrho-1} & a_\varrho & a_{\varrho+1} & \dots & a_{2\varrho-2} & a_{2\varrho-1} & x_\varrho & y_\varrho \\ x_0 & x_1 & x_2 & \dots & x_{\varrho-1} & x_\varrho & 0 & z \\ y_0 & y_1 & y_2 & \dots & y_{\varrho-1} & y_\varrho & z & 0 \end{matrix}$$

an, so erhält man die identische Gleichung

$$(1.)\quad \begin{vmatrix} a_0 & \dots & a_{\varrho-1} & y_0 \\ \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ a_{\varrho-1} & \dots & a_{2\varrho-2} & y_{\varrho-1} \\ x_1 & \dots & x_\varrho & z \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_0 & \dots & a_{\varrho-1} & y_1 \\ \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ a_{\varrho-1} & \dots & a_{2\varrho-2} & y_\varrho \\ x_0 & \dots & x_{\varrho-1} & z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_0 & \dots & a_{\varrho-2} & x_0 & y_0 \\ \cdot & \dots & \cdot & & \\ a_{\varrho-1} & \dots & a_{2\varrho-3} & x_{\varrho-1} & y_{\varrho-1} \\ a_\varrho & \dots & a_{2\varrho-2} & x_\varrho & y_\varrho \end{vmatrix}.$$

Wegen der wichtigen Rolle, die sie in der folgenden Untersuchung spielt, will ich sie noch in folgender einfachen Weise verificiren: Die Differenz zwischen der linken und der rechten Seite ist eine homogene lineare Function der $\varrho+2$ Variabeln $x_0, x_1, \dots, x_{\varrho-1}, x_\varrho, z$, in der aber, wie leicht zu sehen, die Coefficienten von x_0, x_ϱ und z verschwinden. Sie hängt also höchstens von den $\varrho-1$ Variabeln

$$x_1, \quad x_2, \quad \dots, \quad x_{\varrho-1}$$

ab. Giebt man aber diesen die Werthe

$$a_{\alpha+1}, \quad a_{\alpha+2}, \quad \dots, \quad a_{\alpha+\varrho-1} \qquad (\alpha = 0, 1, \dots, \varrho-2)$$

und zugleich den Grössen x_0, x_ϱ, z die Werthe a_α, $a_{\alpha+\varrho}$, $y_{\alpha+1}$, so verschwindet jede der drei Determinanten. Folglich ist jene lineare Function Null, falls die Determinante

$$\begin{vmatrix} a_1 & \dots & a_{\varrho-1} \\ \cdot & \dots & \cdot \\ a_{\varrho-1} & \dots & a_{2\varrho-3} \end{vmatrix}$$

von Null verschieden ist. Daher muss die Gleichung (1.) identisch bestehen, auch wenn diese Bedingung nicht erfüllt ist.

§ 6.

Aus den Coefficienten des recurrirenden Systems

$$(1.)\qquad a_{\alpha+\beta} \qquad (\alpha, \beta = 0, 1, \ldots, n-1)$$

bilde ich die Determinanten

$$(2.)\qquad A_\varrho = \begin{vmatrix} a_0 & \ldots & a_{\varrho-1} \\ \cdot & \ldots & \cdot \\ a_{\varrho-1} & \ldots & a_{2\varrho-2} \end{vmatrix}$$

und, indem ich zunächst ϱ als einen festen Index betrachte,

$$(3.)\qquad B_{\alpha\beta} = \begin{vmatrix} a_0 & \ldots & a_{\varrho-1} & a_{\varrho+\beta} \\ \cdot & \ldots & \cdot & \cdot \\ a_{\varrho-1} & \ldots & a_{2\varrho-2} & a_{2\varrho-1+\beta} \\ a_{\varrho+\alpha} & \ldots & a_{2\varrho-1+\alpha} & a_{2\varrho+\alpha+\beta} \end{vmatrix}.$$

Ist A_ϱ von Null verschieden und verschwinden

$$(4.)\qquad B_{00},\quad B_{01},\quad \ldots,\quad B_{0,\sigma-1},$$

so bilden die Grössen

$$(5.)\qquad B_{\alpha\beta} \qquad (\alpha, \beta = 0, 1, \ldots, \sigma-1)$$

ein recurrirendes System; es ist also $B_{\alpha\beta} = 0$, wenn

$$\alpha+\beta < \sigma-1$$

ist, und es kann $B_{\alpha\beta} = B_{\alpha+\beta}$ gesetzt werden.

Nach dem Satze von *Kronecker* § 1 folgt aus der gemachten Voraussetzung, dass in dem System

$$\begin{matrix} a_0 & \ldots a_{\varrho-1} & a_\varrho & \ldots a_{\varrho+\sigma-2} \\ \cdot & \ldots \cdot & \cdot & \ldots \cdot \\ a_{\varrho-1} & \ldots a_{2\varrho-2} & a_{2\varrho-1} & \ldots a_{2\varrho+\sigma-3} \\ a_\varrho & \ldots a_{2\varrho-1} & a_{2\varrho} & \ldots a_{2\varrho+\sigma-2} \end{matrix}$$

alle Determinanten $(\varrho+1)$-ten Grades verschwinden. Nun ist aber nach (1.) § 5

$$(6.)\qquad \begin{vmatrix} a_0 & \ldots a_{\varrho-1} & a_{\varrho+\beta} \\ \cdot & \ldots \cdot & \cdot \\ a_{\varrho-1} & \ldots a_{2\varrho-2} & a_{2\varrho+\beta-1} \\ a_{\varrho+\alpha+1} & \ldots a_{2\varrho+\alpha} & a_{2\varrho+\alpha+\beta+1} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_0 & \ldots a_{\varrho-1} & a_{\varrho+\beta+1} \\ \cdot & \ldots \cdot & \cdot \\ a_{\varrho-1} & \ldots a_{2\varrho-2} & a_{2\varrho+\beta} \\ a_{\varrho+\alpha} & \ldots a_{2\varrho+\alpha-1} & a_{2\varrho+\alpha+\beta+1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_0 & \ldots a_{\varrho-2} & a_{\varrho+\alpha} & a_{\varrho+\beta} \\ \cdot & \ldots \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{\varrho-1} & \ldots a_{2\varrho-3} & a_{2\varrho+\alpha-1} & a_{2\varrho+\beta-1} \\ a_\varrho & \ldots a_{2\varrho-2} & a_{2\varrho+\alpha} & a_{2\varrho+\beta} \end{vmatrix}.$$

Sind also α und β irgend zwei der Werthe 0, 1, ..., $\sigma-2$, so verschwindet die Determinante rechts, und folglich ist $B_{\alpha+1,\beta} = B_{\alpha,\beta+1}$. Mithin ist das System (5.) ein recurrirendes, also $B_{\alpha\beta} = B_{\alpha+\beta}$. Speciell verschwinden die Grössen $B_0 = B_{00}$, $B_1 = B_{01}$, ..., $B_{\sigma-2} = B_{0,\sigma-2}$. Für den Fall $\varrho = 0$, auf den die Formel (6.) nicht anwendbar ist, bedarf der Satz keines Beweises.

Die im Folgenden besonders wichtige Grösse $B_{\sigma-1}$ bezeichne ich auch mit

$$(7.)\qquad A_{\varrho,\varrho+\sigma} = \begin{vmatrix} a_0 & \dots a_{\varrho-1} & a_{\varrho+\beta} \\ \cdot & \dots \cdot & \cdot \\ a_{\varrho-1} & \dots a_{2\varrho-2} & a_{2\varrho-1+\beta} \\ a_{\varrho+\alpha} & \dots a_{2\varrho-1+\alpha} & a_{2\varrho+\alpha+\beta} \end{vmatrix}. \qquad (\alpha+\beta = \sigma-1)$$

§ 7.

Aus dem erhaltenen Resultate ergiebt sich sofort der Satz von *Kronecker* (Monatsber. der Berliner Akademie 1881, S. 584):

Ist A_ϱ von Null verschieden und verschwinden

$$(1.)\qquad B_{00},\quad B_{01},\quad \dots,\quad B_{0,\sigma-2},$$

so verschwinden auch

$$(2.)\qquad A_{\varrho+1},\quad A_{\varrho+2},\quad \dots,\quad A_{\varrho+\sigma-1}.$$

Verschwinden umgekehrt die Grössen (2.), *während A_ϱ von Null verschieden ist, so verschwinden auch die Grössen* (1.). *Ferner ist*

$$(3.)\qquad A_\varrho^{\sigma-1} A_{\varrho+\sigma} = (-1)^{\frac{\sigma(\sigma-1)}{2}} A^\sigma_{\varrho,\varrho+\sigma}.$$

Nach dem Satze von *Sylvester* ist

$$(4.)\qquad A_\varrho^{\lambda-1} A_{\varrho+\lambda} = \Sigma \pm B_{00} B_{11} \dots B_{\lambda-1,\lambda-1}.$$

Ist also $B_{00} = B_{01} = \dots = B_{0,\lambda-1} = 0$, so ist auch $A_{\varrho+\lambda} = 0$. Wenn die Grössen (1.) verschwinden, so bilden die Grössen

$$(5.)\qquad B_{\alpha\beta} = B_{\alpha+\beta} \qquad (\alpha, \beta = 0, 1, \dots, \sigma-1)$$

ein recurrirendes System, und da $B_{\alpha\beta} = 0$ ist, wenn $\alpha+\beta < \sigma-1$ ist, so ist

$$\Sigma \pm B_{00} \dots B_{\sigma-1,\sigma-1} = (-1)^{\frac{\sigma(\sigma-1)}{2}} B^\sigma_{\sigma-1}.$$

Umgekehrt ist $A_{\varrho+1} = B_{00}$, also wenn $A_{\varrho+1} = 0$ ist, auch $B_{00} = 0$. Nach (4.) ist daher $A_\varrho A_{\varrho+2} = -B^2_{01}$, also wenn $A_{\varrho+2} = 0$ ist, auch $B_{01} = 0$.

Folglich ist nach § 6 $B_{02} = B_{11} = B_{20} = B_2$, demnach $A_\varrho^2 A_{\varrho+3} = -B_2^3$, also wenn $A_{\varrho+3} = 0$ ist, auch $B_{02} = 0$. Folglich ist $B_{03} = B_{12} = B_3$, demnach $A_\varrho^3 A_{\varrho+4} = B_3^4$, also wenn $A_{\varrho+3} = 0$ ist, auch $B_{03} = 0$ u. s. w.

Wenn daher A_ϱ von Null verschieden ist, aber die Determinanten (2.) verschwinden, so bilden die Grössen (5.) ein recurrirendes System, in welchem $B_0 = B_1 = \cdots = B_{\sigma-2} = 0$ ist.

§ 8.

Eine besonders merkwürdige Folgerung lässt sich aus diesem Satze ziehen für den Fall, dass das System

$$(1.) \qquad a_{\alpha+\beta} \qquad (\alpha, \beta = 0, 1, 2, \ldots)$$

unbegrenzt, aber nur von endlichem Range r ist. Ist $r > 0$, so können die Grössen $a_0, a_1, a_2, \ldots$ nicht alle verschwinden. Ist

$$a_0 = a_1 = \cdots = a_{\lambda-2} = 0,$$

aber $a_{\lambda-1}$ von Null verschieden, so ist $A_\lambda = \pm a_{\lambda-1}^\lambda$. Daher sind die Determinanten $A_1, A_2, \ldots$, nicht sämmtlich Null. Da aber stets $A_\sigma = 0$ ist, wenn $\sigma > r$ ist, so giebt es einen grössten Werth $\varrho (\leqq r)$, für den A_ϱ von Null verschieden ist. Dann sind $A_{\varrho+1}, A_{\varrho+2}, \ldots$ alle Null, und mithin nach dem obigen Satze auch alle Determinanten $B_{\alpha\beta}$. Nach dem Satze von *Kronecker* verschwinden daher in dem System (1.) alle Determinanten $(\varrho+1)$-ten Grades, und da A_ϱ von Null verschieden ist, so ist ϱ gleich dem Range r des Systems.

Ist r der Rang eines unbegrenzten recurrirenden Systems, so ist A_r von Null verschieden.

Dieser interessante Satz von *Kronecker* (Monatsberichte der Berliner Akademie 1881, S. 560) gilt aber nur für unbegrenzte Systeme. Ist das System

$$(2.) \qquad a_{\alpha+\beta} \qquad (\alpha, \beta = 0, 1, \ldots, n-1)$$

begrenzt (vom Grade n), so kann, wie das einfachste Beispiel

$$n = 2, \quad a_0 = a_1 = 0, \quad r = 1$$

zeigt, $A_r = 0$ sein, oder wenn wieder ϱ der grösste Werth ist, für den A_ϱ von Null verschieden ist, so kann $r - \varrho = \sigma > 0$ sein. In diesem Falle ist

nun, wie ich jetzt zeigen will, stets die Determinante $r$ten Grades

$$(3.)\qquad A'_r = \begin{vmatrix} a_0 & \dots a_{\varrho-1} & a_{n-\sigma} & \dots a_{n-1} \\ \cdot & \dots \cdot & \cdot & \dots \cdot \\ a_{\varrho-1} & \dots a_{2\varrho-2} & a_{n-\sigma+\varrho-1} & \dots a_{n+\varrho-2} \\ a_{n-\sigma} & \dots a_{n-\sigma+\varrho-1} & a_{2n-2\sigma} & \dots a_{2n-\sigma-1} \\ \cdot & \dots \cdot & \cdot & \dots \cdot \\ a_{n-1} & \dots a_{n+\varrho-2} & a_{2n-\sigma-1} & \dots a_{2n-2} \end{vmatrix},$$

welche aus den ersten ϱ und den letzten σ Zeilen und Spalten des recurrirenden Systems gebildet ist, von Null verschieden.

Ich betrachte zuerst den speciellen Fall $\varrho = 0$. Dann ist $A_1 = a_0 = 0$, also $A_2 = -a_1^2 = 0$, also $A_3 = -a_2^3 = 0$ u. s. w., demnach

$$a_0 = a_1 = \dots = a_{n-1} = 0.$$

Folglich ist die aus den letzten $n-1$ Zeilen und Spalten gebildete Determinante gleich $\pm a_n^{n-1}$. Da $A_n = 0$ ist, so ist der Rang $r < n$. Ist also a_n von Null verschieden, so ist $r = n-1$, und umgekehrt; ist aber $r < n-1$, so ist $a_n = 0$. Folglich ist die aus den letzten $n-2$ Zeilen und Spalten gebildete Determinante gleich $\pm a_{n+1}^{n-2}$. Ist also a_{n+1} von Null verschieden, so ist $r = n-2$, und umgekehrt; ist aber $r < n-2$, so ist $a_{n+1} = 0$, u. s. w. Daher ist die aus den letzten r Zeilen und Spalten gebildete Determinante von Null verschieden und gleich $\pm a_{2n-r-1}^r$, während $a_0, a_1, \dots, a_{2n-r-2}$ verschwinden.

Im allgemeinen Falle betrachte ich die quadratische Form

$$(4.)\qquad \xi = \sum_{\alpha,\beta}{}_0^{n-1} a_{\alpha+\beta} x_\alpha x_\beta$$

der Variabeln $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}$ und setze

$$(5.)\qquad \xi_\alpha = \frac{1}{2}\frac{\partial \xi}{\partial x_\alpha} = \sum_\beta a_{\alpha+\beta} x_\beta.$$

Dann ist nach (2.) § 3

$$(6.)\qquad A_\varrho \xi = \eta^{(\varrho)} + \zeta^{(\varrho)} = \begin{vmatrix} a_0 & \dots a_{\varrho-1} & \xi_0 \\ \cdot & \dots \cdot & \cdot \\ a_{\varrho-1} & \dots a_{2\varrho-2} & \xi_{\varrho-1} \\ \xi_0 & \dots \xi_{\varrho-1} & \xi \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_0 & \dots a_{\varrho-1} & \xi_0 \\ \cdot & \dots \cdot & \cdot \\ a_{\varrho-1} & \dots a_{2\varrho-2} & \xi_{\varrho-1} \\ \xi_0 & \dots \xi_{\varrho-1} & 0 \end{vmatrix},$$

und nach dem in § 1 entwickelten Satze ist der Rang der Form

$$(7.)\qquad \eta^{(\varrho)} = \sum_{\alpha,\beta}{}_0^{n-\varrho-1} B_{\alpha\beta} x_{\varrho+\alpha} x_{\varrho+\beta}$$

gleich $r-\varrho = \sigma$. Da ferner A_ϱ von Null verschieden ist und $A_{\varrho+1}, \dots, A_n$

verschwinden, so ist $B_{\alpha\beta} = B_{\alpha+\beta}$ und $B_0 = B_1 = \cdots = B_{n-\varrho-1} = 0$. Aus dem oben behandelten Falle ergiebt sich daher, dass auch $B_{n-\varrho} = \cdots = B_{2n-r-\varrho-2} = 0$, aber $B_{2n-r-\varrho-1} = A'_{\varrho r}$ von Null verschieden ist. Nun ist aber nach dem Satze von *Sylvester*

$$(8.)\qquad A_\varrho^{\sigma-1} A'_r = \begin{vmatrix} B_{2n-2r} & \dots B_{2n-r-\varrho-1} \\ \cdot & \dots\dots \\ B_{2n-r-\varrho-1} & \dots B_{2n-2\varrho-2} \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{1}{2}\sigma(\sigma-1)} A'^{\sigma}_{\varrho r},$$

und mithin ist A'_r von Null verschieden.

Ebenso ist auch die Signatur der Form $A_\varrho \xi$ gleich der Summe der Signaturen der beiden quadratischen Formen von $\xi_0 \dots \xi_{\varrho-1}$ und von $x_\varrho, \dots, x_{n-1}$, in welche sie nach (6.) zerlegt werden kann. Da $B_{\alpha\beta} = 0$ ist, wenn $\alpha+\beta < 2n-r-\varrho-1$ ist, so hängt die Form (7.) nur von den Variabeln $x_{n-\sigma}, \dots, x_{n-1}$ ab und ist als solche von der speciellen Art, die ich am Ende des § 3 betrachtet habe. Ihre Signatur ist also, wenn σ gerade ist, Null, wenn σ ungerade ist, $(-1)^{\frac{1}{2}(\sigma-1)}\operatorname{sign}(A'_r)$. Die Signatur von ξ wird demnach erhalten, indem man die Signatur der Form $\frac{\xi^{(\varrho)}}{A_\varrho}$ um 0 oder

$$(9.)\qquad (-1)^{\frac{1}{2}(r-\varrho-1)}\operatorname{sign}(A_\varrho A'_r)$$

vermehrt, je nachdem $r-\varrho$ gerade oder ungerade ist. Jene Form der Variabeln $\xi_0, \dots, \xi_{\varrho-1}$ ist aber die reciproke der Form $\Sigma_{\alpha,\beta}{}_0^{\varrho-1} a_{\alpha+\beta} x_\alpha x_\beta$, und ich werde nun zeigen, wie man die Signatur einer solchen Form, deren Determinante nicht verschwindet, berechnen kann.

Um die ursprünglichen Bezeichnungen anwenden zu können, betrachte ich allgemeiner eine Form (4.) vom Range r, für welche A_r von Null verschieden ist. Sei wieder ϱ ein fester Index und

$$z_\alpha = \begin{vmatrix} a_0 & \dots a_{\varrho-1} & \xi_0 \\ \cdot & \dots\dots & \cdot \\ a_{\varrho-1} & \dots a_{2\varrho-2} & \xi_{\varrho-1} \\ a_{\varrho+\alpha} & \dots a_{2\varrho+\alpha-1} & \xi_{\varrho+\alpha} \end{vmatrix}.$$

Dann ist nach dem Satze von *Sylvester*

$$(10.)\qquad A_\varrho^\sigma \eta^{(\varrho+\sigma)} = \begin{vmatrix} B_{00} & \dots B_{0,\sigma-1} & z_0 \\ \cdot & \dots\dots & \\ B_{\sigma-1,0} & \dots B_{\sigma-1,\sigma-1} & z_{\sigma-1} \\ z_0 & \dots z_{\sigma-1} & \eta^{(\varrho)} \end{vmatrix}$$

und

$$(11.)\qquad A_\varrho^{\sigma-1}A_{\varrho+\sigma} = \Sigma\pm B_{00}\dots B_{\sigma-1,\sigma-1}$$

und folglich

$$(12.)\qquad \frac{\eta^{(\varrho)}}{A_\varrho}-\frac{\eta^{(\varrho+\sigma)}}{A_{\varrho+\sigma}} = -\frac{1}{A_\varrho}\begin{vmatrix} B_{00} & \dots B_{0,\sigma-1} & z_0 \\ \cdot & \dots\cdot & \cdot \\ B_{\sigma-1,0} & \dots B_{\sigma-1,\sigma-1} & z_{\sigma-1} \\ z_0 & \dots z_{\sigma-1} & 0 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} B_{00} & \dots B_{0,\sigma-1} \\ \cdot & \dots\cdot \\ B_{\sigma-1,0} & \dots B_{\sigma-1,\sigma-1} \end{vmatrix}.$$

Die Signatur dieser Form der Variabeln $z_0, \dots, z_{\sigma-1}$ ist gleich der Signatur der reciproken Form $A_\varrho \Sigma_{\alpha,\beta}{}_0^{\sigma-1} B_{\alpha\beta}z_\alpha z_\beta$. Nun setze ich voraus, dass $A_{\varrho+1}, \dots, A_{\varrho+\sigma-1}$ verschwinden, während A_ϱ und $A_{\varrho+\sigma}$ von Null verschieden sind. Dann ist $B_{\alpha\beta}=0$, wenn $\alpha+\beta<\sigma-1$ ist. Daher ist nach (9.) § 3 die Signatur der Form, wenn σ gerade ist, Null, wenn aber σ ungerade ist,

$$(13.)\qquad (-1)^{\frac{1}{2}(\sigma-1)}\operatorname{sign}(A_\varrho A_{\varrho+\sigma}) = \operatorname{sign}(A_\varrho A_{\varrho,\varrho+\sigma}).$$

Denn die Determinante der Form ist nach (11.) gleich $A_\varrho^{2\sigma-1}A_{\varrho+\sigma}$, und es ist

$$(14.)\qquad A_\varrho^{\sigma-1}A_{\varrho+\sigma} = (-1)^{\frac{1}{2}\sigma(\sigma-1)}A_{\varrho,\varrho+\sigma}^{\sigma},$$

wo

$$(15.)\qquad A_{\varrho,\varrho+\sigma} = B_{\sigma-1} = B_{0,\sigma-1} = B_{1,\sigma-2} = \dots = B_{\sigma-1,0}$$

auf verschiedene Arten in Determinantenform dargestellt werden kann, unter andern auch, wenn σ ungerade ist, als Hauptunterdeterminante $B_{\frac{\sigma-1}{2},\frac{\sigma-1}{2}}$.

Zur Berechnung der Signatur einer beliebigen recurrirenden Form (4.) ergiebt sich aus diesen Entwickelungen in Verbindung mit denen des § 3 die folgende Regel: Unter den Determinanten (2.) § 2 seien

$$(16.)\qquad A_0\ A_\alpha\ A_\beta\ A_\gamma\ \dots\ A_\varkappa\ A_\lambda\ \dots\ A_\nu\ A_\varrho \qquad (0<\alpha<\beta\dots<\varrho)$$

von Null verschieden. Ist $\varrho<r$, so füge man dazu noch die Determinante A'_r. Unter den Differenzen der Indices $\alpha, \beta-\alpha, \gamma-\beta, \dots, r-\varrho$ behalte man nur die bei, welche ungerade sind. Ist $\lambda-\varkappa$ ungerade, so berechne man das Vorzeichen $(-1)^{\frac{1}{2}(\lambda-\varkappa-1)}\operatorname{sign}(A_\varkappa A_\lambda)$, ist $r-\varrho$ ungerade, das Vorzeichen $(-1)^{\frac{1}{2}(r-\varrho-1)}\operatorname{sign}(A_\varrho A'_r)$. Dann ist die Signatur der Form ξ gleich der Summe dieser Vorzeichen

$$(17.)\qquad s = \Sigma(-1)^{\frac{1}{2}(\lambda-\varkappa-1)}\operatorname{sign}(A_\varkappa A_\lambda) = \Sigma\operatorname{sign}(A_\varkappa A_{\varkappa\lambda}). \qquad (\lambda-\varkappa \text{ ungerade})$$

Nach der Formel

$$(18.)\qquad A_\varkappa^{\lambda-\varkappa-1}A_\lambda = (-1)^{\frac{1}{2}(\lambda-\varkappa)(\lambda-\varkappa-1)}A_{\varkappa\lambda}^{\lambda-\varkappa},$$

an deren Stelle für $\lambda = r$ die Formel (8.) tritt, ist aber

$$(19.)\quad \operatorname{sign}(A_\lambda) = (-1)^{\frac{1}{2}(\lambda-\varkappa-1)}\operatorname{sign}(A_{\varkappa\lambda}) \quad\text{oder}\quad \operatorname{sign}(A_\lambda) = (-1)^{\frac{1}{2}(\lambda-\varkappa)}\operatorname{sign}(A_\varkappa),$$

je nachdem $\lambda-\varkappa$ ungerade oder gerade ist. Durch wiederholte Anwendung dieser Formeln ergiebt sich

$$(20.)\qquad s = \Sigma(-1)^{\frac{1}{2}(\xi-\varkappa-1)}\operatorname{sign}(A_{\varkappa\lambda}A_{\xi\eta}) = \Sigma(-1)^{\frac{1}{2}(\eta-\lambda-1)}\operatorname{sign}(A_\lambda A_\eta),$$

wenn in der Reihe der Indices

$$(21.)\qquad 0\,\alpha\,\beta\ldots\varkappa\,\lambda\ldots\xi\,\eta\ldots\varrho\,r$$

die Differenzen $\lambda-\varkappa$ und $\eta-\xi$ ungerade, die Differenzen der zwischen λ und ξ liegenden Indices aber gerade sind. Da in den Formeln (17.) und (20.) $\lambda-\varkappa$ ungerade ist, so kann für $A_{\varkappa\lambda}$ die Hauptunterdeterminante

$$(22.)\qquad A_{\varkappa\lambda} = \begin{vmatrix} a_0 & \ldots a_{\varkappa-1} & a_{\frac{1}{2}(\varkappa+\lambda-1)} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{\varkappa-1} & \ldots a_{2\varkappa-2} & a_{\frac{1}{2}(3\varkappa+\lambda-3)} \\ a_{\frac{1}{2}(\varkappa+\lambda-1)} & \ldots a_{\frac{1}{2}(3\varkappa+\lambda-3)} & a_{\varkappa+\lambda-1} \end{vmatrix}$$

gesetzt werden.

§ 9.

Um zu dem *Sturm*schen Satze zu gelangen, ist eine recurrirende Form

$$(1.)\qquad \sum_{\alpha,\beta}{}_0^{n-1} f_{\alpha+\beta}x_\alpha x_\beta$$

zu betrachten, deren Coefficienten

$$(2.)\qquad f_\lambda = a_\lambda x - a_{\lambda+1} \qquad (\lambda = 0, 1, \ldots, 2n-2)$$

lineare Functionen einer Variabeln x mit constanten Coefficienten sind. Ist die Signatur der Form für einen bestimmten Werth von x gleich s und für einen andern Werth x' gleich s', so handelt es sich um die Berechnung der Differenz

$$(3.)\qquad s'-s = \varDelta s.$$

Da in den Anwendungen das System

$$(4.)\qquad \begin{cases} a_0 \dots a_{n-1} \\ \cdot \quad \cdots \cdot \\ a_n \dots a_{2n-1} \end{cases}$$

ein Theil eines unbegrenzten recurrirenden Systems ist, dessen Rang $r \leqq n$ ist, so nehme ich an, dass A_r von Null verschieden ist, wenn r der Rang des Systems (4.) ist. Die der Determinante (2.) § 6 analoge Determinante

$$(5.)\qquad F_\varrho = \begin{vmatrix} f_0 & \dots f_{\varrho-1} \\ \cdot & \cdots \cdot \\ f_{\varrho-1} & \dots f_{2\varrho-2} \end{vmatrix}$$

kann auf die Form

$$(6.)\qquad F_\varrho(x) = \begin{vmatrix} a_0 \dots a_{\varrho-1} & 1 \\ \cdot \quad \cdots \cdot & \cdot \\ a_\varrho \dots a_{2\varrho-1} & x^\varrho \end{vmatrix}$$

gebracht werden, ist also eine ganze Function ϱten Grades von x, worin der Coefficient von x^ϱ gleich A_ϱ ist. Ist F_ϱ identisch Null, so verschwindet daher A_ϱ, aber auch $A_{\varrho+1}$, weil die Coefficienten von F_ϱ die zu den Elementen der letzten Spalte von $A_{\varrho+1}$ gehörigen Unterdeterminanten sind. Ist also A_ϱ von Null verschieden, so verschwindet weder F_ϱ noch $F_{\varrho-1}$ identisch. Wendet man den Satz von *Sylvester* auf die Determinante

$$F_{\varrho+\lambda} = \begin{vmatrix} a_0 & \dots a_{\varrho-1} & a_\varrho & \dots a_{\varrho+\lambda-1} & 1 \\ \cdot & \cdots \cdot & \cdot & \cdots \cdot & \cdot \\ a_{\varrho-1} & \dots a_{2\varrho-2} & a_{2\varrho-1} & \dots a_{2\varrho+\lambda-2} & x^{\varrho-1} \\ a_\varrho & \dots a_{2\varrho-1} & a_{2\varrho} & \dots a_{2\varrho+\lambda-1} & x^\varrho \\ \cdot & \cdots \cdot & \cdot & \cdots \cdot & \cdot \\ a_{\varrho+\lambda} & \dots a_{2\varrho+\lambda-1} & a_{2\varrho+\lambda} & \dots a_{2\varrho+2\lambda-1} & x^{\varrho+\lambda} \end{vmatrix}$$

an, so erhält man

$$(7.)\qquad A_\varrho^\lambda F_{\varrho+\lambda} = \begin{vmatrix} B_{00} & \dots B_{0,\lambda-1} & G_0 \\ \cdot & \cdots \cdot & \cdot \\ B_{\lambda-1,0} & \dots B_{\lambda-1,\lambda-1} & G_{\lambda-1} \\ B_{\lambda,0} & \dots B_{\lambda,\lambda-1} & G_\lambda \end{vmatrix},$$

wo

$$(8.)\qquad G_\lambda = \begin{vmatrix} a_0 & \dots a_{\varrho-1} & 1 \\ \cdot & \cdots \cdot & \cdot \\ a_{\varrho-1} & \dots a_{2\varrho-2} & x^{\varrho-1} \\ a_{\varrho+\lambda} & \dots a_{2\varrho+\lambda-1} & x^{\varrho+\lambda} \end{vmatrix}$$

ist. Nun sei $A_{\varrho+1} = \cdots = A_{\varrho+\sigma-1} = 0$, A_ϱ und $A_{\varrho+\sigma}$ von Null verschieden. Dann ist

$$B_{\alpha\beta} = B_{\alpha+\beta} \qquad (\alpha, \beta = 0, 1, \ldots, \sigma-1)$$

und $B_{\alpha\beta} = 0$, wenn $\alpha+\beta < \sigma-1$ ist. Daher ist identisch

$$(9.) \qquad F_{\varrho+1} = \cdots = F_{\varrho+\sigma-2} = 0,$$

aber, weil $B_{\sigma-1} = A_{\varrho,\varrho+\sigma}$ und $G_0 = F_\varrho$ ist,

$$A_\varrho^{\sigma-1} F_{\varrho+\sigma-1} = (-1)^{\frac{1}{2}\sigma(\sigma-1)} A_{\varrho,\varrho+\sigma}^{\sigma-1} F_\varrho$$

oder nach (14.) § 7 [vgl. *Kronecker,* Monatsberichte der Berliner Akademie 1878, S. 99 (D.)]

$$(10.) \qquad A_{\varrho,\varrho+\sigma} F_{\varrho+\sigma-1} = A_{\varrho+\sigma} F_\varrho.$$

Ich schliesse zunächst solche Werthe der Variabeln x aus, für welche eine der Functionen F_ϱ, $F_{\varrho+\sigma}$, die nicht identisch verschwinden, den Werth Null hat. Ist dann $\sigma-1$ gerade (oder Null), so liefert der Uebergang von F_ϱ zu $F_{\varrho+\sigma-1}$ keinen Beitrag zur Signatur, ist aber $\sigma-1$ ungerade, nach (13.) § 7 den Beitrag

$$(11.) \quad -(-1)^{\frac{1}{2}\sigma}\operatorname{sign}(F_\varrho F_{\varrho+\sigma-1}) = -(-1)^{\frac{1}{2}\sigma}\operatorname{sign}(A_{\varrho+\sigma} A_{\varrho,\varrho+\sigma}) = -\operatorname{sign}(A_\varrho A_{\varrho,\varrho+\sigma}).$$

Da aber dies Vorzeichen von x unabhängig ist, so hebt sich dies Glied in der Differenz (3.).

Dagegen liefert der Uebergang von $F_{\varrho+\sigma-1}$ zu $F_{\varrho+\sigma}$ den Beitrag

$$(12.) \qquad \operatorname{sign}(F_{\varrho+\sigma-1} F_{\varrho+\sigma}) = \operatorname{sign}(A_{\varrho+\sigma} A_{\varrho,\varrho+\sigma} F_\varrho F_{\varrho+\sigma}).$$

Daher ist Δs gleich der Aenderung, die der Ausdruck

$$(13.) \qquad \Sigma\operatorname{sign}(F_{\lambda-1} F_\lambda) = \Sigma\operatorname{sign}(A_\lambda A_{\varkappa\lambda} F_\varkappa F_\lambda)$$

beim Uebergange von x zu x' erfährt. Dem Summationsbuchstaben λ sind links nur die Werthe zu ertheilen, für die A_λ $(\lambda > 0)$ von Null verschieden ist. Da aber für die anderen Werthe $F_{\lambda-1} F_\lambda$ verschwindet oder, falls $A_\lambda = 0$, $A_{\lambda-1}$ und $A_{\lambda+1}$ von Null verschieden ist, ein Quadrat ist [*Kronecker,* a. a. O. S. 100 (F')], so kann λ auch alle Werthe von 1 bis $n-1$ durchlaufen. Für die Signatur s selbst ergiebt sich aus der obigen Entwickelung die Formel

$$(14.) \qquad s+h = \Sigma\operatorname{sign}(F_{\lambda-1} F_\lambda),$$

wo die Summe nur über die oben definirten Werthe von λ zu erstrecken

ist, und die Constante h den Werth

$$(15.)\qquad h = \Sigma \operatorname{sign}(A_\varkappa A_{\varkappa\lambda}) \qquad {\scriptstyle(\lambda-\varkappa \text{ gerade})}$$

hat.

Ist speciell $x' = +\infty$ und $x = -\infty$, so hat $\operatorname{sign}(F_{\lambda-1}F_\lambda)$ für diese beiden Grenzwerthe gleiche Werthe, wenn der Grad von $F_{\lambda-1}F_\lambda$ gerade ist, aber entgegengesetzte, wenn er ungerade ist. Sind nun $A_\varkappa$ und A_λ $(\lambda > \varkappa)$ von Null verschieden, während $A_{\varkappa+1} \dots A_{\lambda-1}$ verschwinden, so ist

$$(10^*.)\qquad A_{\varkappa\lambda}F_{\lambda-1} = A_\lambda F_\varkappa.$$

Daher ist der Grad von $F_{\lambda-1}F_\lambda$ gleich $\varkappa+\lambda$, und wenn $\varkappa+\lambda$ ungerade ist, so hat der Coefficient von $x^{\varkappa+\lambda}$ dasselbe Vorzeichen wie $A_\varkappa A_{\varkappa\lambda}$.

Folglich ist für diesen Fall

$$(16.)\qquad \frac{1}{2}\Delta s = \Sigma \operatorname{sign}(A_\varkappa A_{\varkappa\lambda}) \qquad {\scriptstyle(\lambda-\varkappa \text{ ungerade})}$$

ausgedehnt über die Glieder der Reihe

$$A_0 \quad A_\alpha \quad A_\beta \dots A_\varkappa \quad A_\lambda \dots A_r,$$

für welche $\lambda-\varkappa$ ungerade ist. Dieselbe Regel ergiebt sich direct aus dem in § 7 erhaltenen Resultate, nach welchem die rechte Seite der Gleichung (16.) gleich $s' = -s$ ist.

§ 10.

Die Formel (13.) § 9 bleibt auch gültig, wenn x oder x' Werthe annehmen, für die eine der Functionen F_λ den Werth Null hat. Um dies zu beweisen, brauche ich die zwischen den Functionen F_λ bestehenden linearen Relationen. Nach Formel (1.) § 5 ist

$$\begin{vmatrix} a_0 & \dots & a_{\varrho-1} & 1 \\ \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ a_{\varrho-1} & \dots & a_{2\varrho-2} & x^{\varrho-1} \\ a_{\varrho+1} & \dots & a_{2\varrho} & x^{\varrho+1} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_0 & \dots & a_{\varrho-1} & x \\ \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ a_{\varrho-1} & \dots & a_{2\varrho-2} & x^{\varrho} \\ a_\varrho & \dots & a_{2\varrho-1} & x^{\varrho+1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_0 & \dots & a_{\varrho-2} & a_\varrho & 1 \\ \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_\varrho & \dots & a_{2\varrho-2} & a_{2\varrho} & x^\varrho \end{vmatrix},$$

also wenn man die erste dieser Determinanten mit F'_ϱ bezeichnet (F'_0 und die letzte mit H_ϱ $(H_0 = 0,\ H_1 = a_1 x - a_2)$:

$$(1.)\qquad F'_\varrho - xF_\varrho = H_\varrho.$$

In dem System

$$\begin{matrix} a_0 & \dots a_{\varrho-2} & a_{\varrho-1} & a_\varrho & 1 & 0 \\ . & \dots . & . & . & . & . \\ a_{\varrho-1} & \dots a_{2\varrho-3} & a_{2\varrho-2} & a_{2\varrho-1} & x^{\varrho-1} & 0 \\ a_\varrho & \dots a_{2\varrho-2} & a_{2\varrho-1} & a_{2\varrho} & x^\varrho & 1 \end{matrix}$$

von $\varrho+1$ Zeilen und von $\varrho+3$ Spalten bezeichne ich die aus den $\varrho+1$ Spalten $0, \dots, \varrho-2, \alpha, \beta$ gebildete Determinante $(\varrho+1)$-ten Grades mit (α, β). Dann ist nach einem bekannten Satze

$$(2.) \quad (\varrho-1, \varrho)(\varrho+1, \varrho+2)+(\varrho-1, \varrho+1)(\varrho+2, \varrho)+(\varrho-1, \varrho+2)(\varrho, \varrho+1) = 0,$$

also

$$(3.) \qquad A_{\varrho+1}F_{\varrho-1}-A'_\varrho F_\varrho+A_\varrho H_\varrho = 0,$$

falls man

$$A'_\varrho = \begin{vmatrix} a_0 & \dots a_{\varrho-2} & a_\varrho \\ . & \dots . & . \\ a_{\varrho-1} & \dots a_{2\varrho-3} & a_{2\varrho-1} \end{vmatrix}$$

$(A'_1 = a_1)$ setzt.

Endlich ist nach dem Determinantensatze (1.) § 2

$$(4.) \qquad A_\varrho F_{\varrho+1} = A_{\varrho+1}F'_\varrho - A'_{\varrho+1}F_\varrho.$$

Eliminirt man aus diesen drei Gleichungen F'_ϱ und H_ϱ, so erhält man die Recursionsformel

$$(5.) \quad A^2_\varrho F_{\varrho+1}+(A_\varrho A'_{\varrho+1}-A_{\varrho+1}A'_\varrho-xA_\varrho A_{\varrho+1})F_\varrho+A^2_{\varrho+1}F_{\varrho-1} = 0.$$

Dieselbe ist von *Jacobi* (De eliminatione variabilis e duabus aequationibus algebraicis, Ges. Werke Bd. 3, S. 319) gefunden und von *Joachimsthal* (dieses Journal Bd. 48 S. 397) und *Hattendorf* (Die *Sturm*schen Functionen § 11) auf anderem Wege bewiesen, hier aber zum ersten Male nur aus Identitäten zwischen Determinanten hergeleitet worden.

Die Formel lässt sich auf folgende Art verallgemeinern: Sei wieder $A_{\varrho+1} = \dots = A_{\varrho+\sigma-1} = 0$, A_ϱ und $A_{\varrho+\sigma}$ von Null verschieden. Nach Formel (1.) § 5 ist

$$G_\lambda - xG_{\lambda-1} = \begin{vmatrix} a_0 & \dots a_{\varrho-1} & 1 \\ . & \dots . & . \\ a_{\varrho-1} & \dots a_{2\varrho-2} & x^{\varrho-1} \\ a_{\varrho+\lambda} & \dots a_{2\varrho+\lambda-1} & x^{\varrho+\lambda} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_0 & \dots a_{\varrho-1} & x \\ . & \dots . & . \\ a_{\varrho-1} & \dots a_{2\varrho-2} & x^\varrho \\ a_{\varrho+\lambda-1} & \dots a_{2\varrho+\lambda-2} & x^{\varrho+\lambda} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_0 \dots a_{\varrho-2} & a_{\varrho+\lambda-1} & 1 \\ . \dots . & . & . \\ . \dots . & . & . \\ a_\varrho \dots a_{2\varrho-2} & a_{2\varrho+\lambda-1} & x^\varrho \end{vmatrix}.$$

Wendet man ferner die Relation (2.) auf das System

$$\begin{matrix} a_0 & \dots a_{\varrho-2} & a_{\varrho-1} & a_{\varrho+\lambda-1} & 1 & 0 \\ \cdot & \dots \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{\varrho-1} & \dots a_{2\varrho-3} & a_{2\varrho-2} & a_{2\varrho+\lambda-2} & x^{\varrho-1} & 0 \\ a_\varrho & \dots a_{2\varrho-2} & a_{2\varrho-1} & a_{2\varrho+\lambda-1} & x^\varrho & 1 \end{matrix}$$

an, so ergiebt sich

$$(6.) \qquad B_{0,\lambda-1}F_{\varrho-1} - C_\lambda F_\varrho + A_\varrho(G_\lambda - xG_{\lambda-1}) = 0,$$

wo

$$(7.) \qquad C_\lambda = \begin{vmatrix} a_0 & \dots a_{\varrho-2} & a_{\varrho+\lambda-1} \\ \cdot & \dots \cdot & \cdot \\ a_{\varrho-1} & \dots a_{2\varrho-3} & a_{2\varrho+\lambda-2} \end{vmatrix},$$

also $C_0 = A_\varrho$ ist.

Endlich ist nach (7.) § 9

$$A_\varrho^\sigma F_{\varrho+\sigma} = \begin{vmatrix} B_0 & \dots B_{\sigma-1} & G_0 \\ \cdot & \dots \cdot & \cdot \\ B_{\sigma-1} & \dots B_{2\sigma-2} & G_{\sigma-1} \\ B_{\sigma,0} & \dots B_{\sigma,\sigma-1} & G_\sigma \end{vmatrix}.$$

Multiplicirt man die letzte Spalte mit $A_\varrho = C_0$ und zieht dann von jeder Zeile, von der letzten angefangen, die vorhergehende, mit x multiplicirt, ab, so erhält man

$$A_\varrho^{\sigma+1} F_{\varrho+\sigma} = \begin{vmatrix} B_0 & \dots B_{\sigma-1} & C_0F_\varrho \\ B_1 - xB_0 & \dots B_\sigma - xB_{\sigma-1} & C_1F_\varrho - B_0F_{\varrho-1} \\ \cdot & \dots & \cdot \\ B_{\sigma-1} - xB_{\sigma-2} & \dots B_{2\sigma-2} - xB_{2\sigma-3} & C_{\sigma-1}F_\varrho - B_{\sigma-2}F_{\varrho-1} \\ B_{\sigma,0} - xB_{\sigma-1} & \dots B_{\sigma,\sigma-1} - xB_{2\sigma-2} & C_\sigma F_\varrho - B_{\sigma-1}F_{\varrho-1} \end{vmatrix}$$

$$= F_\varrho \begin{vmatrix} B_0 & \dots B_{\sigma-1} & C_0 \\ B_1 - xB_0 & \dots B_\sigma - xB_{\sigma-1} & C_1 \\ \cdot & \dots \cdot & \cdot \\ B_{\sigma-1} - xB_{\sigma-2} & \dots B_{2\sigma-2} - xB_{2\sigma-3} & C_{\sigma-1} \\ B_{\sigma,0} - xB_{\sigma-1} & \dots B_{\sigma,\sigma-1} - xB_{2\sigma-2} & C_\sigma \end{vmatrix} - F_{\varrho-1}(-1)^\sigma \begin{vmatrix} 0 & B_0 & \dots B_{\sigma-1} \\ B_0 & B_1 - xB_0 & \dots B_\sigma - xB_{\sigma-1} \\ \cdot & \cdot & \dots \cdot \\ B_{\sigma-2} & B_{\sigma-1} - xB_{\sigma-2} & \dots B_{2\sigma-2} - xB_{2\sigma-3} \\ B_{\sigma-1} & B_{\sigma,0} - xB_{\sigma-1} & \dots B_{\sigma,\sigma-1} - xB_{2\sigma-2} \end{vmatrix}.$$

Da aber $B_0 = B_1 = \dots = B_{\sigma-2} = 0$ ist, so ist der Coefficient von $-F_{\varrho-1}$ gleich

$$(-1)^{\frac{1}{2}\sigma(\sigma-1)} B_{\sigma-1}^{\sigma+1} = A_\varrho^{\sigma-1} A_{\varrho+\sigma} B_{\sigma-1},$$

also von der Variabeln x unabhängig. Bezeichnet man den Factor von

F_ϱ mit $A_\varrho^{\sigma-1} Q_{\varrho+\sigma,\varrho}$, so ist demnach

$$(8.)\qquad A_\varrho^2 F_{\varrho+\sigma} = Q_{\varrho+\sigma,\varrho} F_\varrho - A_{\varrho+\sigma} A_{\varrho,\varrho+\sigma} F_{\varrho-1}.$$

Abgesehen von einem constanten Factor ist also $F_{\varrho-1}$ der Rest der Division von $F_{\varrho+\sigma}$ durch F_ϱ. Für den mit Q bezeichneten Quotienten erhält man durch einfache Umformungen den Ausdruck

$$(9.)\qquad A_\varrho^{\sigma-1} Q_{\varrho+\sigma,\varrho} = \begin{vmatrix} B_0 & \dots B_{\sigma-1} & C_0 \\ B_1 & \dots B_\sigma & C_1 + C_0 x \\ \cdot & \cdots\cdot & \cdot \\ B_{\sigma-1} & \dots B_{2\sigma-2} & C_{\sigma-1} + C_{\sigma-2} x + \cdots + C_0 x^{\sigma-1} \\ B_{\sigma,0} & \dots B_{\sigma,\sigma-1} & C_\sigma + C_{\sigma-1} x + \cdots + C_1 x^{\sigma-1} + C_0 x^\sigma \end{vmatrix}.$$

Nach dem Satze von *Sylvester* ist daher, weil $C_0 = A_\varrho$ ist,

$$(10.)\qquad Q_{\varrho+\sigma,\varrho} = \begin{vmatrix} a_0 & \dots a_{\varrho-1} & a_\varrho & \dots a_{\varrho+\sigma-1} & 0 \\ \cdot & \cdots\cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{\varrho-1} & \dots a_{2\varrho-2} & a_{2\varrho-1} & \dots a_{2\varrho+\sigma-2} & 0 \\ a_\varrho & \dots a_{2\varrho-1} & a_{2\varrho} & \dots a_{2\varrho+\sigma-1} & C_0 \\ \cdot & \cdots\cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{\varrho+\sigma} & \dots a_{2\varrho+\sigma-1} & a_{2\varrho+\sigma} & \dots a_{2\varrho+2\sigma-1} & C_\sigma + C_{\sigma-1} x + \cdots C_0 x^\sigma \end{vmatrix}.$$

Ersetzt man in der Formel (8.) ϱ und $\varrho+\sigma$ durch λ und μ, so lautet sie

$$(8^*.)\qquad A_\lambda^2 F_\mu - Q_{\mu,\lambda} F_\lambda + A_\mu A_{\lambda\mu} F_{\lambda-1} = 0,$$

wo $Q_{\mu,\lambda}$ eine ganze Function vom Grade $\mu-\lambda$ ist. In der Reihe der Grössen (2.) § 6 seien $A_\varkappa$, A_λ, $A_\mu (\varkappa < \lambda < \mu)$ von Null verschieden, während die zwischen ihnen liegenden Determinanten A_ϱ verschwinden. Dann geht diese Recursionsformel nach (10*.) § 9 über in

$$(11.)\qquad A_\lambda^2 F_\mu - Q_{\mu,\lambda} F_\lambda + \frac{A_\lambda A_\mu A_{\lambda\mu}}{A_{\varkappa\lambda}} F_\varkappa = 0,$$

und es ist nach (18.) § 7

$$(12.)\qquad A_\lambda^{\mu-\lambda-1} A_\mu = (-1)^{\frac{1}{2}(\mu-1)(\mu-\lambda-1)} A_{\lambda\mu}^{\mu-\lambda}.$$

Sind in der Reihe der Grössen $A_0\ A_1\ A_2 \dots$ nur die Determinanten

$$(13.)\qquad A_0\ A_\alpha\ A_\beta\ \dots\ A_\varkappa\ A_\lambda\ A_\mu\ \dots\ A_r$$

von Null verschieden, so können von den Functionen

$$(14.)\qquad F_0\ F_\alpha\ F_\beta\ \dots\ F_\varkappa\ F_\lambda\ F_\mu\ \dots\ F_r$$

nicht zwei auf einander folgende für denselben Werth von x verschwinden, weil sonst nach (11.) auch F_0 $(=1)$ für diesen Werth verschwände. (Derselbe Satz wird in § 11 durch directe Berechnung der Resultante von F_λ und F_μ bewiesen.)

Bezeichnet man jetzt wieder mit A_ϱ und $A_{\varrho+\sigma}$ zwei auf einander folgende Glieder der Reihe (13.), so liefern die Determinanten $F_{\varrho-1}$, F_ϱ, $F_{\varrho+\sigma-1}$, $F_{\varrho+\sigma}$ für die Signatur s den Beitrag

$$(15.)\qquad \operatorname{sign}(F_{\varrho-1}F_\varrho)+\operatorname{sign}(F_{\varrho+\sigma-1}F_{\varrho+\sigma}),$$

und dazu kommt noch, falls $\sigma-1$ ungerade ist, das Glied

$$(16.)\qquad -(-1)^{\frac{1}{2}\sigma}\operatorname{sign}(A_{\varrho+\sigma}A_{\varrho,\varrho+\sigma}),$$

das sich in der Differenz $s'-s$ aufhebt. Dabei ist aber vorausgesetzt, dass für den betrachteten Werth von x keine jener Functionen den Werth Null hat. Ist aber $F_\varrho=0$, also auch $F_{\varrho+\sigma-1}=0$, so sind $F_{\varrho-1}$ und $F_{\varrho+\sigma}$ von Null verschieden, und diese beiden auf einander folgenden Determinanten liefern dann nach (13.) § 7 zur Signatur den Beitrag Null oder

$$(-1)^{\frac{1}{2}\sigma}\operatorname{sign}(F_{\varrho-1}F_{\varrho+\sigma}),$$

je nachdem σ ungerade oder gerade ist. Nach Formel (8.) ist aber, weil $F_\varrho=0$ ist, $A_\varrho^2F_{\varrho+\sigma}=-A_{\varrho+\sigma}A_{\varrho,\varrho+\sigma}F_{\varrho-1}$, und mithin ist jenes Vorzeichen gleich (16.). Demnach bleibt die Formel (13.) § 9 auch für solche Werthe von x unverändert gültig, für die eine der Functionen F_ϱ verschwindet, deren Index $\varrho<r$ ist. In dem hier betrachteten Falle bleibt dies Ergebniss auch für $\varrho=r$ gültig. Denn weil das System $f_{\alpha+\beta}$ nach der Voraussetzung einen Theil eines unbegrenzten Systems bildet, wird sein Rang für einen Werth von x, für den $F_r=0$ ist, gleich der in der Reihe (16.) § 7 mit ϱ bezeichneten Zahl.

Das in der Formel (13.) § 9 ausgesprochene Resultat lässt sich nun mit Hülfe der Recursionsformel (11.) und der Stetigkeitsbetrachtungen, die der *Sturm*schen Deduction zu Grunde liegen, auf eine andere Form bringen. Um die Aenderung zu ermitteln, welche der Ausdruck (13.) § 9 in einem gegebenen Intervalle erfährt, lasse ich die Variable x dasselbe stetig wachsend durchlaufen. Dann kann sich jener Ausdruck nur an einer solchen Stelle ändern, wo eine der Functionen F_λ verschwindet. Ist $\lambda<r$, so sind an dieser Stelle $F_\varkappa$ und F_μ von Null verschieden. Aus (10*.) § 9 und (8*.) folgt aber

$$(17.)\qquad A_\lambda^2F_{\mu-1}F_\mu-A_{\mu,\lambda}F_\lambda F_{\mu-1}+A_\mu^2F_{\lambda-1}F_\lambda = 0,$$

wo $F_{\mu-1}$ dem F_λ und $F_{\lambda-1}$ dem $F_\varkappa$ proportional ist. Wenn nun F_λ, also auch $F_{\mu-1}$ für einen bestimmten Werth von x von der $m$ten Ordnung verschwindet, so verschwindet in jener Formel das erste und dritte Glied genau von der Ordnung m, das mittlere aber mindestens von der Ordnung $2m$. In der nächsten Umgebung einer Stelle, wo F_λ verschwindet, haben daher $F_{\lambda-1}F_\lambda$ und $F_{\mu-1}F_\mu$ entgegengesetzte Vorzeichen, und folglich ist

$$\operatorname{sign}(F_{\lambda-1}F_\lambda)+\operatorname{sign}(F_{\mu-1}F_\mu) = 0,$$

gleichgültig, auf welcher Seite der betrachteten Stelle x liegt. Durchläuft also x stetig wachsend ein gegebenes Intervall, so kann sich der Ausdruck (13.) § 9 nur dann, und zwar um 2, -2 oder 0 ändern, wenn x durch eine Wurzel der Gleichung $F_r = 0$ hindurchgeht. Legt man einer solchen die Charakteristik $+1$, -1 oder 0 bei, je nachdem, wenn x wachsend durch sie hindurchgeht, $F_{r-1}F_r$ vom negativen zum positiven, vom positiven zum negativen übergeht oder das Vorzeichen nicht wechselt, so ist demnach, falls $x' > x$ ist, $\frac{1}{2}\Delta s$ gleich der Summe der Charakteristiken der zwischen x und x' liegenden Wurzeln der Gleichung $F_r = 0$, ist also durch die beiden Functionen F_r und F_{r-1} *allein* bestimmt.

§ 11.

Um mittelst des gefundenen Satzes die reellen Wurzeln einer *beliebigen* algebraischen Gleichung in einem gegebenen Intervall charakterisiren zu können, ist zu untersuchen, ob man die Constanten a_λ so bestimmen kann, dass F_r und F_{r-1} zwei vorgeschriebene Functionen werden (vgl. *Kronecker*, Göttinger Nachr. 1881, S. 274). Zu diesem Ziele führt die folgende von *Kronecker* (Monatsber. der Berliner Akademie 1881, S. 600) gefundene Identität: Setzt man

$$(1.)\qquad G_\varrho(x,\, y) = -\begin{vmatrix} a_0 & \dots a_{\varrho-1} & 1 \\ \cdot & \dots\cdot & \cdot \\ a_{\varrho-1} & \dots a_{2\varrho-2} & y^{\varrho-1} \\ 1 & \dots x^{\varrho-1} & 0 \end{vmatrix},$$

so ist

$$(2.)\qquad F_\varrho(x)F_{\varrho-1}(y)-F_\varrho(y)F_{\varrho-1}(x) = A_\varrho(x-y)G_\varrho(x,\, y).$$

Setzt man nämlich in der Formel (1.) § 5 $x_\lambda = x^\lambda$, $y_\lambda = y^\lambda$, $z = 0$, so er-

hält man

$$-(x-y)G_\varrho(x,\,y) = \begin{vmatrix} a_0 \dots a_{\varrho-2} & 1 & 1 \\ \cdot \;\cdots\; \cdot & \cdot & \cdot \\ a_\varrho \dots a_{2\varrho-2} & x^\varrho & y^\varrho \end{vmatrix}.$$

Wendet man dann auf das System

$$\begin{matrix} a_0 & \dots a_{\varrho-2} & a_{\varrho-1} & 1 & 1 & 0 \\ \cdot & \cdots \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{\varrho-1} & \dots a_{2\varrho-3} & a_{2\varrho-2} & x^{\varrho-1} & y^{\varrho-1} & 0 \\ a_\varrho & \dots a_{2\varrho-2} & a_{2\varrho-1} & x^\varrho & y^\varrho & 1 \end{matrix}$$

von $\varrho+1$ Zeilen und $\varrho+3$ Spalten die Relation (2.) § 10 an, so erhält man die Formel (2.).

Seien $F(x)$ und $G(x)$ zwei ganze Functionen von den Graden r und r', A der Coefficient von x^r in F, und sei

$$(3.)\qquad R = A^{r'}\Pi G(x_\lambda)$$

ihre Resultante, wo das Product über die r Wurzeln x_λ der Gleichung $F(x)=0$ zu erstrecken ist. Setzt man dann

$$\frac{F(x)G(y)-F(y)G(x)}{x-y} = \sum_{\alpha,\beta}{}_0^{r-1} b_{\alpha\beta}x^\alpha y^\beta,$$

so ist, falls $r' \leqq r$ ist,

$$(4.)\qquad \Sigma \pm b_{00}\dots b_{r-1,r-1} = (-1)^{\frac{1}{2}r(r-1)}A^{r-r'}R.$$

Ist nun A_ϱ von Null verschieden, und betrachtet man $\frac{1}{A_\varrho}G_\varrho(x,\,y)$ als bilineare Form von $1, x, \dots, x^{\varrho-1}$ und $1, y, \dots, y^{\varrho-1}$, so ist sie die reciproke Form von $\sum_{\alpha,\beta}{}_0^{\varrho-1} a_{\alpha+\beta}x_\alpha y_\beta$, und folglich ist ihre Determinante gleich A_ϱ^{-1}. Ist also der Grad von $F_{\varrho-1}$ gleich ϱ', so ist die Resultante von F_ϱ und $F_{\varrho-1}$ gleich

$$(5.)\qquad (-1)^{\frac{1}{2}\varrho(\varrho-1)}A_\varrho^{\varrho+\varrho'-1}.$$

Damit ist von neuem bewiesen, dass F_ϱ und $F_{\varrho-1}$ theilerfremd sind, wenn A_ϱ von Null verschieden ist.

Die Grössen $a_0, a_1, \dots, a_{2n-1}$ genügen nur der einen Bedingung, dass A_r von Null verschieden ist, wenn r der Rang des Systems $a_{\alpha+\beta}$ ist. Die Coefficienten der Functionen F_r und F_{r-1} sind ganze Functionen von $a_0, a_1, \dots, a_{2r-2}$ von den Graden r und $r' < r$. Sind umgekehrt diese beiden Functionen bekannt, so ist A_r der Coefficient von x^r in F_r. Aus

der Formel (2.) ergeben sich dann die Coefficienten $b_{\alpha\beta}$ der bilinearen Form

$$(6.)\qquad \frac{1}{A_r} G_r(x,\, y) = \sum_{\alpha,\beta}{}_0^{r-1} b_{\alpha\beta} x^\alpha y^\beta .$$

Ist $\Sigma a_{\alpha\beta} x_\alpha y_\beta$ ihre reciproke Form, so ist, wie *Jacobi* (a. a. O. § 5) gezeigt hat, und ich in § 12 auf einem directeren Wege beweisen werde, $a_{\alpha\beta} = a_{\alpha+\beta}$ nur von der Summe der Indices abhängig. Hat man so a_0, $a_1, \ldots, a_{2r-2}$ bestimmt, so wird der Ausdruck (6.) § 9 für F_r eine lineare Function von a_{2r-1}

$$(7.)\qquad F_r = -a_{2r-1} F_{r-1}(x) + H,$$

wo H die Determinante (6.) § 9 ist, falls man darin $\varrho = r$ macht und a_{2r-1} durch 0 ersetzt. So findet man a_{2r-1} und daraus, dass in dem System (1.) § 8 alle Determinanten $(r+1)$-ten Grades verschwinden, ergeben sich der Reihe nach $a_{2r}, a_{2r+1}, \ldots, a_{2n-1}$ durch Auflösung je einer linearen Gleichung mit einer Unbekannten, die mit A_r multiplicirt ist.

Seien jetzt umgekehrt F und G zwei beliebig gegebene ganze Functionen der Variabeln x, die folgenden Bedingungen genügen:

> Der Grad r' von G ist kleiner als der Grad r von F. Ist A der Coefficient von x^r in F, so ist die Resultante von F und G gleich $(-1)^{\frac{1}{2}r(r-1)} A^{r+r'-1}$, also von Null verschieden.

Ist die letztere Bedingung nicht erfüllt, und ist R die Resultante der theilerfremden Functionen F und G, so kann man eine reelle Constante k so bestimmen, dass ihr kF und kG genügen. Denn dazu muss

$$k^{r+r'} R = (-1)^{\frac{1}{2}r(r-1)} (kA)^{r+r'-1} \quad \text{oder} \quad k = (-1)^{\frac{1}{2}r(r-1)} A^{r+r'-1} R^{-1}$$

sein. Man setze nun in der eben geschilderten Rechnung F, G und A an die Stelle von F_r, F_{r-1} und A_r und berechne dann aus den eindeutig bestimmten Werthen $a_0, a_1, \ldots, a_{2n-1}$ umgekehrt nach Formel (6.) § 9 und (2.) § 6 die Grössen F_r, F_{r-1} und A_r. Nach jener Rechnung ist $\sum_{\alpha,\beta}{}_0^{r-1} a_{\alpha+\beta} x_\alpha y_\beta$ die reciproke Form von

$$(8.)\qquad \frac{F(x)G(y) - F(y)G(x)}{A^2(x-y)} = \sum_{\alpha,\beta}{}_0^{r-1} b_{\alpha\beta} x^\alpha y^\beta .$$

Nach Formel (4.) ist daher die Resultante von F und G gleich

$$(-1)^{\frac{1}{2}r(r-1)} A^{r+r'} \Sigma \pm b_{00} \ldots b_{r-1,r-1}$$

und nach der Voraussetzung gleich $(-1)^{\frac{1}{2}r(r-1)}A^{r+r'-1}$. Folglich ist

$$\Sigma \pm b_{00} \dots b_{r-1,r-1} = A^{-1},$$

und mithin ist die Determinante A_r der reciproken Form $\Sigma a_{\alpha+\beta} x_\alpha y_\beta$ gleich A, also ist $A_r = A$ von Null verschieden. Da die reciproke Form von der reciproken Form wieder die ursprüngliche ist, so ist

$$(9.) \quad F(x)G(y) - F(y)G(x) = F_r(x)F_{r-1}(y) - F_r(y)F_{r-1}(x).$$

Vergleicht man auf beiden Seiten die Coefficienten von y^r, so erhält man, weil $A = A_r$ ist, $G(x) = F_{r-1}(x)$. Mithin ist

$$\frac{F(x)-F_r(x)}{F_{r-1}(x)} = \frac{F(y)-F_r(y)}{F_{r-1}(y)} = k$$

von x unabhängig, also

$$F(x) = F_r + kF_{r-1} = -(a_{2r-1}-k)F_{r-1} + H.$$

Da aber a_{2r-1} so zu bestimmen ist, dass $F = -a_{2r-1}G + H$ ist, so ist $k = 0$ und $F = F_r$.

Für die praktische Anwendung der Formel (13.) § 9 ist es vortheilhaft, die in ihr auftretenden Grössen alle durch die in Formel (6.) definirten Constanten $b_{\alpha\beta}$ auszudrücken.

Nach den Eigenschaften reciproker Systeme ist

$$(10.) \quad A_r^{-1} A_\varrho = \Sigma \pm b_{\varrho\varrho} \dots b_{r-1,r-1},$$

und $A_r^{-1} B_{\alpha\beta}$ ist gleich der Unterdeterminante, mit der in dieser Determinante das Element $b_{\varrho+\alpha,\varrho+\beta}$ multiplicirt ist. Ferner ist

$$(11.) \quad A_r^{-1} F_\varrho = \begin{vmatrix} (\Sigma b_{\varrho\lambda} x^\lambda) & b_{\varrho,\varrho+1} & \dots b_{\varrho,r-1} \\ \cdot & \cdot & \dots \cdot \\ (\Sigma b_{r-1,\lambda} x^\lambda) & b_{r-1,\varrho+1} & \dots b_{r-1,r-1} \end{vmatrix},$$

wo sich λ von 0 bis ϱ bewegt. Denn diese Determinante bleibt ungeändert, wenn man λ die Werthe von 0 bis $r-1$ durchlaufen lässt. Ersetzt man dann

$$x^0, \quad x^1, \quad \dots, \quad x^{r-1}$$

durch

$$a_\varkappa, \quad a_{\varkappa+1}, \quad \dots, \quad a_{\varkappa+r-1}, \qquad (\varkappa = 0, 1, \dots, \varrho-1)$$

so verschwinden die Elemente der ersten Colonne. Daher kann sie sich von der Determinante (6.) § 9 nur durch einen constanten Factor unterscheiden. Dass aber dieser richtig bestimmt ist, folgt aus der Formel (10.).

Kronecker hat in seinen Untersuchungen ausser den Functionen $F_\varrho(x)$ auch die Functionen

$$(12.)\qquad G_\varrho(x) = \begin{vmatrix} a_0 \dots a_{\varrho-1} & 0 \\ a_1 \dots a_\varrho & a_0 \\ a_2 \dots a_{\varrho+1} & a_0 x + a_1 \\ \dots & \cdot \\ a_\varrho \dots a_{2\varrho-1} & a_0 x^{\varrho-1} + a_1 x^{\varrho-2} + \dots + a_{\varrho-1} \end{vmatrix}$$

($G_0 = 0$, $G_1 = a_0$) benutzt. Sie genügen denselben linearen Recursionsformeln (5.) und (11.) § 10 wie die Functionen F_ϱ und stehen zu diesen (vergl. *Kronecker*, Monatsber. der Berliner Akademie 1881, S. 564) in der Beziehung

$$(13.)\qquad F_{\varrho-1}G_\varrho - G_{\varrho-1}F_\varrho = A_\varrho^2,$$

so dass

$$(14.)\qquad \frac{G_\varrho}{F_\varrho} = a_0 x^{-1} + a_1 x^{-2} + \dots + a_{2\varrho-1} x^{-2\varrho} + k_{2\varrho} x^{-2\varrho-1} + \dots$$

ein Näherungswerth des Kettenbruchs ist, in den sich

$$(15.)\qquad \frac{G_r}{F_r} = a_0 x^{-1} + a_1 x^{-2} + \dots + a_{2n-1} x^{-2n} + \dots$$

entwickeln lässt. Da aber seine Darstellung gerade dadurch, dass er so viele Reihen von Functionen gleichzeitig betrachtet hat, etwas an Uebersichtlichkeit eingebüsst hat, so habe ich Werth darauf gelegt, die ganze Untersuchung mit Hülfe der Functionen F_ϱ allein durchzuführen.

§ 12.

Die Bestimmung der Signatur lässt sich in ähnlicher Weise wie bei den recurrirenden Formen, bei quadratischen Formen

$$(1.)\qquad \sum_{\alpha,\beta}{}_0^{n-1} a_{\alpha\beta} u_\alpha u_\beta$$

durchführen, die ich *Bézout*sche Formen nennen will, deren Coefficienten $a_{\alpha\beta}$ in folgender Art aus $2n+2$ unabhängigen Grössen

$$p_0, \ \dots, \ p_n, \quad q_0, \ \dots, \ q_n$$

zusammengesetzt sind. Sind

$$(2.)\qquad F(u) = \sum_\lambda{}_0^n p_\lambda u^{n-\lambda}, \quad G(u) = \sum_\lambda{}_0^n q_\lambda u^{n-\lambda}$$

zwei ganze Functionen $n$ten Grades der Variabeln u, so ist

$$(3.)\qquad \frac{F(u)G(v) - F(v)G(u)}{u-v} = \sum_{\alpha,\beta}{}_0^{n-1} a_{\alpha\beta} u^{n-1-\alpha} v^{n-1-\beta}.$$

Ist die Determinante der Form (1.) von Null verschieden, so sind $F(u)$ und $G(u)$ nach (4.) § 11 theilerfremd und umgekehrt. Für diesen Fall ist die Theorie solcher Formen schon in § 11 behandelt. Für den *Sturm*schen Satz aber ist es von Wichtigkeit, die erhaltenen Formeln auch auf den Fall auszudehnen, wo $F(u)$ und $G(u)$ einen Divisor gemeinsam haben.

Multiplicirt man die Gleichung (3.) mit $u-v$, so erhält man durch Coefficientenvergleichung

$$(4.)\qquad a_{\alpha,\beta-1}-a_{\alpha-1,\beta} = p_\alpha q_\beta - p_\beta q_\alpha = d_{\alpha\beta}, \qquad (\alpha, \beta = 0, 1, \dots n)$$

und diese Formel ist auch für die Grenzwerthe 0 und n richtig, wenn man festsetzt, dass $a_{\alpha\beta} = 0$ ist, falls einer der Indices negativ oder grösser als $n-1$ ist. Speciell ist

$$(5.)\qquad a_{0,\beta-1} = a_{\beta-1,0} = d_{0\beta}, \quad a_{\alpha,n-1} = a_{n-1,\alpha} = d_{\alpha n}$$

und allgemein

$$(6.)\qquad a_{\alpha,\beta-1} = d_{\alpha,\beta}+d_{\alpha-1,\beta+1}+d_{\alpha-2,\beta+2}+\cdots,$$

wo die Summation so lange fortzusetzen ist, bis der erste Index 0 oder der zweite n wird. Aus der Identität

$$(7.)\qquad d_{0n}d_{\alpha\beta}+d_{0\alpha}d_{\beta n}+d_{0\beta}d_{n\alpha} = 0$$

folgt

$$(8.)\qquad a_{0,n-1}a_{\alpha,\beta-1}-a_{0,\beta-1}a_{\alpha,n-1} = a_{n-1,0}a_{\alpha-1,\beta}-a_{n-1,\beta}a_{\alpha-1,0}.$$

Sind allgemeiner $\alpha\beta\dots\vartheta$ irgend r der Indices $1, 2, \dots, n-1$ und ebenso $\varkappa\lambda\dots\tau$, so ist

$$(9.)\qquad \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta & \dots & \vartheta \\ n-1 & \varkappa-1 & \lambda-1 & \dots & \tau-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n-1 & \alpha-1 & \beta-1 & \dots & \vartheta-1 \\ 0 & \varkappa & \lambda & \dots & \tau \end{pmatrix}.$$

Die Gleichheit dieser beiden Unterdeterminanten $(r+1)$-ten Grades ist von *Jacobi* [a. a. O. § 12, (40.)] gefunden, seine Angabe über das Vorzeichen $\pm$ ist aber unrichtig. Nach dem Satze von *Sylvester* ist nämlich

$$\begin{aligned} & a_{0,n-1}^{r-1}\Sigma\pm a_{0,n-1}a_{\alpha,\varkappa-1}\dots a_{\vartheta,\tau-1} \\ & = \Sigma\pm(a_{0,n-1}a_{\alpha,\varkappa-1}-a_{0,\varkappa-1}a_{\alpha,n-1})\dots(a_{0,n-1}a_{\vartheta,\tau-1}-a_{0,\tau-1}a_{\vartheta,n-1}) \\ & = \Sigma\pm(a_{n-1,0}a_{\alpha-1,\varkappa}-a_{n-1,\varkappa}a_{\alpha-1,0})\dots(a_{n-1,0}a_{\vartheta-1,\tau}-a_{n-1,\tau}a_{\vartheta-1,0}) \\ = {} & a_{n-1,0}^{r-1}\Sigma\pm a_{n-1,0}a_{\alpha-1,\varkappa}\dots a_{\vartheta-1,\tau}. \end{aligned}$$

Daher gilt die Formel (9.), wenn $a_{0,n-1}$ von Null verschieden ist, und folglich

gilt sie auch für alle Werthe der Variabeln p_λ, q_λ. Z. B. ist

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \dots & n-2 \\ n-1 & 1 & 2 & \dots & n-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n-1 & 0 & 1 & \dots & n-3 \\ 0 & 2 & 3 & \dots & n-1 \end{pmatrix},$$

oder falls $A_{\alpha\beta}$ in der Determinante $A_n = \Sigma \pm a_{00} \dots a_{n-1,n-1}$ der Coefficient von $a_{\alpha\beta}$ ist, $A_{n-1,0} = A_{n-2,1}$ und ebenso allgemein $A_{\alpha,\beta-1} = A_{\alpha-1,\beta}$. Mithin bilden die Grössen $A_{\alpha\beta}$ ein recurrirendes System.

Aus der identischen Gleichung

$$d_{\alpha\lambda} d_{\varkappa\mu} + d_{\alpha\varkappa} d_{\mu\lambda} + d_{\alpha\mu} d_{\lambda\varkappa} = 0$$

folgt nach (4.)

$$(10.)\quad \begin{cases} \begin{pmatrix} \alpha & \varkappa \\ \lambda-1 & \mu-1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha-1 & \varkappa-1 \\ \lambda & \mu \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha & \mu \\ \varkappa-1 & \lambda-1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha-1 & \mu-1 \\ \varkappa & \lambda \end{pmatrix} \\ \qquad + \begin{pmatrix} \alpha & \lambda \\ \mu-1 & \varkappa-1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha-1 & \lambda-1 \\ \mu & \varkappa \end{pmatrix} = 0. \end{cases}$$

Denn jene Gleichung kann man schreiben

$$\Sigma[\varkappa\lambda\mu] d_{\alpha\lambda} d_{\varkappa\mu} = 0;$$

die Summe erstreckt sich über alle Permutationen der Indices $\varkappa$, λ, μ, das Zeichen $[\varkappa\lambda\mu]$ ist für eine bestimmte Permutation gleich 1 und für jede andere gleich $+1$ oder -1, je nachdem sie aus jener durch eine gerade oder ungerade Substitution hervorgeht. Daher ist

$$\Sigma[\varkappa\lambda\mu](a_{\alpha,\lambda-1} - a_{\alpha-1,\lambda})(a_{\varkappa,\mu-1} - a_{\varkappa-1,\mu}) = 0.$$

Nun ist aber $\Sigma[\varkappa\lambda\mu] a_{\alpha,\lambda-1} a_{\varkappa,\mu-1} = \Sigma - [\varkappa\lambda\mu] a_{\alpha,\lambda-1} a_{\varkappa-1,\mu}$, weil die erste Summe ihrer Bedeutung nach bei Vertauschung von $\varkappa$ und μ ungeändert bleibt. Mithin ergiebt sich die Gleichung

$$\Sigma[\varkappa\lambda\mu](a_{\alpha,\lambda-1} a_{\varkappa,\mu-1} + a_{\alpha-1,\lambda} a_{\varkappa-1,\mu}) = 0,$$

die mit der Formel (11.) übereinstimmt. Seien allgemeiner $\alpha\beta \dots \vartheta\varkappa$ irgend r (>1) der Indices 0, 1, ..., $n-1$ und ebenso $\lambda\mu \dots \sigma\tau$. Setzt man dann zur Abkürzung

$$\left(\begin{pmatrix} \alpha & \beta & \dots & \vartheta & \varkappa \\ \lambda & \mu & \dots & \sigma & \tau \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \dots & \vartheta & \varkappa \\ \lambda-1 & \mu-1 & \dots & \sigma-1 & \tau-1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha-1 & \beta-1 & \dots & \vartheta-1 & \varkappa-1 \\ \lambda & \mu & \dots & \sigma & \tau \end{pmatrix},$$

so besteht die Relation

$$(11.)\quad \left(\begin{pmatrix} \alpha & \beta & \dots & \vartheta & \varkappa \\ \lambda & \mu & \dots & \sigma & \tau \end{pmatrix}\right) = \left(\begin{pmatrix} \alpha & \beta & \dots & \vartheta & \lambda \\ \varkappa & \mu & \dots & \sigma & \tau \end{pmatrix}\right) + \left(\begin{pmatrix} \alpha & \beta & \dots & \vartheta & \mu \\ \lambda & \varkappa & \dots & \sigma & \tau \end{pmatrix}\right) + \dots + \left(\begin{pmatrix} \alpha & \beta & \dots & \vartheta & \tau \\ \lambda & \mu & \dots & \sigma & \varkappa \end{pmatrix}\right).$$

Man kann dieselbe so schreiben •

$$\Sigma[\varkappa\lambda\mu\ldots\sigma\tau](a_{\alpha,\lambda-1}a_{\beta,\mu-1}\ldots a_{\vartheta,\sigma-1}a_{\varkappa,\tau-1}+a_{\alpha-1,\lambda}a_{\beta-1,\mu}\ldots a_{\vartheta-1,\sigma}a_{\varkappa-1,\tau}) = 0.$$

Da diese Formel für $r=2$ schon bewiesen ist, will ich voraussetzen, sie sei für Determinanten $(r-1)$-ten Grades richtig. Dann ist

$$\Sigma[\varkappa\lambda\mu\ldots\sigma\tau](a_{\beta,\mu-1}\ldots a_{\vartheta,\sigma-1}a_{\varkappa,\tau-1}+a_{\beta-1,\mu}\ldots a_{\vartheta-1,\sigma}a_{\varkappa-1,\tau}) = 0,$$

falls man nur $\varkappa, \mu, \ldots, \sigma, \tau$ permutirt (nicht λ). Multiplicirt man mit $a_{\alpha,\lambda-1}$, vertauscht dann auch λ mit den übrigen Indices und addirt die so erhaltenen Gleichungen, so ergiebt sich, falls man in der zweiten Summe $\varkappa$ und τ vertauscht,

$$\Sigma[\varkappa\lambda\mu\ldots\sigma\tau](a_{\alpha,\lambda-1}a_{\beta,\mu-1}\ldots a_{\vartheta,\sigma-1}a_{\varkappa,\tau-1}-a_{\alpha,\lambda-1}a_{\beta-1,\mu}\ldots a_{\vartheta-1,\sigma}a_{\varkappa,\tau-1}) = 0.$$

Nun ist aber nach (11.)

$$\Sigma[\varkappa\lambda\mu\ldots\sigma\tau](a_{\alpha,\lambda-1}a_{\varkappa,\tau-1}+a_{\alpha-1,\lambda}a_{\varkappa-1,\tau}) = 0,$$

falls man nur $\varkappa, \lambda, \tau$ vertauscht. Multiplicirt man mit $a_{\beta-1,\mu}\ldots a_{\vartheta-1,\sigma}$ und vertauscht dann die Indices $\mu, \ldots, \sigma$ mit einander und mit $\varkappa, \lambda, \tau$ und summirt, so ergiebt sich

$$\Sigma[\varkappa\lambda\mu\ldots\sigma\tau](a_{\alpha,\lambda-1}a_{\beta-1,\mu}\ldots a_{\vartheta-1,\sigma}a_{\varkappa,\tau-1}+a_{\alpha-1,\lambda}a_{\beta-1,\mu}\ldots a_{\vartheta-1,\sigma}a_{\varkappa-1,\tau}) = 0,$$

und durch Addition der beiden entwickelten Gleichungen die zu beweisende Relation.

Dieselbe ist ganz ähnlich gebaut, wie die von *Kronecker* entdeckte lineare Relation

$$(12.)\quad \begin{pmatrix}\alpha\,\beta\ldots\vartheta\,\varkappa\\ \lambda\,\mu\ldots\sigma\,\tau\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha\,\beta\ldots\vartheta\,\lambda\\ \varkappa\,\mu\ldots\sigma\,\tau\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\alpha\,\beta\ldots\vartheta\,\mu\\ \lambda\,\varkappa\ldots\sigma\,\tau\end{pmatrix}+\cdots+\begin{pmatrix}\alpha\,\beta\ldots\vartheta\,\tau\\ \lambda\,\mu\ldots\sigma\,\varkappa\end{pmatrix}$$

zwischen den Subdeterminanten eines beliebigen symmetrischen Systems $a_{\alpha\beta}$. Schreibt man diese in der Form

$$\Sigma[\varkappa\lambda\mu\ldots\sigma\tau]a_{\alpha\lambda}a_{\beta\mu}\ldots a_{\vartheta\sigma}a_{\varkappa\tau} = 0,$$

so erkennt man unmittelbar, dass sich je zwei Glieder aufheben, die durch Vertauschung von $\varkappa$ und τ aus einander hervorgehen.

Speciell ist

$$\left(\!\!\begin{pmatrix}1\ldots\varrho-1\;0\;\alpha+1\\ 1\quad\varrho-1\;\varrho\;\beta+1\end{pmatrix}\!\!\right)-\left(\!\!\begin{pmatrix}1\ldots\varrho-1\;0\;\beta+1\\ 1\quad\varrho-1\;\varrho\;\alpha+1\end{pmatrix}\!\!\right)-\left(\!\!\begin{pmatrix}1\ldots\varrho-1\quad0\quad\varrho\\ 1\ldots\varrho-1\;\alpha+1\;\beta+1\end{pmatrix}\!\!\right) = 0$$

oder

$$\begin{pmatrix}0\ldots\varrho-1\;\alpha+1\\ 0\quad\varrho-1\quad\beta\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\ldots\varrho-1\;\beta+1\\ 0\ldots\varrho-1\quad\alpha\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\ldots\varrho-2\;\varrho-1\;\varrho\\ 0\ldots\varrho-2\quad\alpha\quad\beta\end{pmatrix},$$

also

$$(13.)\quad \left\{\begin{aligned}
&\begin{vmatrix} a_{00} & \dots & a_{0,\varrho-1} & a_{0\beta} \\ \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ a_{\varrho-1,0} & \dots & a_{\varrho-1,\varrho-1} & a_{\varrho-1,\beta} \\ a_{\alpha+1,0} & \dots & a_{\alpha+1,\varrho-1} & a_{\alpha+1,\beta} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{00} & \dots & a_{0,\varrho-1} & a_{0,\beta+1} \\ \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ a_{\varrho-1,0} & \dots & a_{\varrho-1,\varrho-1} & a_{\varrho-1,\beta+1} \\ a_{\alpha 0} & \dots & a_{\alpha,\varrho-1} & a_{\alpha,\beta+1} \end{vmatrix} \\
&\qquad = \begin{vmatrix} a_{00} & \dots & a_{0,\varrho-2} & a_{0\alpha} & a_{0\beta} \\ \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{\varrho-1,0} & \dots & a_{\varrho-1,\varrho-2} & a_{\varrho-1,\alpha} & a_{\varrho-1,\beta} \\ a_{\varrho 0} & \dots & a_{\varrho,\varrho-2} & a_{\varrho\alpha} & a_{\varrho\beta} \end{vmatrix}.
\end{aligned}\right.$$

Setzt man

$$(14.)\qquad A_\varrho = \Sigma \pm a_{00} \dots a_{\varrho-1,\varrho-1}$$

und

$$(15.)\qquad B_{\alpha\beta} = \Sigma \pm a_{00} \dots a_{\varrho-1,\varrho-1} a_{\varrho+\alpha,\varrho+\beta},$$

so ergiebt sich aus dieser Gleichung, wie in § 6 und § 7 der Satz:

Ist A_ϱ von Null verschieden und verschwinden

$$B_{00},\quad B_{01},\quad \dots,\quad B_{0,\sigma-2},$$

so verschwinden auch $A_{\varrho+1}, A_{\varrho+2}, \dots, A_{\varrho+\sigma-1}$, und umgekehrt; die Grössen

$$(16.)\qquad B_{\alpha\beta} = B_{\alpha+\beta} \qquad (\alpha, \beta = 0, 1, \dots, \sigma-1)$$

bilden dann ein recurrirendes System, und wenn man

$$(17.)\qquad A_{\varrho,\varrho+\sigma} = B_{\sigma-1} = B_{0,\sigma-1} = B_{1,\sigma-2} = \dots = B_{\sigma-1,0}$$

setzt, so ist

$$(18.)\qquad A_\varrho^{\sigma-1} A_{\varrho+\sigma} = (-1)^{\frac{1}{2}\sigma(\sigma-1)} A^\sigma_{\varrho,\varrho+\sigma}.$$

Der Beweis passt aber nicht auf den Fall $\varrho = 0$, wo $A_0 = 1$ und $B_{\alpha\beta} = a_{\alpha\beta}$ ist. Wenn die Grössen $a_{00}, a_{01}, \dots, a_{0,\sigma-2}$ verschwinden, so kann man nur dann mit Sicherheit behaupten, dass auch $A_1, A_2, \dots, A_{\sigma-1}$ verschwinden und dass die Grössen

$$a_{\alpha\beta} \qquad (\alpha, \beta = 0, 1, \dots, \sigma-1)$$

ein recurrirendes System bilden, wenn p_0 und q_0 nicht beide Null sind. Denn unter dieser Voraussetzung folgt aus

$$a_{0,\alpha-1} = p_0 q_\alpha - q_0 p_\alpha = 0, \quad a_{0,\beta-1} = p_0 q_\beta - q_0 p_\beta = 0, \qquad (\alpha, \beta = 0, 1, \dots, \sigma-1)$$

dass auch $p_\alpha q_\beta - p_\beta q_\alpha = 0$ ist, also $a_{\alpha,\beta-1} = a_{\alpha-1,\beta}$.

Angenommen $A_n, A_{n-1}, \ldots, A_{\varrho+1}$ verschwinden und ϱ ist der grösste Werth, für den A_ϱ von Null verschieden ist. Dann bilden die Grössen

$$B_{\alpha\beta} = B_{\alpha+\beta}, \qquad (\alpha, \beta = 0, 1, \ldots, n-\varrho-1)$$

ein recurrirendes System, in dem $B_0, B_1, \ldots, B_{n-\varrho-1}$ verschwinden. Dies folgt daraus, dass alle Determinanten $(\varrho+1)$-ten Grades auf der rechten Seite der Gleichung (13.) Null sind. Nun gilt aber diese Gleichung auch für $\beta = n-1$ [und ist dann identisch mit der Gleichung (9.)]. Da für diesen Fall die zweite Determinante links identisch verschwindet, weil $a_{\varkappa n} = 0$ ist, so zeigt sie, dass auch $B_{\alpha, n-\varrho-1} = B_{n-\varrho-1, \alpha} = 0$ ist, also die Determinanten $B_{\alpha\beta}$ sämmtlich verschwinden. Da A_ϱ von Null verschieden ist, so verschwinden folglich nach dem Satze von *Kronecker* alle Determinanten $(\varrho+1)$-ten Grades des Systems $a_{\alpha\beta}$, und mithin ist sein Rang $r = \varrho$.

Der Rang r der Form (1.) *ist der grösste Werth ϱ, für den A_ϱ von Null verschieden ist, ausgenommen wenn $p_0 = q_0 = 0$ ist.*

In diesem Falle ist nämlich $a_{00} = a_{01} = \cdots a_{0,n-1} = 0$, und mithin $A_1 = A_2 = \cdots = A_n = 0$, während der Rang $r = 0, 1, \ldots$ oder $n-1$ sein kann.

Aus den entwickelten Sätzen ergeben sich nun für die Signatur s der Form (1.) genau dieselben Formeln, die wir in § 7 für die Signatur einer recurrirenden Form gefunden haben.

§ 13.

Die erhaltenen Resultate wende ich auf eine quadratische Form

$$(1.) \qquad \Sigma f_{\alpha\beta} u_\alpha u_\beta$$

an, deren Coefficienten $f_{\alpha\beta}$ Functionen einer Variablen x sind, aber denselben Bedingungen genügen, wie die Coefficienten der Form (1.) § 12. Indem ich die Bezeichnungen jenes Paragraphen beibehalte, setze ich

$$(2.) \qquad \sum_\beta{}_0^{n-1} a_{\alpha\beta} x^{n-1-\beta} = x_\alpha,$$

also $x_n = 0$ und

$$(3.) \qquad \frac{F(x)G(u)-F(u)G(x)}{x-u} = G(x, u) = \sum_\alpha{}_0^{n-1} x_\alpha u^{n-1-\alpha},$$

und, indem ich in der Gleichung (3.) § 12 die Functionen $F(u)$ und $G(u)$ durch $\frac{F(u)}{F(x)}$ und $G(x, u)$ ersetze,

$$(4.)\quad \begin{cases} \dfrac{F(u)G(x,v)-F(v)G(x,u)}{F(x)(u-v)} = \sum_{\alpha,\beta}^{n-1}{}_0 f_{\alpha\beta}u^{n-1-\alpha}v^{n-1-\beta} \\ = \dfrac{F(u)F(v)}{(u-v)(x-u)(x-v)}\left((u-v)\dfrac{G(x)}{F(x)}+(v-x)\dfrac{G(u)}{F(u)}+(x-u)\dfrac{G(v)}{F(v)}\right). \end{cases}$$

Aus der identischen Gleichung

$$F(x)(F(u)G(v)-F(v)G(u))+F(u)(F(v)G(x)-F(x)G(v))+F(v)(F(x)G(u)-F(u)G(x)) = 0$$

ergiebt sich

$$F(x)(u-v)G(u,v)+F(u)(v-x)G(v,x)+F(v)(x-u)G(x,u) = 0$$

oder

$$(F(u)G(x,v)-F(v)G(x,u))(v-x) = (-F(x)G(u,v)+F(v)G(x,u))(u-v),$$

also

$$(v-x)\frac{F(u)G(x,v)-F(v)G(x,u)}{F(x)(u-v)} = -G(u,v)+G(x,u)\frac{F(v)}{F(x)}$$

und folglich

$$(v-x)\Sigma f_{\alpha\beta}u^{n-1-\alpha}v^{n-1-\beta} = -\Sigma a_{\alpha\beta}u^{n-1-\alpha}v^{n-1-\beta}+F^{-1}(\Sigma x_\alpha u^{n-1-\alpha})(\Sigma p_\beta v^{n-\beta}).$$

Durch Coefficientenvergleichung erhält man daraus

$$(5.)\qquad f_{\alpha\beta}-xf_{\alpha,\beta-1} = -a_{\alpha,\beta-1}+p_\beta x_\alpha F^{-1},\quad f_{\alpha 0} = p_0 x_\alpha F^{-1}.$$

Ich nehme nun an, dass p_0 von Null verschieden ist, und setze

$$(6.)\qquad p_0F_\varrho = F\Sigma\pm f_{00}\dots f_{\varrho\varrho},\quad p_0F_{-1} = F,\quad F_0 = p_0G-q_0F.$$

Die Determinante ist gleich

$$F\begin{vmatrix} f_{00} & f_{01}-xf_{00} & \dots & f_{0\varrho}-xf_{0,\varrho-1} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ f_{\varrho 0} & f_{\varrho 1}-xf_{\varrho 0} & \dots & f_{\varrho\varrho}-xf_{\varrho,\varrho-1} \end{vmatrix} = p_0\begin{vmatrix} x_0 & -a_{00}+p_1x_0F^{-1} & \cdots & -a_{0,\varrho-1}+p_\varrho x_0F^{-1} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ x_\varrho & -a_{\varrho 0}+p_1x_\varrho F^{-1} & \cdots & -a_{\varrho,\varrho-1}+p_\varrho x_\varrho F^{-1} \end{vmatrix}$$

und mithin ist

$$(7.)\qquad F_\varrho = \begin{vmatrix} a_{00} & \dots & a_{0,\varrho-1} & x_0 \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ a_{\varrho 0} & \dots & a_{\varrho,\varrho-1} & x_\varrho \end{vmatrix}.$$

Setzt man hier für x_α seinen Ausdruck (2.) ein, so verschwinden die Coefficienten von $x^{n-1}, \dots, x^{n-\varrho}$, und demnach ist $F_{\varrho-1}$ eine ganze Function $(n-\varrho)$-ten Grades, in welcher der Coefficient von $x^{n-\varrho}$ gleich A_ϱ ist.

Ist ferner

$$(8.)\qquad G_\lambda = \begin{vmatrix} a_{00} & \dots a_{0,\varrho-1} & x_0 \\ . & \dots . & . \\ a_{\varrho-1,0} & \dots a_{\varrho-1,\varrho-1} & x_{\varrho-1} \\ a_{\varrho+\lambda,0} & \dots a_{\varrho+\lambda,\varrho-1} & x_{\varrho+\lambda} \end{vmatrix},$$

also $G_0 = F_\varrho$, so ergiebt sich aus dem Satze von *Sylvester*

$$(9.)\qquad A_\varrho^\lambda F_{\varrho+\lambda} = \begin{vmatrix} B_{00} \dots B_{0,\lambda-1} & G_0 \\ . \quad \dots \quad . & . \\ B_{\lambda 0} \dots B_{\lambda,\lambda-1} & G_\lambda \end{vmatrix}.$$

Ist nun $A_{\varrho+1} = \dots = A_{\varrho+\sigma-1} = 0$, also $B_{00} = \dots = B_{0,\sigma-2} = 0$, so ist auch $F_{\varrho+1} = \dots = F_{\varrho+\sigma-2} = 0$, aber

$$A_\varrho^{\sigma-1} F_{\varrho+\sigma-1} = (-1)^{\frac{1}{2}\sigma(\sigma-1)} A_{\varrho,\varrho+\sigma} F_\varrho$$

oder nach (14.) § 8

$$(10.)\qquad A_{\varrho,\varrho+\sigma} F_{\varrho+\sigma-1} = A_{\varrho+\sigma} F_\varrho.$$

Sind A_ϱ und $A_{\varrho+\sigma}$ von Null verschieden, so ist demnach F_ϱ eine ganze Function vom Grade $n-\varrho-\sigma$, in welcher der Coefficient von $x^{n-\varrho-\sigma}$ gleich $A_{\varrho,\varrho+\sigma}$ ist. Ist A_ϱ von Null verschieden, so verschwindet weder $F_{\varrho-1}$ noch F_ϱ identisch, ausser wenn ϱ gleich dem Range r der Form (1.) § 12 ist. Die Function F_r verschwindet identisch, weil ihre Coefficienten Determinanten $(r+1)$-ten Grades des Systems $a_{\alpha\beta}$ sind.

Ersetzt man in der Gleichung (13.) § 12 α durch $\varrho+\lambda-1$, multiplicirt sie mit $x^{n-\beta-1}$ und summirt dann nach β von -1 bis $n-1$, so erhält man

$$(11.)\qquad G_\lambda - xG_{\lambda-1} = \begin{vmatrix} a_{00} \dots a_{0,\varrho-2} & a_{0,\varrho+\lambda-1} & x_0 \\ . \quad \dots \quad . & . & . \\ a_{\varrho 0} \dots a_{\varrho,\varrho-2} & a_{\varrho,\varrho+\lambda-1} & x_\varrho \end{vmatrix}.$$

Wendet man ferner auf das System

$$\begin{matrix} a_{00} & \dots a_{0,\varrho-2} & a_{0,\varrho-1} & a_{0,\varrho+\lambda-1} & x_0 & 0 \\ . & \dots . & . & . & . & . \\ a_{\varrho-1,0} & a_{\varrho-1,\varrho-2} & a_{\varrho-1,\varrho-1} & a_{\varrho-1,\varrho+\lambda-1} & x_{\varrho-1} & 0 \\ a_{\varrho 0} & a_{\varrho,\varrho-2} & a_{\varrho,\varrho-1} & a_{\varrho,\varrho+\lambda-1} & x_\varrho & 1 \end{matrix}$$

von $\varrho+1$ Zeilen und $\varrho+3$ Spalten die Relation (2.) § 10 an, so ergiebt sich

$$(12.)\qquad A_\varrho(G_\lambda - xG_{\lambda-1}) = C_\lambda F_\varrho - B_{0,\lambda-1} F_{\varrho-1},$$



wo

$$(13.)\qquad C_\lambda = \begin{vmatrix} a_{00} & \dots a_{0,\varrho-2} & a_{0,\varrho+\lambda-1} \\ \cdot & \dots\cdot & \cdot \\ a_{\varrho-1,0} & \dots a_{\varrho-1,\varrho-2} & a_{\varrho-1,\varrho+\lambda-1} \end{vmatrix}$$

ist. Aus diesen Relationen folgt, wie in § 10:

$$(14.)\qquad A_\varrho^2 F_{\varrho+\sigma} = Q_{\varrho+\sigma,\varrho} F_\varrho - A_{\varrho,\varrho+\sigma} A_{\varrho+\sigma} F_{\varrho-1}.$$

Wenn man also die Function $F_{\varrho-1}$ vom Grade $n-\varrho$ durch die Function F_ϱ vom Grade $n-\varrho-\sigma$ dividirt, so ist der Rest gleich $F_{\varrho+\sigma}$ und der Quotient die Function $Q_{\varrho+\sigma,\varrho}$ vom Grade σ, die sich, wie in § 10 (9.) und (10.) als Determinante darstellen lässt.

Die obige Deduction lässt sich mit geringer Modification auch auf den Fall $\varrho = 0$ anwenden. Ist α der kleinste Werth > 0, für den A_α von Null verschieden ist, so verschwinden $a_{00}, \dots, a_{0,\alpha-2}$, während

$$a_{0,\alpha-1} = a_{1,\alpha-2} = \dots = a_{\alpha-1,0} = A_{0\alpha}$$

von Null verschieden ist, und die Grössen

$$a_{\varkappa\lambda} \qquad (\varkappa, \lambda = 0, 1, \dots, \alpha-1)$$

bilden ein recurrirendes System, dessen Determinante

$$(15.)\qquad A_\alpha = (-1)^{\frac{1}{2}\alpha(\alpha-1)} A_{0\alpha}^\alpha$$

ist. Daher verschwinden $F_1, \dots, F_{\alpha-2}$, während

$$(16.)\qquad A_{0\alpha} F_{\alpha-1} = A_\alpha F_0$$

ist. Endlich ist

$$F_\alpha = \begin{vmatrix} a_{00} & \dots a_{0,\alpha-1} & x_0 \\ a_{10}-xa_{00} & \dots a_{1,\alpha-1}-xa_{0,\alpha-1} & x_1-xx_0 \\ \cdot & \dots\cdot & \cdot \\ a_{\alpha 0}-xa_{\alpha-1,0} & \dots a_{\alpha,\alpha-1}-xa_{\alpha-1,\alpha-1} & x_\alpha-xx_{\alpha-1} \end{vmatrix}.$$

Multiplicirt man die Gleichung (3.) mit $x-u$, so erhält man durch Vergleichung der Coefficienten von $u^{n-\alpha}$

$$(17.)\qquad x_\alpha - xx_{\alpha-1} = p_\alpha G - q_\alpha F$$

und folglich nach (5.) § 12 und (6.)

$$p_0(x_\alpha - xx_{\alpha-1}) = p_\alpha F_0 - a_{\alpha-1,0} F.$$

Demnach ergiebt sich

$$(18.)\qquad F_\alpha = Q_{\alpha 0} F_0 - A_\alpha A_{0\alpha} F_{-1},$$

wo

$$(19.)\qquad p_0 Q_{\alpha 0} = \begin{vmatrix} a_{00} \dots a_{0,\alpha-1} & p_0 \\ a_{10} \dots a_{1,\alpha-1} & p_1 + p_0 x \\ \cdot \quad \dots \quad \cdot & \cdot \\ a_{\alpha 0} \dots a_{\alpha,\alpha-1} & p_\alpha + p_{\alpha-1} x + \dots + p_0 x^\alpha \end{vmatrix}$$

ist.

Sind in der Reihe der Determinanten A_ϱ

$$(20.)\qquad A_0 \; A_\alpha \; A_\beta \; \dots \; A_\varkappa \; A_\lambda \; A_\mu \; \dots \; A_\sigma \; A_\tau \; A_r \qquad (0 < \alpha < \beta \dots < \tau < r)$$

von Null verschieden, so ist

$$(21.)\qquad A_\lambda^2 F_\mu - Q_{\mu\lambda} F_\lambda + \frac{A_\lambda A_\mu A_{\lambda\mu}}{A_{\varkappa\lambda}} F_\varkappa = 0,$$

und wenn man $\varkappa$, λ, μ durch σ, τ, r ersetzt,

$$(22.)\qquad Q_{r,\tau} F_\tau = \frac{A_\tau A_r A_{\tau r}}{A_{\sigma\tau}} F_\sigma.$$

Aus den Gleichungen (18.), (21.) und (22.) folgt, dass die Function F_τ oder F_{r-1} vom Grade $n-r$ der grösste gemeinsame Divisor von F_{-1} und F_0 oder nach (6.) von F und G ist. Dividirt man jede der Functionen

$$(23.)\qquad F_{-1} \; F_0 \; F_\alpha \; F_\beta \; \dots \; F_\varkappa \; F_\lambda \; F_\mu \; \dots \; F_\sigma \; F_\tau$$

durch F_τ, so werden je zwei auf einander folgende theilerfremd und die letzte eine Constante.

Nun seien x und x' zwei bestimmte Werthe, für die F, also auch F_τ, von Null verschieden ist. Ist dann s die Signatur der Form (1.) für den Werth x und s' für x', so ergiebt sich, wie in § 9 und § 10, die Relation

$$(24.)\qquad \Delta s = \Delta \Sigma_0^{n-1} \operatorname{sign}(F_{\lambda-1} F_\lambda) = \Delta \Sigma \operatorname{sign}(A_\lambda A_{\varkappa\lambda} F_\varkappa F_\lambda).$$

Die erste Summe kann über alle Werthe von λ von 0 bis $n-1$ erstreckt werden oder auch nur über die Werthe $0, \alpha, \dots, \sigma, \tau$.

Mit Hülfe der Gleichung

$$(25.)\qquad A_\lambda^2 F_{\mu-1} F_\mu - Q_{\mu\lambda} F_\lambda F_{\mu-1} + A_\mu^2 F_{\lambda-1} F_\lambda = 0$$

kann man nun, wie in § 10, den Werth des Ausdruckes

$$\Delta s = \Delta \Sigma \operatorname{sign}\left(\frac{F_{\lambda-1}}{F_\tau} \frac{F_\lambda}{F_\tau}\right)$$

berechnen. Man lege einer reellen Wurzel der Gleichung $\frac{F_{-1}}{F_\tau} = 0$ die Charakteristik $\chi = +1$, -1 oder 0 bei, je nachdem, wenn die Variable x

wachsend durch sie hindurchgeht, $\frac{F_{-1}}{F_\tau} : \frac{F_0}{F_\tau}$ vom negativen zum positiven übergeht, oder vom positiven zum negativen, oder das Vorzeichen nicht wechselt, und bezeichne die Summe der Charakteristiken der zwischen x und x' ($> x$) liegenden Wurzeln mit

$$\Sigma_x^{x'} \chi\left(\frac{F_{-1}}{F_\tau}, \frac{F_{-1}}{F_0}\right) = \tfrac{1}{2}\Delta s.$$

Jene drei Fälle treten für die Wurzel a ein, je nachdem die Entwickelung von

$$\frac{F_{-1}}{F_0} = \frac{F}{p_0(p_0 G - q_0 F)}$$

nach Potenzen von $x-a$ mit einer ungeraden Potenz von $x-a$ anfängt, die einen positiven Coefficienten hat, oder mit einer solchen, die einen negativen Coefficienten hat, oder mit einer geraden Potenz. Da $\frac{F_{-1}}{F_\tau}$ und $\frac{F_0}{F_\tau}$ theilerfremd sind, so sind die Wurzeln der Gleichung $\frac{F_{-1}}{F_\tau} = 0$ identisch mit denen von $\frac{F_{-1}}{F_0} = 0$ oder von $\frac{F}{G} = 0$. Aus diesen Bemerkungen ergiebt sich die Gleichung

$$\tfrac{1}{2}\Delta s = \Sigma_x^{x'} \chi\left(\frac{F}{G}, \frac{F}{G}\right). \tag{26.}$$

Die Berechnung der Summe

$$\Sigma \operatorname{sign}(A_\lambda A_{\varkappa\lambda} F_\varkappa F_\lambda)$$

lässt sich noch mittelst der Formeln (19.) § 8 etwas vereinfachen.

Sind unter den Differenzen der Indices $\varkappa\lambda\mu\ldots\xi\eta$ der Reihe (20.) $\eta-\xi, \ldots, \mu-\lambda$ gerade und $\lambda-\varkappa$ ungerade, so folgt aus jenen Formeln

$$\operatorname{sign}(A_\eta) = (-1)^{\frac{1}{2}(\eta-\varkappa-1)} \operatorname{sign}(A_{\varkappa\lambda}). \tag{27.}$$

Um also Δs zu berechnen, hat man nur die Vorzeichen der Werthe zu bestimmen, welche die Functionen (23.) für die beiden Werthe x und x' annehmen, und ausserdem noch, wenn $\lambda-\varkappa$ gerade oder wenn gleichzeitig $\lambda-\varkappa$ ungerade und $\mu-\lambda$ gerade ist, das Vorzeichen des Coefficienten $A_{\varkappa\lambda}$ der höchsten Potenz $x^{n-\lambda}$ in der Function $F_\varkappa$.

Remarques sur une note de M. *Paul Vernier*.

(Par M. *L. Fuchs.*)

Dans le Bulletin de la société mathématique de France T. XXII No. 8 p. 133 M. *Paul Vernier* vient de publier une note intitulée: „sur les formes binaires dont les variables sont des intégrales fondamentales d'une équation différentielle linéaire du second ordre".

M. *Vernier* veut indiquer une démonstration du théorème suivant:

(α) Si une forme binaire dont les deux variables sont deux intégrales fondamentales de l'équation $\frac{d^2y}{dx^2} = Py$ est égale à une racine d'une fonction rationelle de x, elle renferme, à une même puissance, tous les facteurs linéaires, qui forment un système réduit de racines pour l'équation irréductible vérifiée par l'un de ses facteurs linéaires.

Dans mon mémoire t. 81 de ce journal p. 114—115 on peut lire les deux théorèmes suivants:

I. Inversement $F(y_1, y_2)$ étant la racine d'une fonction rationelle et $\eta = A_{01}y_1 + A_{02}y_2$ l'un des facteurs de la forme, et $\eta, \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{n-1}$ formant un système réduit de racines de l'équation irréductible vérifiée par η, alors η_i a la forme $\eta_i = A_{i1}y_1 + A_{i2}y_2$, et la forme $F(y_1, y_2)$ renferme aussi les facteurs $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{n-1}$.

VI. Si une forme $f(y_1, y_2)$ est la racine d'une fonction rationelle, elle renferme tous les facteurs qui forment ensemble le système réduit d'une équation irréductible, à une même puissance.

L'on voit donc que le théorème (α) n'est qu'une composition des théorèmes I et VI.

Mais cette composition étant presque littérale et renfermant, en particulier, la terminologie que j'ai introduite dans mon mémoire cité, je ne peux pas supposer que M. *Vernier* ait eu l'intention de faire croire que le

théorème (α) était un théorème nouveau, je suppose plutôt que M. *Vernier* a oublié d'indiquer l'origine de ce théorème.

Mais aussi dans la démonstration du théorème (α) contenue p. 135 du Bulletin, M. *Vernier* a simplement reproduit la démonstration des théorèmes I. et VI. que j'ai donnée p. 114—115 de mon mémoire cité.

J'ajoute les remarques suivantes:

M. *Vernier* développe p. 133—134 du Bulletin un lemme, dont il tire la conséquence que f étant racine d'une fonction rationelle, $H(f)$, le hessien de la forme f, est aussi racine d'une fonction rationelle. Mais pour tirer cette conséquence, il ne faut pas partir d'une expression explicite du hessien, car le hessien étant un covariant de f, ce théorème n'est qu'un cas spécial du théorème p. 106 Th. III de mon mémoire cité dont voici la teneur:

Soit y_1, y_2 un système fondamental d'intégrales de l'équation (B) $\left(\frac{d^2y}{dx^2} = Py\right)$, tous les covariants d'une forme qui est égale à la racine d'une fonction rationelle, sont aussi des racines de fonctions rationelles.

Mais enfin on ne saurait du tout comprendre, pourquoi M. *Vernier* fait intervenir ledit lemme. Il aurait pu omettre tout le contenu des pages 133 et 134 du Bulletin qui suit les mots: „j'indiquerai ici une démonstration très simple de ce théorème", comme il n'en fait aucun usage dans la démonstration du théorème (α) page 135 du Bulletin, qu'il a empruntée complètement aux pages 114—115 de mon mémoire cité.

Mais je voudrais bien savoir quel est le but de la note de M. *Vernier,* puisqu'il emprunte à mon mémoire un théorème, de même que sa démonstration, sans indiquer la source dans laquelle il les a puisés?

Berlin, novembre 1894.

Ueber indefinite ternäre quadratische Formen.

(Von Herrn *A. Meyer* in Zürich.)

(Fortsetzung der Arbeit Bd. 113 dieses Journals S. 186—206.)

§ 3.

Untersuchung der Aequivalenz von Formen, deren Invarianten $\Omega\Theta$, $\Delta\Theta$ keine kubischen Theiler, jedoch einen grössten gemeinschaftlichen Theiler Θ haben, welcher zu $\Omega\Delta$ relativ prim ist.

8. Sind Ω_2^2, Δ_2^2, Θ_2^2 die grössten in Ω, Δ, Θ aufgehenden Quadrate, $\Omega = \Omega_1\Omega_2^2$, $\Delta = \Delta_1\Delta_2^2$, $\Theta = \Theta_1\Theta_2^2$, so hat unter den gemachten Voraussetzungen das Product $\Omega_1\Omega_2\Delta_1\Delta_2\Theta_1\Theta_2$ keinen quadratischen Theiler und man kann nach Art. 1 jede Form der Invarianten $\Omega\Theta$, $\Delta\Theta$ aus einer Form der theilerfremden Invarianten $\Omega\Theta_2^2$, $\Delta\Theta_1$ durch eine Substitution der Determinante $\Theta_1\Theta_2$ ableiten. Bildet man also ein vollständiges System nicht äquivalenter Formen f der Invarianten $\Omega\Theta_2^2$, $\Delta\Theta_1$ und wendet auf jede derselben alle reducirten Substitutionen

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ \alpha' & \beta' & 0 \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' \end{pmatrix}, \quad \alpha\beta'\gamma'' = \Theta_1\Theta_2, \quad 0 \leqq \alpha' < \beta', \quad 0 \leqq \alpha'' < \gamma'', \quad 0 \leqq \beta'' < \gamma''$$

an, so erhält man, nebst anderen, alle Formenklassen (jede im allgemeinen mehrmals) der Invarianten $\Omega\Theta$, $\Delta\Theta$. Um aus den erhaltenen Formen die zu diesen Invarianten gehörigen auszuwählen, nehme ich an, die Stammform $f = \begin{pmatrix} a, & a', & a'' \\ b, & b', & b'' \end{pmatrix}$ sei eine Hauptrepräsentante (nach Herrn *Minkowski*) ihrer Klasse, es sei also in Bezug auf jeden Primfactor von $\Omega\Delta\Theta$:

(1.) $\quad |a| = 0, \quad |a'| = |\Omega\Theta_2^2|, \quad |a''| = |\Omega\Delta\Theta|; \quad |b|, \quad |b'|, \quad |b''|$ alle $> |\Omega\Delta\Theta|$.

Dann ergeben sich wie in Art. 2 aus den Transformationsgleichungen folgende Bedingungen:

(a.) $\qquad \alpha\beta' \equiv 0 \pmod{\Theta_1}, \quad \alpha$ prim zu Θ_2,

so dass man setzen kann

$$\alpha = \Theta_{11}, \quad \beta' = \Theta_{12}\Theta_{21}, \quad \gamma'' = \Theta_{22},$$

wo $\Theta_1 = \Theta_{11}\Theta_{12}$, $\Theta_2 = \Theta_{21}\Theta_{22}$ und Θ_{11}, Θ_{12}, Θ_{21}, Θ_{22} (zu je zwei) relativ prim;

(b.) $\quad a\alpha^2 + a'\alpha'^2$ prim zu Θ_{12}, $\quad \Theta_2^{-2}(a'\beta'^2 + a''\beta''^2)$ prim zu Θ_{22}.

Die Bedingungen (a.) und (b.) sind nothwendig und hinreichend, damit die durch Transformation aus f erhaltene Form eigentlich primitiv sei und die Invarianten $\Omega\Theta$, $\Delta\Theta$ besitze.

9. Im vorliegenden Falle erscheint es jedoch zweckmässig, die reducirte Substitution durch eine andere zn ersetzen. Jede Substitution der Determinante $\Theta_1\Theta_2$

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' \end{pmatrix}$$

lässt sich auch zusammensetzen aus einer *eingerichteten* Substitution

$$(2.) \qquad T_1 = \begin{pmatrix} \Theta_{11} & 0 & 0 \\ \Theta_{11}\alpha_1' & \Theta_{12}\Theta_{21} & 0 \\ \Theta_{11}\alpha_1'' & \Theta_{12}\Theta_{21}\beta_1'' & \Theta_{22} \end{pmatrix}$$

und einer nachfolgenden Substitution der Determinante 1. Hier ist Θ_{11} bestimmt als grösster gemeinschaftlicher Theiler von α, β, γ; ebenso $\Theta_{11}\Theta_{12}\Theta_{21}$ als grösster gemeinschaftlicher Theiler von $\alpha\beta' - \beta\alpha'$, $\beta\gamma' - \gamma\beta'$, $\gamma\alpha' - \alpha\gamma'$; $\alpha_1'(\alpha_1'', \beta_1'')$ sind Zahlen beliebig vorgeschriebener vollständiger Restsysteme mod. $\Theta_{12}\Theta_{21}(\Theta_{22})$, welche durch die Congruenzen bestimmt sind:

$$(3.) \qquad \begin{cases} \alpha\alpha_1' \equiv \alpha', \quad \beta\alpha_1' \equiv \beta', \quad \gamma\alpha_1' \equiv \gamma' \pmod{\Theta_{12}\Theta_{21}}, \\ \alpha\alpha_1'' + (\alpha' - \alpha\alpha_1')\beta_1'' \equiv \alpha'', \quad \beta\alpha_1'' + (\beta' - \beta\alpha_1')\beta_1'' \equiv \beta'', \\ \gamma\alpha_1'' + (\gamma' - \gamma\alpha_1')\beta_1'' \equiv \gamma'' \pmod{\Theta_{22}}. \end{cases}$$

Endlich ist im vorliegenden Falle die Zerlegung $\Theta_{12}\Theta_{21}$ nach (a.) dadurch bestimmt, dass Θ_{12} in Θ_1, Θ_{21} in Θ_2 aufgehen muss.

Damit die aus f durch die Substitution T_1 entstehende Form f_1 eine primitive Form der Invarianten $\Omega\Theta$, $\Delta\Theta$ sei, ist nothwendig und hinreichend, dass $a + a'\alpha_1'^2$ prim sei zu Θ_{12} und $\Theta_2^{-2}(a' + a''\beta_1''^2)$ prim zu Θ_{22}.

Werden die Primfactoren von $\Theta_i(\Theta_{ik})$ mit $\theta_i(\theta_{ik})$ bezeichnet, so gelten für die quadratischen Charaktere der Form f_1 und ihrer adjungirten F_1 die

Gleichungen:

$$(4.)\quad \begin{cases} \left(\frac{f_1}{\theta_{11}}\right) = \left(\frac{a'}{\theta_{11}}\right), & \left(\frac{f_1}{\theta_{12}}\right) = \left(\frac{a+a'\alpha_1'^2}{\theta_{12}}\right), \quad \left(\frac{f_1}{\theta_2}\right) = \left(\frac{f}{\theta_2}\right), \\ \left(\frac{F_1}{\theta_1}\right) = \left(\frac{-\Delta_1 f_1}{\theta_1}\right)\left(\frac{F}{\theta_1}\right), & \left(\frac{F_1}{\theta_{21}}\right) = \left(\frac{\Theta_1 A'}{\theta_{21}}\right), \quad \left(\frac{F_1}{\theta_{22}}\right) = \left(\frac{\Theta_1(A''+A'\beta_1''^2)}{\theta_{22}}\right). \end{cases}$$

Entsteht ebenso die primitive Form f_2 der Invarianten $\Omega\Theta$, $\Delta\Theta$ aus f durch die eingerichtete Substitution

$$(5.)\qquad T_2 = \begin{pmatrix} \Theta'_{11} & 0 & 0 \\ \Theta'_{11}\alpha'_2 & \Theta'_{12}\Theta'_{21} & 0 \\ \Theta'_{11}\alpha''_2 & \Theta'_{12}\Theta'_{21}\beta''_2 & \Theta'_{22} \end{pmatrix}$$

der Determinante $\Theta_1\Theta_2$ und bezeichnet ϑ_{ik} den grössten gemeinschaftlichen Theiler von Θ_{ik}, Θ'_{ik}, und ϑ'_{ik} denjenigen von Θ_{ik}, $\Theta'_{il}(k \gtrless l)$, so ist

$$(6.)\qquad \Theta_{ik} = \vartheta_{ik}\vartheta'_{ik}, \quad \Theta'_{ik} = \vartheta_{ik}\vartheta'_{il}$$

und die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, dass f_1 und f_2 demselben Geschlechte angehören, lauten:

$$(7.)\quad \begin{cases} a'(a+a'\alpha_1'^2)R\vartheta'_{12}, \quad a'(a+a'\alpha_2'^2)R\vartheta'_{11}, \quad (a+a'\alpha_1'^2)(a+a'\alpha_2'^2)R\vartheta_{12}. \\ \Theta_2^{-4}a''(a'+a''\beta_1''^2)R\vartheta'_{22}, \quad \Theta_2^{-4}a''(a'+a''\beta_2''^2)R\vartheta'_{21}, \\ \qquad\qquad \Theta_2^{-4}(a'+a''\beta_1''^2)(a'+a''\beta_2''^2)R\vartheta_{22}. \end{cases}$$

10. Es ist nun zu untersuchen, ob die im vorigen Artikel betrachteten Formen f_1 und f_2, wenn sie demselben Geschlechte angehören, äquivalent seien. Angenommen, dies sei der Fall, und f_1 gehe in f_2 über durch die (ganzzahlige) Substitution

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \xi & \eta & \zeta \\ \xi' & \eta' & \zeta' \\ \xi'' & \eta'' & \zeta'' \end{pmatrix}$$

der Determinante 1, so geht f in sich selbst über durch die Substitution

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda & \mu & \nu \\ \lambda' & \mu' & \nu' \\ \lambda'' & \mu'' & \nu'' \end{pmatrix} = T_1 \Sigma T_2^{-1},$$

wo

$$\lambda \;= \frac{\Theta_{11}\xi}{\Theta'_{11}} - \alpha'_2 \frac{\Theta_{11}\eta}{\Theta'_{12}\Theta'_{21}} + (\alpha'_2\beta''_2 - \alpha''_2)\frac{\Theta_{11}\zeta}{\Theta'_{22}},$$

$$\lambda' = \frac{\Theta_{11}\alpha'_1\xi + \Theta_{12}\Theta_{21}\xi'}{\Theta'_{11}} - \alpha'_2 \frac{\Theta_{11}\alpha'_1\eta + \Theta_{12}\Theta_{21}\eta'}{\Theta'_{12}\Theta'_{21}} + (\alpha'_2\beta''_2 - \alpha''_2)\frac{\Theta_{11}\alpha'_1\zeta + \Theta_{12}\Theta_{21}\zeta'}{\Theta'_{22}},$$

$$\lambda'' = \frac{\Theta_{11}\alpha''_1\xi + \Theta_{12}\Theta_{21}\beta'_1\xi' + \Theta_{22}\xi''}{\Theta'_{11}} - \alpha'_2 \frac{\Theta_{11}\alpha''_1\eta + \Theta_{12}\Theta_{21}\beta'_1\eta' + \Theta_{22}\eta''}{\Theta'_{12}\Theta'_{21}}$$

$$+ (\alpha'_2\beta''_2 - \alpha''_2)\frac{\Theta_{11}\alpha''_1\zeta + \Theta_{12}\Theta_{21}\beta'_1\zeta' + \Theta_{22}\zeta''}{\Theta'_{22}},$$

$$\mu \;= \frac{\Theta_{11}\eta}{\Theta'_{12}\Theta'_{21}} - \beta''_1 \frac{\Theta_{11}\zeta}{\Theta'_{22}}, \quad \mu' = \frac{\Theta_{11}\alpha'_1\eta + \Theta_{12}\Theta_{21}\eta'}{\Theta'_{12}\Theta'_{21}} - \beta''_2 \frac{\Theta_{11}\alpha'_1\zeta + \Theta_{12}\Theta_{21}\zeta'}{\Theta'_{22}},$$

$$\mu'' = \frac{\Theta_{11}\alpha''_1\eta + \Theta_{12}\Theta_{21}\beta'_1\eta' + \Theta_{22}\eta''}{\Theta'_{12}\Theta'_{21}} - \beta''_2 \frac{\Theta_{11}\alpha''_1\zeta + \Theta_{12}\Theta_{21}\beta'_1\zeta' + \Theta_{22}\zeta''}{\Theta'_{22}},$$

$$\nu \;= \frac{\Theta_{11}\zeta}{\Theta'_{22}}, \quad \nu' = \frac{\Theta_{11}\alpha'_1\zeta + \Theta_{12}\Theta_{21}\zeta'}{\Theta'_{22}}, \quad \nu'' = \frac{\Theta_{11}\alpha''_1\zeta + \Theta_{12}\Theta_{21}\beta''_1\zeta' + \Theta_{22}\zeta''}{\Theta'_{22}}.$$

Diese Coefficienten werden ganze Zahlen, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

$$\begin{array}{lll} \xi \equiv 0 \pmod{\vartheta'_{12}}, & \eta \equiv 0 \pmod{\vartheta_{12}\vartheta_{21}\vartheta'_{22}}, & \zeta \equiv 0 \pmod{\vartheta_{22}\vartheta'_{21}} \\ \xi' \equiv 0 \pmod{\vartheta_{11}}, & \eta' \equiv 0 \pmod{\vartheta'_{11}\vartheta'_{22}}, & \zeta' \equiv 0 \pmod{\vartheta_{22}} \\ \xi'' \equiv 0 \pmod{\vartheta_{11}\vartheta'_{12}}, & \eta'' \equiv 0 \pmod{\vartheta'_{11}\vartheta_{12}\vartheta_{21}}, & \zeta'' \equiv 0 \pmod{\vartheta'_{21}}. \end{array}$$

Dass unter den Voraussetzungen (1.) diese Congruenzen in der That stattfinden, folgt aus den Gleichungen für die Transformation von f in $f_1 = \begin{pmatrix} m_1, & m'_1, & m''_1 \\ n_1, & n'_1, & n''_1 \end{pmatrix}$, nach welchen folgende Bedingungen erfüllt sind in Bezug auf die Primfactoren von

$$\begin{array}{lllllll} \Theta_{11}: & |m_1| > 1, & |m'_1| = 0, & |m''_1| = 1, & |n_1| > 0, & |n'_1| > 1, & |n''_1| > 0; \\ \Theta_{12}: & |m_1| = 0, & |m'_1| > 1, & |m''_1| = 1, & |n_1| > 1, & |n'_1| > 0, & |n''_1| > 0; \\ \Theta_{21}: & |m_1| = 0, & |m'_1| > 3, & |m''_1| = 2, & |n_1| > 2, & |n'_1| > 1, & |n''_1| > 2; \\ \Theta_{22}: & |m_1| = 0, & |m'_1| = 2, & |m''_1| = 4, & |n_1| > 2, & |n'_1| > 2, & |n''_1| > 1, \end{array}$$

und die entsprechenden für die Coefficienten von f_2 in Bezug auf die Primfactoren von Θ'_{α}.

Es möge genügen den Nachweis für η, η', η'' zu führen. Die Transformation Σ von f_1 in f_2 liefert die Congruenzen:

$$1)\; m'_1\eta'^2 + m''_1\eta''^2 + 2n_1\eta'\eta'' + 2n''_1\eta\eta' \equiv 0 \pmod{\vartheta'^2_{11}},$$

$$2)\; m_1\eta^2 + m''_1\eta''^2 + 2n'_1\eta''\eta + 2n''_1\eta\eta' \equiv 0 \pmod{\vartheta^2_{12}},$$

3) $m_1\xi^2 \equiv m_2 \pmod{\vartheta_{21}}$, $\xi\eta \equiv 0 \pmod{\vartheta_{21}^2}$, $m_1\eta^2 + m_1''\eta''^2 + 2n_1'\eta''\eta \equiv 0 \pmod{\vartheta_{21}^3}$,
4) $m_1\xi^2 \equiv m_2 \pmod{\vartheta'_{22}}$, $\xi\eta \equiv 0 \pmod{\vartheta'^2_{22}}$, $m_1\eta^2 + m_1'\eta'^2 + 2n_1''\eta\eta' \equiv 0 \pmod{\vartheta'^3_{22}}$.

Aus 1) und 2) folgt $\eta' \equiv \eta'' \equiv 0 \pmod{\vartheta'_{11}}$, $\eta \equiv \eta'' \equiv 0 \pmod{\vartheta_{12}}$; aus 3) folgt zunächst, dass ξ prim ist zu ϑ_{21} und sodann $\eta \equiv 0 \pmod{\vartheta_{21}^2}$, somit $\eta'' \equiv 0 \pmod{\vartheta_{21}}$; ebenso folgt aus 4) $\eta \equiv 0 \pmod{\vartheta'^2_{22}}$, $\eta' \equiv 0 \pmod{\vartheta'_{22}}$.

Umgekehrt erhält man aus

$$\Sigma = T_1^{-1} \varLambda T_2$$

die Gleichungen:

$$\vartheta'_{11}\xi = \vartheta'_{12}(\lambda + \alpha'_2\mu + \alpha''_2\nu), \quad \vartheta_{11}\eta = \vartheta_{12}\vartheta_{21}\vartheta'_{22}(\mu + \beta''_2\nu), \quad \vartheta_{11}\vartheta'_{11}\zeta = \vartheta_{22}\vartheta'_{21}\nu,$$

$$\vartheta_{12}\vartheta_{21}\vartheta'_{21}\xi' = \vartheta_{11}(-\alpha'_1\lambda + \lambda' + \alpha'_2(-\alpha'_1\mu + \mu') + \alpha''_2(-\alpha'_1\nu + \nu')),$$

$$\vartheta'_{12}\vartheta'_{21}\eta' = \vartheta'_{11}\vartheta'_{22}(-\alpha'_1\mu + \mu' + \beta''_2(-\alpha'_1\nu + \nu')), \quad \vartheta_{12}\vartheta_{21}\vartheta'_{12}\zeta' \doteq \vartheta_{22}(-\alpha'_1\nu + \nu'),$$

$$\begin{aligned}\vartheta_{22}\vartheta'_{22}\xi'' = \vartheta_{11}\vartheta'_{12}((\alpha'_1\beta''_1 - \alpha''_1)\lambda - \beta''_1\lambda' + \lambda'' + \alpha'_2((\alpha'_1\beta''_1 - \alpha''_1)\mu - \beta''_1\mu' + \mu'')\\ + \alpha''_2((\alpha'_1\beta''_1 - \alpha''_1)\nu - \beta''_1\nu' + \nu'')),\end{aligned}$$

$$\vartheta_{22}\eta'' = \vartheta_{12}\vartheta_{21}\vartheta'_{11}((\alpha'_1\beta''_1 - \alpha''_1)\mu - \beta''_1\mu' + \mu'' + \beta''_2((\alpha_1\beta''_1 - \alpha''_1)\nu - \beta''_1\nu' + \nu'')),$$

$$\vartheta'_{22}\zeta'' = \vartheta'_{21}((\alpha'_1\beta''_1 - \alpha''_1)\nu - \beta''_1\nu' + \nu''),$$

welche zeigen, dass die Coefficienten von Σ unter folgenden Bedingungen ganzzahlig werden:

$$\lambda + \alpha'_2\mu \equiv 0 \pmod{\vartheta'_{11}}, \quad \mu \equiv 0 \pmod{\vartheta_{11}}, \quad \nu \equiv 0 \pmod{\vartheta_{11}\vartheta'_{11}},$$

$$-\alpha'_1\lambda + \lambda' + \alpha'_2(-\alpha'_1\mu + \mu') \equiv 0 \pmod{\vartheta_{12}\vartheta_{21}}, \quad -\alpha'_1\nu + \nu' \equiv 0 \pmod{\vartheta_{12}\vartheta_{21}\vartheta'_{12}},$$

$$-\alpha'_1\lambda + \lambda' + \alpha'_2(-\alpha'_1\mu + \mu') + \alpha''_2(-\alpha'_1\nu + \nu') \equiv 0 \pmod{\vartheta'_{21}},$$

$$-\alpha'_1\mu + \mu' + \beta''_2(-\alpha'_1\nu + \nu') \equiv 0 \pmod{\vartheta'_{21}}, \quad -\alpha'_1\mu + \mu' \equiv 0 \pmod{\vartheta'_{12}},$$

$$\begin{aligned}(\alpha'_1\beta''_1 - \alpha''_1)\lambda - \beta''_1\lambda' + \lambda'' + \alpha'_2((\alpha'_1\beta''_1 - \alpha''_1)\mu - \beta''_1\mu' + \mu'')\\ + \alpha''_2((\alpha'_1\beta''_1 - \alpha''_1)\nu - \beta''_1\nu' + \nu'') \equiv 0 \pmod{\vartheta_{22}},\end{aligned}$$

$$(\alpha'_1\beta''_1 - \alpha''_1)\lambda - \beta''_1\lambda' + \lambda'' + \alpha'_2((\alpha'_1\beta''_1 - \alpha''_1)\mu - \beta''_1\mu' + \mu'') \equiv 0 \pmod{\vartheta'_{22}},$$

$$(\alpha'_1\beta''_1 - \alpha''_1)\mu - \beta''_1\mu' + \mu'' + \beta''_2((\alpha'_1\beta''_1 - \alpha''_1)\nu - \beta''_1\nu' + \nu'') \equiv 0 \pmod{\vartheta_{22}},$$

$$(\alpha'_1\beta''_1 - \alpha''_1)\nu - \beta''_1\nu' + \nu'' \equiv 0 \pmod{\vartheta'_{22}}.$$

Dieses System lässt sich indessen noch vereinfachen. Denn für jede automorphe Substitution $\varLambda$ von f gelten nach (1.) die Congruenzen:

$$a\lambda^2 + a'\lambda'^2 \equiv a, \quad a\nu^2 + a'\nu'^2 \equiv 0, \quad a\lambda\nu + a'\lambda'\nu' \equiv 0 \pmod{\Theta_1},$$

aus denen zunächst folgt:

$$(a\lambda^2 + a'\lambda'^2)(a\nu^2 + a'\nu'^2) - (a\lambda\nu + a'\lambda'\nu')^2 \equiv 0;$$

d. h.

$$\lambda\nu' - \nu\lambda' \equiv 0$$

und weiter

$$\nu \equiv \nu' \equiv 0 \pmod{\Theta_1}.$$

Auch ergiebt sich sofort

$$\mu \equiv \nu \equiv 0 \pmod{\Theta_2}.$$

Hieraus folgt noch

$$\nu''(\lambda\mu'-\mu\lambda') \equiv 1 \pmod{\Theta_1}, \quad \lambda(\mu'\nu''-\nu'\mu'') \equiv 1 \pmod{\Theta_2},$$

so dass Θ_1 sowohl prim ist zu ν'' als zu den grössten gemeinschaftlichen Theilern von λ, μ und von λ', μ'; ebenso Θ_2 prim zu λ und zu den grössten gemeinschaftlichen Theilern von μ', ν' und von μ'', ν''.

Demzufolge reduciren sich obige Congruenzen noch weiter auf:

$$(8.)\quad \begin{cases} \lambda+\alpha_2'\mu \equiv 0 \pmod{\vartheta_{11}'}, \quad \mu \equiv 0 \pmod{\vartheta_{11}}, \quad \nu' \equiv 0 \pmod{\vartheta_{21}}, \\ -\alpha_1'\lambda+\lambda'+\alpha_2'(-\alpha_1'\mu+\mu') \equiv 0 \pmod{\vartheta_{12}}, \\ -\alpha_1'\lambda+\lambda'+\alpha_2'\mu' \equiv 0 \pmod{\vartheta_{21}}, \quad -\alpha_1'\mu+\mu' \equiv 0 \pmod{\vartheta_{12}'}, \\ -\alpha_1'\lambda+\lambda'+\alpha_2'\mu'+\alpha_2''\nu' \equiv 0 \pmod{\vartheta_{21}'}, \quad \mu'+\beta_2''\nu' \equiv 0 \pmod{\vartheta_{21}'}, \\ (\alpha_1'\beta_1''-\alpha_1'')\lambda-\beta_1''\lambda'+\lambda''+\alpha_2'(-\beta_1''\mu'+\mu'')+\alpha_2''(-\beta_1''\nu'+\nu'') \equiv 0 \pmod{\vartheta_{22}}, \\ (\alpha_1'\beta_1''-\alpha_1'')\lambda-\beta_1''\lambda'+\lambda''+\alpha_2'(-\beta_1''\mu'+\mu'') \equiv 0 \pmod{\vartheta_{22}'}, \\ -\beta_1''\mu'+\mu''+\beta_2''(-\beta_1''\nu'+\nu'') \equiv 0 \pmod{\vartheta_{22}}, \quad -\beta_1''\nu'+\nu'' \equiv 0 \pmod{\vartheta_{22}'}, \end{cases}$$

und es gilt der Satz:

Für die Aequivalenz der Formen f_1 und f_2 ist nothwendig und hinreichend, dass es eine Transformation Λ von f in sich selbst giebt, deren Coefficienten den Congruenzen (8.) *genügen.*

11. Die Coefficienten von Λ sind durch die Gleichungen (I.) und (II.) in § 2 gegeben. In denselben setze ich zunächst $\varepsilon = 1$ und erhalte

$$\left.\begin{aligned} p^2+aa'q''^2 &\equiv 1 \\ \lambda \equiv \mu' &\equiv 2p^2-1 \\ \mu &\equiv -2a'pq'' \end{aligned}\right\} \pmod{\Theta_1}, \quad \left.\begin{aligned} p^2 \equiv \lambda \equiv \mu' &\equiv 1 \\ \mu \equiv \mu'' &\equiv 0 \\ \lambda'' &\equiv -2apq' \end{aligned}\right\} \pmod{\Theta_2},$$

$$\lambda' \equiv 2apq'', \quad \nu \equiv \nu' \equiv 0, \quad \nu'' \equiv 1 \pmod{\Theta_1\Theta_2},$$

so dass das System (8.) übergeht in:

$$\begin{aligned} &2p^2-1-2a'\alpha_2'pq'' \equiv 0 \pmod{\vartheta_{11}'}, \quad pq'' \equiv 0 \pmod{\vartheta_{11}}, \\ &(\alpha_2'-\alpha_1')(2p^2-1)+2(a+a'\alpha_1'\alpha_2')pq'' \equiv 0 \pmod{\vartheta_{12}}, \\ &2p^2-1+2a'\alpha_1'pq'' \equiv 0 \pmod{\vartheta_{12}'}, \\ &\alpha_2'-\alpha_1'+2apq'' \equiv 0 \pmod{\vartheta_{21}\vartheta_{21}'}, \quad 1 \equiv 0 \pmod{\vartheta_{21}'\vartheta_{22}'}, \\ &(\alpha_2'-\alpha_1')\beta_1''+\alpha_1''-\alpha_2''+2ap(q'+\beta_1''q'') \equiv 0 \pmod{\vartheta_{22}}, \\ &(\alpha_2'-\alpha_1')\beta_1''+\alpha_1'' \quad +2ap(q'+\beta_1''q'') \equiv 0 \pmod{\vartheta_{22}'}, \\ &\beta_2''-\beta_1'' \equiv 0 \pmod{\vartheta_{22}}. \end{aligned}$$

Die Annahme $\varepsilon = 1$ ist also nur zulässig, wenn $\vartheta'_{21} = \vartheta'_{22} = 1$, daher $\vartheta_{21} = \Theta_{21} = \Theta'_{21}$, $\vartheta_{22} = \Theta_{22} = \Theta'_{22}$ ist, und wenn $\beta''_2 = \beta''_1$. Ist ausserdem noch $\Theta_{11} = \Theta'_{11}$, also auch $\Theta_{12} = \Theta'_{12}$, und $\alpha'_1 \equiv \alpha'_2 \pmod{\Theta_{12}}$, so wird $\vartheta'_{11} = \vartheta'_{12} = 1$ und die Congruenzen reduciren sich auf

$$pq'' \equiv 0 \pmod{\Theta_1}, \quad \alpha'_2 - \alpha'_1 + 2apq'' \equiv 0 \pmod{\Theta_{21}},$$
$$(\alpha'_2 - \alpha'_1)\beta''_1 + \alpha''_1 - \alpha''_2 + 2ap(q' + \beta''_1 q'') \equiv 0 \pmod{\Theta_{22}}.$$

Nun lässt sich zeigen, dass die Gleichung (II.):

$$p^2 - \Omega\Theta_2^2 F(q, q', q'') = 1$$

stets so auflösbar ist, dass diese drei Congruenzen erfüllt sind. Setzt man nämlich

$$p = 1 + \Omega\Theta z, \quad q'' = \Theta_1\Theta_{22}q''_1, \quad A = \Omega\Delta\Theta A_1, \quad A' = \Delta\Theta_1 A'_1,$$

so geht sie über in

$$\text{(II}_1.) \quad (2 + \Omega\Theta z)z = \Omega\Delta\Theta_2^2 A_1 q^2 + \Delta A'_1 q'^2 + \Theta_1\Theta_{22}^2 A'' q_1''^2 + \cdots = F_1(q, q', q''_1),$$

wo F_1 eine primitive Form der theilerfremden Invarianten $\Delta\Theta_{22}^2$, $\Omega\Theta_1\Theta_{21}^2$ ist, und die Congruenzen reduciren sich auf

$$2a\Theta_1\Theta_{22}q''_1 \equiv \alpha'_1 - \alpha'_2 \pmod{\Theta_{21}}, \quad 2aq' \equiv (\alpha'_1 - \alpha'_2)\beta''_1 - \alpha''_1 + \alpha''_2 \pmod{\Theta_{22}}.$$

Wählt man nun, was immer möglich ist, für z eine zu $2\Omega\Delta\Theta$ theilerfremde Zahl, für welche

$$1 + 2\Omega\Theta z \equiv 3,\ 5 \text{ oder } 7 \pmod{8}, \quad 2\Delta A'_1 z R \Theta_{22}, \quad (2 + \Omega\Theta z)\Theta_1 A'' z R \Delta;$$

dagegen

$$2\Delta A'_1 z N \theta_{21}$$

in Bezug auf jeden Primfactor θ_{21} von Θ_{21}, so ist die Gleichung (II$_1$.) immer auflösbar*), aber nur so, dass q' prim wird zu Θ_{22}, q''_1 prim zu Θ_{21}. Nur wenn Δ durch 3 theilbar und zugleich $A'' \equiv \Omega_1 \pmod{3}$ wäre, liesse sich der dritten Bedingung mod. 3 nicht genügen. Man kann dann aber z durch 3 theilbar machen und $z = 3z_1$, $q''_1 = 3q''_2$ setzen, worauf (II$_1$.) übergeht in

$$(2 + 3\Omega\Theta z_1)z_1 = \tfrac{1}{3}\Omega\Delta\Theta_2^2 A_1 q^2 + \tfrac{1}{3}\Delta A'_1 q'^2 + 3\Theta_1\Theta_{22}^2 A'' q_2''^2 + \cdots = F_2(q, q', q''_2),$$

wo nun die Form F_2 die theilerfremden Invarianten $\frac{1}{3}\Delta\Theta_{22}^2$, $3\Omega\Theta_1\Theta_{21}^2$ hat und die Schwierigkeit gehoben ist.

Es sei $\mathfrak{z}$ (> 0), $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{q}'$, $\mathfrak{q}''_1$ eine Auflösung von (II$_1$). Setzt man dann

$$\Omega\Theta F_1(\mathfrak{q}, \mathfrak{q}', \mathfrak{q}''_1) = D, \quad p = t, \quad q = \mathfrak{q}u, \quad q' = \mathfrak{q}'u, \quad q''_1 = \mathfrak{q}''_1 u,$$

*) Vgl. meine Inauguraldissertation S. 30 oder Art. 33 dieser Abhandlung.

so geht (II_1.) über in $t^2-Du^2=1$, und $T=1+\Omega\Theta_3$, $U=1$ ist die Fundamentalauflösung dieser Gleichung und jede andere Auflösung liefert eine solche von (II_1.). Da aber Θ_2 in D aufgeht, kann man nach einem sogleich zu beweisenden Satze immer solche Auflösungen finden, in denen u jeder beliebigen Zahl congruent wird $\text{mod.}\,\Theta_2$, und somit auch die Congruenzen befriedigen:

$$2a\Theta_1\Theta_{22}\mathfrak{q}_1''u \equiv \alpha_1'-\alpha_2' \;(\text{mod.}\,\Theta_{21}), \quad 2a\mathfrak{q}'u \equiv (\alpha_1'-\alpha_2')\beta_1''-\alpha_1''+\alpha_2'' \;(\text{mod.}\,\Theta_{22}).$$

Hieraus folgt:

Alle derselben Form f entstammenden Formen f_1, welche derselben Zerlegung von Θ_1 in $\Theta_{11}\Theta_{12}$ und von Θ_2 in $\Theta_{21}\Theta_{22}$, gleichen Werthen von β_1'' und mod. Θ_{12} congruenten Werthen von α_1' entsprechen, sind äquivalent.

12. Hülfssatz. *Besitzt die Gleichung $t^2-Du^2=1$ eine Fundamentalauflösung T, U, in welcher U zum Theiler D_1 von D relativ prim ist, so besitzt sie auch Auflösungen, in denen u einer beliebig gegebenen Zahl congruent ist mod. D_1.*

Denn sämmtliche Auflösungen, in denen t positiv ist, sind durch die Formel gegeben

$$t+u\sqrt{D} = (T\pm U\sqrt{D})^n,$$

aus welcher folgt

$$u = \pm\left(nT^{n-1}U+\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}DT^{n-3}U^3+\cdots\right);$$

also

$$u \equiv \pm nT^{n-1}U \;(\text{mod.}\,D_1), \quad T^2 \equiv 1 \;(\text{mod.}\,D_1).$$

Da aber T und U prim sind zu D_1, lässt sich n so wählen, dass u einer beliebig gegebenen Zahl congruent wird $\text{mod.}\,D_1$.

13. Nach dem in Art. 11 bewiesenen Satze kann man, ohne die Klasse von f_1 zu ändern, α_1'' beliebig und α_1' $\text{mod.}\,\Theta_{21}$ abändern. In Folge davon und weil Θ_2 prim ist zu λ und zum grössten gemeinschaftlichen Theiler von μ', ν', kann man von den Congruenzen (8.) alle diejenigen weglassen, in denen α_1'' vorkommt, sowie diejenigen, in denen α_2' $\text{mod.}\,\vartheta_{21}$ oder α_2'' $\text{mod.}\,\vartheta_{21}'$ vorkommen. Dann reduciren sie sich auf folgende acht:

$$(9.)\quad \begin{cases} \lambda+\alpha_2'\mu \equiv 0 \;(\text{mod.}\,\vartheta_{11}'), \quad \mu \equiv 0 \;(\text{mod.}\,\vartheta_{11}), \quad \mu'-\alpha_1'\mu \equiv 0 \;(\text{mod.}\,\vartheta_{12}'). \\ -\alpha_1'\lambda+\lambda'+\alpha_2'(-\alpha_1'\mu+\mu') \equiv 0 \;(\text{mod.}\,\vartheta_{12}); \\ \mu'+\beta_2''\nu' \equiv 0 \;(\text{mod.}\,\vartheta_{21}'), \quad \nu' \equiv 0 \;(\text{mod.}\,\vartheta_{21}), \quad \nu''-\beta_1''\nu' \equiv 0 \;(\text{mod.}\,\vartheta_{22}'), \\ -\beta_1''\mu'+\mu''+\beta_2''(-\beta_1''\nu'+\nu'') \equiv 0 \;(\text{mod.}\,\vartheta_{22}), \end{cases}$$

welche in zwei Gruppen zu je vier zerfallen und in denen nicht zugleich $\beta_1'' \equiv \beta_2''$ (mod. Θ_{22}), $\alpha_1' \equiv \alpha_2'$ (mod. Θ_{21}) sein soll, falls $\Theta_{11} = \Theta_{11}'$, $\Theta_{22} = \Theta_{22}'$ ist.

In jeder dieser Gruppen lassen sich die vier Congruenzen noch folgendermassen in eine zusammenfassen:

$$(10.)\qquad \gamma_2(-\alpha_1\lambda+\gamma_1\lambda')+\alpha_2(-\alpha_1\mu+\gamma_1\mu') \equiv 0 \pmod{\Theta_1},$$

$$(11.)\qquad \delta_2(-\beta_1\mu'+\delta_1\mu'')+\beta_2(-\beta_1\nu'+\delta_1\nu'') \equiv 0 \pmod{\Theta_2},$$

wenn man setzt:

$$(\alpha.)\quad \begin{cases} \alpha_1 \equiv \alpha_1', & \alpha_2 \equiv \alpha_2', \quad \gamma_1 \equiv 1, \quad \gamma_2 \equiv 1 \pmod{\vartheta_{12}}, \\ \alpha_1 \equiv \alpha_1', & \alpha_2 \equiv 1, \quad \gamma_1 \equiv 1, \quad \gamma_2 \equiv 0 \pmod{\vartheta_{12}'}, \\ \alpha_1 \equiv 1, & \alpha_2 \equiv \alpha_2', \quad \gamma_1 \equiv 0, \quad \gamma_2 \equiv 1 \pmod{\vartheta_{11}'}, \\ \alpha_1 \equiv 1, & \alpha_2 \equiv 1, \quad \gamma_1 \equiv 0, \quad \gamma_2 \equiv 0 \pmod{\vartheta_{11}}, \end{cases}$$

$$(\beta.)\quad \begin{cases} \beta_1 \equiv \beta_1'', & \beta_2 \equiv \beta_2'', \quad \delta_1 \equiv 1, \quad \delta_2 \equiv 1 \pmod{\vartheta_{22}}, \\ \beta_1 \equiv \beta_1'', & \beta_2 \equiv 1, \quad \delta_1 \equiv 1, \quad \delta_2 \equiv 0 \pmod{\vartheta_{22}'}, \\ \beta_1 \equiv 1, & \beta_2 \equiv \beta_2'', \quad \delta_1 \equiv 0, \quad \delta_2 \equiv 1 \pmod{\vartheta_{21}'}, \\ \beta_1 \equiv 1, & \beta_2 \equiv 1, \quad \delta_1 \equiv 0, \quad \delta_2 \equiv 0 \pmod{\vartheta_{21}}. \end{cases}$$

14. Um jetzt alle Transformationen A von f in sich selbst zu berücksichtigen, setze ich zur Abkürzung

$$\Omega_2\Theta_2 = \Omega_2', \quad \Delta_1\Theta_1 = \Delta_1'$$

und bezeichne mit Ω_{2a}', Ω_{2b}', Ω_{2c}' die Producte derjenigen Primfactoren von Ω_2', welche bezw. den Fällen a), b), c) für $\omega = 2$, $\delta = 0$ der Tafel am Schlusse von § 2 entsprechen, mit Ω_{1b}, Ω_{1c} die den Fällen b), c) für $\omega = 1$, $\delta = 0$ entsprechenden Theiler von Ω_1, und mit Δ_{1a}', Δ_{2a} die Producte der Primfactoren von Δ_1', Δ_2, die dem Falle $\omega = 0$, $\delta = 1$ oder 2 entsprechen. Mit Rücksicht auf diese Tafel ist dann zu setzen:

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \sigma\Omega_{1b}\Omega_{1c}^2\Omega_{2a}'^2\Omega_{2b}'^2\Omega_{2c}'^4\Delta_{1a}'\Delta_{2a}^2 \\ p &= \Omega_{1b}\Omega_{1c}\Omega_{2a}'\Omega_{2b}'^2\Omega_{2c}'^2\Delta_{1a}'\Delta_{2a}^2 p_1 \\ q' &= \Omega_{1c}\Omega_{2a}'\Omega_{2c}'^2 q_1' \\ q'' &= \Omega_{1c}\Omega_{2a}'\Omega_{2c}'^2\Delta_{1a}'\Delta_{2a}^2 q_1'' \end{aligned}$$

$$\Omega_1 = \Omega_{10}\Omega_{1b}\Omega_{1c}, \quad \Omega_2' = \Omega_{20}'\Omega_{2a}'\Omega_{2b}'\Omega_{2c}', \quad \Delta_1' = \Delta_{10}'\Delta_{1a}', \quad \Delta_2 = \Delta_{20}\Delta_{2a}.$$

Die Gleichung (II.) geht dadurch über in

$$(\text{II}'.)\qquad \Omega_{1b}\Omega_{2b}'^2\Delta_{1a}'\Delta_{2a}^2 p_1^2 - \sigma = \Omega_{10}\Omega_{20}'^2\Omega_{2a}'^2 F(q, q_1', q_1''),$$

wo

$$F(q,\ q'_1,\ q''_1) = \Omega_{10}\Omega_{1b}\Omega'^2_{20}\Omega'^2_{2b}\Delta'_{10}\Delta^2_{20}A_1q^2+\Omega_{1c}\Omega'^2_{2c}\Delta'_{10}\Delta^2_{20}A'_1q'^2_1$$
$$+\Omega_{1c}\Omega'^2_{2c}\Delta'_{1a}\Delta^2_{2a}A''q''^2_1+\cdots$$

die theilerfremden Invarianten $\Omega_{1c}\Omega'^2_{2c}\Delta'_{10}\Delta^2_{20}$, $\Omega_{10}\Omega_{1b}\Omega'^2_{20}\Omega'^2_{2b}\Delta'_{1a}\Delta^2_{2a}$ besitzt.

Zunächst betrachte ich die Congruenz (10.). Den Modul Θ_1 zerlege ich analog wie Δ'_1 in die Factoren Θ_{10}, Θ_{1a}. Dann geben die Gleichungen (I.) und (II.) in § 2 nach dem Modul Θ_{10} die Congruenzen:

$$\varepsilon\lambda \equiv \varepsilon\mu' \equiv 2p^2-\varepsilon,\quad \varepsilon\mu \equiv -2a'pq'',\quad \varepsilon\lambda' \equiv 2apq''$$

$$(\varepsilon.)\qquad p^2+aa'q''^2 \equiv \varepsilon;\ \text{daher}\ 2p^2-\varepsilon \equiv p^2-aa'q''^2,$$

und (10.) geht für den Modul Θ_{10} über in

$$(12.)\qquad (\alpha_1\gamma_2-\gamma_1\alpha_2)p^2-2(a\gamma_1\gamma_2+a'\alpha_1\alpha_2)pq''-aa'(\alpha_1\gamma_2-\gamma_1\alpha_2)q''^2 \equiv 0.$$

Nun ist

$$(a\gamma_1\gamma_2+a'\alpha_1\alpha_2)^2+aa'(\alpha_1\gamma_2-\gamma_1\alpha_2)^2 = (a\gamma_1^2+a'\alpha_1^2)(a\gamma_2^2+a'\alpha_2^2)$$

nach (7.) quadratischer Rest von Θ_{10} und daher

$$(\alpha_1\gamma_2-\gamma_1\alpha_2)p \equiv (a\gamma_1\gamma_2+a'\alpha_1\alpha_2+\sqrt{(a\gamma_1^2+a'\alpha_1^2)(a\gamma_2^2+a'\alpha_2^2)})q'',$$

was mit $(\varepsilon.)$ zusammen liefert:

$$(13.)\qquad p^2 \equiv \tfrac{1}{2}\varepsilon\left(1+\frac{a\gamma_1\gamma_2+a'\alpha_1\alpha_2}{\sqrt{(a\gamma_1^2+a'\alpha_1^2)(a\gamma_2^2+a'\alpha_2^2)}}\right)\ (\text{mod.}\,\Theta_{10})$$

mit der Bedingung

$$(\text{A.})\qquad 2\varepsilon\left(1+\frac{a\gamma_1\gamma_2+a'\alpha_1\alpha_2}{\sqrt{(a\gamma_1^2+a'\alpha_1^2)(a\gamma_2^2+a'\alpha_2^2)}}\right)R\Theta_{10}.$$

Hierbei ist indessen vorausgesetzt, dass $\alpha_1\gamma_2-\gamma_1\alpha_2$ prim sei zu Θ_{10}. Wäre dieser Ausdruck durch einen Primfactor θ_{10} von Θ_{10} theilbar, so würde sich die Congruenz (12.) für denselben auf $pq''\equiv 0$ reduciren: es müsste sein

$$(13'.)\qquad \text{entweder}\quad p\equiv 0\ (\text{mod.}\,\theta_{10})\quad \text{oder}\quad q''\equiv 0\ (\text{mod.}\,\theta_{10})$$

mit der Bedingung bzw.

$$(\text{A}_0.)\qquad aa'\varepsilon R\theta_{10}\quad \text{oder}\quad \varepsilon R\theta_{10}.$$

Aus Tafel $(\alpha.)$ Art. 13 ergiebt sich übrigens, dass in diesem Falle von den beiden Werthen von $2\varepsilon\left(1+\frac{a\gamma_1\gamma_2+a'\alpha_1\alpha_2}{\sqrt{(a\gamma_1^2+a'\alpha_1^2)(a\gamma_2^2+a'\alpha_2^2)}}\right)$ (mod. θ_{10}) der eine $\equiv 0$, der andere $\equiv 4\varepsilon$ ist, der letztere also ebenfalls die Bedingung $\varepsilon R\theta_{10}$ giebt.

In Bezug auf den Modul Θ_{1a} folgt ebenso, wenn man

$$\varepsilon = \varepsilon_0\Theta_{1a},\quad a'' = a''_0\Theta_{1a}$$

setzt:

$$\varepsilon_0\lambda \equiv -\varepsilon_0+2a'a''_0q^2,\quad \varepsilon_0\mu \equiv 2a'a''_0qq',\quad \varepsilon_0\lambda' \equiv 2aa''_0qq',\quad \varepsilon_0\mu' \equiv -\varepsilon_0+2aa''_0q'^2$$

$$(\varepsilon_0.)\qquad a''_0(a'q^2+aq'^2) \equiv \varepsilon_0;\quad \text{daher}\quad \varepsilon_0\lambda \equiv -\varepsilon_0\mu' \equiv a''_0(a'q^2-aq'^2),$$

und (10.) geht über in

$$(\alpha_1\gamma_2+\gamma_1\alpha_2)aq'^2+2(a\gamma_1\gamma_2-a'\alpha_1\alpha_2)qq'-(\alpha_1\gamma_2+\gamma_1\alpha_2)a'q^2 \equiv 0$$

oder

$$(14.)\qquad (\alpha_1\gamma_2+\gamma_1\alpha_2)aq' \equiv (a'\alpha_1\alpha_2-a\gamma_1\gamma_2+\sqrt{(a\gamma_1^2+a'\alpha_1^2)(a\gamma_2^2+a'\alpha_2^2)})q$$

und in Verbindung mit $(\varepsilon_0.)$:

$$(15.)\qquad 2a''_0(a\gamma_1^2+a'\alpha_1^2)(a\gamma_2^2+a'\alpha_2^2)\left(1+\frac{a'\alpha_1\alpha_2-a\gamma_1\gamma_2}{\sqrt{(a\gamma_1^2+a'\alpha_1^2)(a\gamma_2^2+a'\alpha_2^2)}}\right)q^2 \equiv \varepsilon_0 a(\alpha_1\gamma_2+\gamma_1\alpha_2)^2,$$

woraus die Bedingung folgt:

$$(\mathrm{A}'.)\qquad 2aa''_0\varepsilon_0\left(1+\frac{a'\alpha_1\alpha_2-a\gamma_1\gamma_2}{\sqrt{(a\gamma_1^2+a'\alpha_1^2)(a\gamma_2^2+a'\alpha_2^2)}}\right)R\Theta_{1a}.$$

Geht aber ein Primfactor θ_{1a} von Θ_{1a} in $\alpha_1\gamma_2+\gamma_1\alpha_2$ auf, so tritt bezüglich desselben die Bedingung an Stelle:

$$(14'.)\qquad \text{entweder}\quad q\equiv 0\quad \text{oder}\quad q'\equiv 0$$

und dementsprechend aus $(\varepsilon_0.)$:

$$(\mathrm{A}'_0.)\qquad aa''_0\varepsilon_0R\theta_{1a}\quad \text{oder}\quad a'a''_0\varepsilon_0R\theta_{1a},$$

von welchen Bedingungen die erste in (A'.) enthalten ist.

In derselben Weise ist die Congruenz (11.) zu behandeln. Ich zerlege den Modul Θ_2 in die drei Factoren $\Theta_{20}\Theta_{2a}$, Θ_{2b}, Θ_{2c} und erhalte aus (I.) sofort

$$\mu' \equiv \nu'' \equiv -1,\quad \mu'' \equiv \nu' \equiv 0\ (\text{mod.}\,\Theta_{20}\Theta_{2a});$$

daher

$$\beta_1\delta_2-\delta_1\beta_2 \equiv 0\ (\text{mod.}\,\Theta_{20}\Theta_{2a}),$$

und aus (II'.) die Bedingung

$$(\mathrm{B}_{(\mathrm{x})}.)\qquad \varepsilon_0R\Theta_{20}\Theta_{2a},\quad (\varepsilon = \Theta_{2a}^2\varepsilon_0).$$

In Bezug auf den Modul Θ_{2b} giebt (11.), wenn

$$\varepsilon = \Theta_{2b}^2\varepsilon_0,\quad a' = \Theta_{2b}^2a'_0,\quad a'' = \Theta_{2b}^2a''_0$$

gesetzt und die Werthe aus (I.) und (II.)

$$\varepsilon_0\mu' \equiv -\varepsilon_0+2aa''_0q'^2,\ \varepsilon_0\nu' \equiv 2aa''_0q'q'',\ \varepsilon_0\mu'' \equiv 2aa'_0q'q'',\ \varepsilon_0\nu'' \equiv -\varepsilon_0+2aa'_0q''^2,$$

$$a(a''_0q'^2+a'_0q''^2) \equiv \varepsilon_0;\quad \text{also}\quad \varepsilon_0\mu' \equiv -\varepsilon_0\nu'' \equiv a(a''_0q'^2-a'_0q''^2)$$

substituirt werden:

$$(\beta_1\delta_2+\delta_1\beta_2)a'_0 q''^2 - 2(a''_0\beta_1\beta_2 - a'_0\delta_1\delta_2)q'q'' - (\beta_1\delta_2+\delta_1\beta_2)a''_0 q'^2 \equiv 0$$

$$(16.)\quad (\beta_1\delta_2+\delta_1\beta_2)a'_0 q'' \equiv \left(a''_0\beta_1\beta_2 - a'_0\delta_1\delta_2 + \sqrt{(a'_0\delta_1^2+a''_0\beta_1^2)(a'_0\delta_2^2+a''_0\beta_2^2)}\right)q',$$

$$(17.)\quad 2a(a'_0\delta_1^2+a''_0\beta_1^2)(a'_0\delta_2^2+a''_0\beta_2^2)\left(1+\frac{a''_0\beta_1\beta_2-a'_0\delta_1\delta_2}{\sqrt{(a'_0\delta_1^2+a''_0\beta_1^2)(a'_0\delta_2^2+a''_0\beta_2^2)}}\right)q'^2 \equiv (\beta_1\delta_2+\delta_1\beta_2)^2 a'_0\varepsilon_0,$$

wo nach (7.) der Radicand $R\Theta_{2b}$ ist. Man erhält demnach die Bedingung

$$(\mathrm{B}'.)\qquad 2aa'_0\varepsilon_0\left(1+\frac{a''_0\beta_1\beta_2-a'_0\delta_1\delta_2}{\sqrt{(a'_0\delta_1^2+a''_0\beta_1^2)(a'_0\delta_2^2+a''_0\beta_2^2)}}\right)R\Theta_{2b}.$$

Geht jedoch ein Primfactor θ_{2b} in $\beta_1\delta_2+\delta_1\beta_2$ auf, so muss sein

$$(16'.)\qquad q' \equiv 0 \quad \text{oder} \quad q'' \equiv 0 \ (\mathrm{mod.}\theta_{2b});$$

demnach

$$(\mathrm{B}'_0.)\qquad aa'_0\varepsilon_0 R\theta_{2b} \quad \text{oder} \quad aa''_0\varepsilon_0 R\theta_{2b},$$

von welchen Bedingungen die erste in (B′.) enthalten ist.

Für den Modul Θ_{2c} endlich erhält man aus (11.), wenn man

$$\varepsilon = \Theta_{2c}^4\varepsilon_0, \quad a' = \Theta_{2c}^2 a'_0, \quad a'' = \Theta_{2c}^2 a''_0, \quad p = \Theta_{2c}^2 p_0$$

setzt und in (I.) und (II.) substituirt:

$$\varepsilon_0\mu' \equiv \varepsilon_0\nu'' \equiv 2p_0^2-\varepsilon_0, \quad \varepsilon_0\nu' \equiv -2a''_0 p_0 q, \quad \varepsilon_0\mu'' \equiv 2a'_0 p_0 q,$$

$$p_0^2 + a'_0 a''_0 q^2 \equiv \varepsilon_0; \quad \text{also} \quad 2p_0^2 - \varepsilon_0 \equiv p_0^2 - a'_0 a''_0 q^2,$$

$$(\beta_1\delta_2-\delta_1\beta_2)p_0^2 - 2(a'_0\delta_1\delta_2+a''_0\beta_1\beta_2)p_0 q - (\beta_1\delta_2-\delta_1\beta_2)a'_0 a''_0 q^2 \equiv 0,$$

$$(18.)\qquad p_0^2 \equiv \frac{1}{2}\varepsilon_0\left(1+\frac{a'_0\delta_1\delta_2+a''_0\beta_1\beta_2}{\sqrt{(a'_0\delta_1^2+a''_0\beta_1^2)(a'_0\delta_2^2+a''_0\beta_2^2)}}\right)$$

und daher die Bedingung:

$$(\mathrm{B}.)\qquad 2\varepsilon_0\left(1+\frac{a'_0\delta_1\delta_2+a''_0\beta_1\beta_2}{\sqrt{(a'_0\delta_1^2+a''_0\beta_1^2)(a'_0\delta_2^2+a''_0\beta_2^2)}}\right)R\Theta_{2c};$$

jedoch, wenn der Primfactor θ_{2c} in $\beta_1\delta_2-\delta_1\beta_2$ aufgeht:

$$(18'.)\qquad p_0 \equiv 0 \ (\mathrm{mod.}\theta_{2c}); \quad \text{da} \quad |q|_{\theta_{2c}} = 0 \quad \text{sein muss},$$

mit der Bedingung

$$(\mathrm{B}_0.)\qquad a'_0 a''_0\varepsilon_0 R\theta_{2c}.$$

15. Die gefundenen Bedingungen sind jetzt zu discutiren.

Die Congruenzen mod.θ_{10}:

$$\left(1+\frac{a\gamma_1\gamma_2+a'\alpha_1\alpha_2}{\sqrt{(a\gamma_1^2+a'\alpha_1^2)(a\gamma_2^2+a'\alpha_2^2)}}\right)\left(1-\frac{a\gamma_1\gamma_2+a'\alpha_1\alpha_2}{\sqrt{(a\gamma_1^2+a'\alpha_1^2)(a\gamma_2^2+a'\alpha_2^2)}}\right) \equiv \frac{aa'(\alpha_1\gamma_2-\gamma_1\alpha_2)^2}{(a\gamma_1^2+a'\alpha_1^2)(a\gamma_2^2+a'\alpha_2^2)}$$

$$aa' \equiv -\Omega_1\Omega_2^2\Theta_2^2 A''$$

zeigen, dass wenn

$$\left(\frac{-\Omega_1 F}{\theta_{10}}\right) = -1$$

ist in Bezug auf einen Primfactor θ_{10} von Θ_{10}, der Bedingung (A.) durch passende Wahl des Vorzeichens der Quadratwurzel mod. θ_{10} immer genügt werden kann, und dies gilt auch für den Specialfall (A_0.). Analoge Schlüsse gelten für (A'.) und (A'_0.) bezüglich der Primfactoren von Θ_{1a}. Ebenso kann der Bedingung (B'.) oder (B'_0.) für einen Primfactor θ_{2b} genügt werden, wenn $a'_o a''_o N\theta_{2b}$ ist; d. h., wegen der Beziehung

$$\Omega^2\Theta_2^4\Theta_{2b}^{-4}\Delta_1\Delta_2^2\Theta_1 \equiv -aa'_o a''_o \pmod{\theta_{2b}},$$

wenn

$$\left(\frac{-\Delta_1\Theta_1 f}{\theta_{2b}}\right) = -1$$

ist. Analoges gilt für (B.), nicht aber für (B_0.). Hier tritt dann die Bedingung (B_{00}.) ergänzend hinzu, indem ein Primfactor θ_2, für welchen (B_0.) nicht erfüllt ist, in Θ_{2a} statt in Θ_{2c} aufzunehmen ist.

Die Möglichkeit den Bedingungen (A.), (A'.) (B.), (B'.) etc. zu entsprechen bleibt also nur noch für diejenigen Primfactoren von $\Theta_1\Theta_2$ fraglich, für welche

$$\left(\frac{-\Omega_1 F}{\theta_1}\right) = +1, \quad \left(\frac{-\Delta_1\Theta_1 f}{\theta_2}\right) = +1$$

ist, da es freisteht $\Theta_{20} = 1$ zu setzen.

Weiter ist aber

$$\left(1+\frac{a'\alpha_1\alpha_2+a\gamma_1\gamma_2}{\sqrt{(a\gamma_1^2+a'\alpha_1^2)(a\gamma_2^2+a'\alpha_2^2)}}\right)\left(1+\frac{a'\alpha_1\alpha_2-a\gamma_1\gamma_2}{\sqrt{(a\gamma_1^2+a'\alpha_1^2)(a\gamma_2^2+a'\alpha_2^2)}}\right)$$

$$\equiv \frac{a'}{a\gamma_1^2+a'\alpha_1^2}\left(\alpha_1+\alpha_2\sqrt{\frac{a\gamma_1^2+a'\alpha_1^2}{a\gamma_2^2+a'\alpha_2^2}}\right)^2 \pmod{\theta_1},$$

wo die Radicanden quadratische Reste von θ_1 sind. Daher können die Bedingungen (A.), (A'.) für einen Primfactor θ_1 nur dann nicht zugleich erfüllt sein, wenn

$$aa'a''_o(a\gamma_1^2+a'\alpha_1^2)\varepsilon\varepsilon_o R\theta_1$$

ist, wo jetzt aber $\varepsilon = \varepsilon_o\Theta_{1a}\theta_1^{-1}$ zu setzen ist, so dass diese Bedingung sich schreiben lässt

$$aa'a''\theta_1^{-1}(a\gamma_1^2+a'\alpha_1^2)R\theta_1$$

oder, weil $-aa'a'' \equiv \Omega^2 \varDelta \Theta_2^4 \Theta_1$ (mod. θ_1^2) und $\left(\frac{a\gamma_1^2 + a'\alpha_1^2}{\theta_1}\right) = \left(\frac{f_1}{\theta_1}\right)$:

$$\left(\frac{-\varDelta_1 \Theta_1 \theta_1^{-1} f_1}{\theta_1}\right) = +1.$$

Ebenso findet man, dass die Bedingungen (B.) und (B′.) für einen Primfactor θ_2 nur dann nicht zugleich erfüllt sein können, wenn

$$a a'_0 a''_0 (a'_0 \delta_1^2 + a''_0 \beta_1^2) R \theta_2$$

ist. Und da hier nach dem oben Bemerkten nur der Fall $a'_0 a''_0 R \theta_2$ noch in Betracht kommt und

$$\left(\frac{a(a'_0 \delta_1^2 + a''_0 \beta_1^2)}{\theta_2}\right) = \left(\frac{-\Omega_1 \Theta_1 F_1}{\theta_2}\right)$$

ist, kann diese Bedingung auch geschrieben werden

$$\left(\frac{-\Omega_1 \Theta_1 F_1}{\theta_2}\right) = +1.$$

Die Specialfälle (A_0.), (A'_0.) u. s. w. bedürfen hier keiner Erörterung mehr, da sie unter den Bedingungen $aa'R\theta_1$, $a'_0 a''_0 R\theta_2$ auf einander und auf die Hauptfälle zurückkommen.

Mit Rücksicht auf die Relationen (4.) Art. 9 lässt sich das Gesammtresultat der obigen Discussion folgendermassen aussprechen:

Die aus den Congruenzen (10.) *und* (11.) *verbunden mit den Gleichungen* (I.) *und* (II.) *resultirenden Congruenzen für p, q, q', q'' sind stets lösbar für die Primzahlen θ_1, für welche nicht zugleich*

$$(\theta_1.) \qquad \left(\frac{-\varDelta_1 \Theta_1 \theta_1^{-1} f_1}{\theta_1}\right) = +1, \quad \left(\frac{-\Omega_1 \Theta_1 \theta_1^{-1} F_1}{\theta_1}\right) = +1$$

und für die Primzahlen θ_2, für welche nicht zugleich

$$(\theta_2.) \qquad \left(\frac{-\varDelta_1 \Theta_1 f_1}{\theta_2}\right) = +1, \quad \left(\frac{-\Omega_1 \Theta_1 F_1}{\theta_2}\right) = +1$$

ist.

16. Diejenigen Primzahlen θ_1 und θ_2, welche den Bedingungen (θ_1.) und (θ_2.) genügen, spielen in der Theorie eine wichtige Rolle. Sie sind durch das Geschlecht G der Form f_1 vollständig bestimmt und mögen die *Grundfactoren*, ihr Product Γ die *Grundzahl* von G heissen. Es sei $\Gamma = \Gamma_1 \Gamma_2$ und Γ_1, Γ_2 bzw. Theiler von Θ_1, Θ_2. Da für die Grundfactoren die Bedingungen (A′.) und (B′.) mit (A.) und (B.) gleichbedeutend sind, bleibt nur noch übrig, letztere Bedingungen in Bezug auf dieselben zu untersuchen.

ergiebt sich aus einem Satze, der freilich erst später (Art. 33—35 und 46) bewiesen werden kann und folgendermassen lautet:

𝔄. *Ist f eine indefinite primitive ternäre quadratische Form der ungeraden Determinante $\Omega^2\Delta$ und der Invarianten Ω, Δ, so ist für die Darstellbarkeit einer zu $\Omega\Delta$ theilerfremden Zahl m durch f nothwendig, dass*

$$\text{(m.)} \qquad \left(\frac{m}{\omega}\right) = \left(\frac{f}{\omega}\right)$$

ist in Bezug auf jeden Primfactor ω von Ω, und diese Bedingungen sind auch hinreichend, wenn Δm einer der Zahlen 2, 3, 5, 6, 7 (mod. 8) congruent ist.

Es ist leicht zu constatiren, dass im vorliegenden Falle die Bedingungen (m.), soweit es sich um die Primfactoren von Θ handelt, eine Folge der bereits aufgestellten Bedingungen (A.) u. s. w. und Congruenzen des Art. 14 sind. Dies folgt schon daraus, dass bei Aufstellung jener Bedingungen die Gleichung (II.) benutzt wurde, kann aber auch nachträglich verificirt werden. Es möge genügen, dies für einen Primfactor θ_{2b} durchzuführen. Geht θ_{2b} in $\beta_1\delta_2+\delta_1\beta_2$ nicht auf, so fragt es sich, ob (II.) so auflösbar sei, dass die Congruenz (16.) stattfindet. Zur Vereinfachung bestimme man z als Wurzel der Congruenz

$$\Delta'_{1a}\Delta^2_{2a}(\beta_1\delta_2+\delta_1\beta_2)a'_0 z \equiv a''_0\beta_1\beta_2-a'_0\delta_1\delta_2+\sqrt{(a'_0\delta_1^2+a''_0\beta_1^2)(a'_0\delta_2^2+a''_0\beta_2^2)} \pmod{\Theta_{2b}}$$

und führe an Stelle von q''_1 eine neue Unbestimmte q''_2 ein durch die Substitution

$$q''_1 = q'_1 z+\Theta_{2b}q''_2,$$

durch welche der Congruenz (16.) genügt wird und die Form $F(q, q'_1, q''_1)$ der Gleichung (II''.) in eine Form $F_1(q, q'_1, q''_2)$ übergeht, deren erste Invariante den Theiler Θ^2_{2b} besitzt, während die zweite zu Θ_{2b} prim ist. Die Bedingung (m.) erfordert jetzt, dass

$$\left(\frac{-\sigma}{\theta_{2b}}\right) = \left(\frac{\Omega_{1c}(\Delta'_{10}\Delta^2_{20}A'_1+\Delta'_{1a}\Delta^2_{2a}A''z^2)}{\theta_{2b}}\right)$$

sei, welche Gleichung mit Rücksicht auf den Werth von z nach einigen Umformungen in (B'.) übergeht. Geht θ_{2b} in $\beta_1\delta_2+\delta_1\beta_2$ auf, so muss $q'\equiv 0$ oder $q''\equiv 0$ (mod. θ_{2b}) sein. Ist $q'\equiv 0$, also auch $q'_1\equiv 0$, so sei $q'_1 = \theta_{2b}q'_2$. Durch diese Substitution wird θ_{2b} Primfactor der ersten Invariante und die Bedingung (m.) fordert:

$$\left(\frac{-\sigma}{\theta_{2b}}\right) = \left(\frac{\Omega_{1c}\Delta'_{1a}A''}{\theta_{2b}}\right),$$

was mit der ersten Bedingung (B'_0.) gleichbedeutend ist.

Dass die Bedingungen (m.) auch bezüglich der in Θ nicht aufgehenden Primfactoren der ersten Invariante, also der Primfactoren von $\Omega_{1c}\Omega_{2c}\Delta_{10}\Delta_{20}$ erfüllbar sind, ist leicht ersichtlich. Denn ist ϖ ein solcher Primfactor und zur Abkürzung $\Omega_{1b}\Omega_{2b}'^2\Delta_{1a}'\Delta_{2a}^2 = \varkappa$, so geht ϖ in $\varkappa$ nicht auf und $\varkappa p_1^2 - \sigma$ ist durch $\Theta_{20}^2\Theta_{2a}^2 F(q, q_1', q_1'')$ darzustellen. Die Bedingung (m.) lautet also hier:

$$\left(\frac{\varkappa p_1^2 - \sigma}{\varpi}\right) = \left(\frac{F}{\varpi}\right).$$

Ihr entsprechend lässt sich aber bekanntlich p_1 (mod. ϖ) stets wählen, ausgenommen, wenn $\varpi = 3$, $\varkappa \equiv \sigma$ (mod. 3) und $\sigma F R 3$ ist, in welchem Falle ähnlich wie in Art. 11 zu verfahren ist.

17. Unter Voraussetzung des Satzes 𝔄. gilt also auch folgender:

Für die Aequivalenz der Formen f_1 und f_2 desselben Geschlechtes G ist nothwendig und hinreichend, dass es einen (positiven oder negativen) Theiler d von $2\Omega_1\Delta_1\Theta_1$ giebt, für welchen in Bezug auf jeden Grundfactor θ von G die Bedingung erfüllt ist

$$\left(\frac{\chi_{12}}{\theta}\right) = \left(\frac{d'}{\theta}\right).$$

Versteht man unter dem Totalcharakter einer Zahl die Gesammtheit ihrer Charaktere in Bezug auf sämmtliche Grundfactoren von G, so bilden die Totalcharaktere der Theiler d (d') eine Gruppe 𝔊, welche die Gruppe von G heissen möge. Der vorige Satz lässt sich dann kurz so aussprechen:

𝔅. ***Für die Aequivalenz der Formen f_1 und f_2 desselben Geschlechts G ist nothwendig und hinreichend, dass der Totalcharakter von χ_{12} zu 𝔊 gehört.***

Um über die Aequivalenz zweier beliebigen Formen desselben Geschlechts G der Invarianten $\Omega\Theta$, $\Delta\Theta$ zu entscheiden, suche man zwei denselben äquivalente Hauptrepräsentanten $\mathfrak{f}_k = \begin{pmatrix} \mathfrak{a}_k, & \mathfrak{a}_k', & \mathfrak{a}_k'' \\ \mathfrak{b}_k, & \mathfrak{b}_k', & \mathfrak{b}_k'' \end{pmatrix}$, ($k = 1$ oder 2), deren Coefficienten also bezüglich der Primfactoren von $\Omega\Delta\Theta$ den Bedingungen genügen:

$$|\mathfrak{a}_k| = 0, \quad |\mathfrak{a}_k'| = |\Omega\Theta|, \quad |\mathfrak{a}_k''| = |\Omega\Delta\Theta^2|; \quad |\mathfrak{b}|, \quad |\mathfrak{b}'|, \quad |\mathfrak{b}''| \text{ alle } > |\Omega\Delta\Theta^2|.$$

Dann geht $\mathfrak{f}_k$ aus einer Form $\mathfrak{g}_k = \begin{pmatrix} \mathfrak{a}_k, & \mathfrak{a}_k', & (\Theta_1\Theta_2)^{-2}\mathfrak{a}_k'' \\ (\Theta_1\Theta_2)^{-1}\mathfrak{b}_k, & (\Theta_1\Theta_2)^{-1}\mathfrak{b}_k', & \mathfrak{b}_k'' \end{pmatrix}$ der theilerfremden Invarianten $\Omega\Theta_2^2$, $\Delta\Theta_1$ hervor durch die Substitution:

$$\text{(S.)} \qquad x = y, \quad x' = y', \quad x'' = \Theta_1\Theta_2 y''.$$

Die Formen $\mathfrak{g}_1$ und $\mathfrak{g}_2$ gehören demselben Geschlechte an, sind daher äqui-

valent und lassen sich durch unimodulare Substitutionen S_1 und S_2 aus derselben Hauptrepräsentante f ableiten. Somit gehen $\mathfrak{f}_1$ und $\mathfrak{f}_2$ aus f hervor durch die Substitutionen S_1S und S_2S der Determinante $\Theta_1\Theta_2$. Diese Substitutionen sind in die Formen T_1E_1, T_2E_2 zu bringen, wo T_1, T_2 eingerichtete Substitutionen der Determinante $\Theta_1\Theta_2$ sind, E_1, E_2 unimodular. Geht nun f durch T_1, T_2 bzw. in f_1, f_2 über, so sind die vorgelegten Formen äquivalent oder nicht, je nachdem f_1 und f_2 es sind oder nicht.

18. Von den Symbolen χ gilt folgender Satz:

Haben

$$a\gamma_1^2+a'\alpha_1^2,\quad a\gamma_2^2+a'\alpha_2^2,\quad a\gamma_3^2+a'\alpha_3^2$$

denselben quadratischen Charakter in Bezug auf die Primzahl θ, so ist das Product

$$\chi(\alpha_1,\ \alpha_2)\chi(\alpha_2,\ \alpha_3)\chi(\alpha_3,\ \alpha_1)$$

quadratischer Rest von θ.

Beweis: Es sind folgende Fälle zu unterscheiden:

1º.) γ_1, γ_2, γ_3 sind nicht durch θ theilbar.

Setzt man zur Abkürzung

$$\alpha_1\equiv\gamma_1\lambda_1,\quad \alpha_2\equiv\gamma_2\lambda_2,\quad \alpha_3\equiv\gamma_3\lambda_3 \pmod{\theta},$$

so wird

$$4\chi(\alpha_1,\ \alpha_2)\equiv 2\left(1+\frac{a+a'\lambda_1\lambda_2}{\sqrt{(a+a'\lambda_1^2)(a+a'\lambda_2^2)}}\right)$$

$$\equiv\frac{[\sqrt{\varkappa(a+a'\lambda_1^2)}+\sqrt{\varkappa(a+a'\lambda_2^2)}]^2-a'\varkappa(\lambda_1-\lambda_2)^2}{\varkappa\sqrt{(a+a'\lambda_1^2)(a+a'\lambda_2^2)}} \pmod{\theta},$$

wo $\varkappa$ irgend eine Zahl bedeutet, die mit $a+a'\lambda_1^2$ gleichen quadratischen Charakter hat mod. θ. Berechnet man nun

$$4^3.\chi(\alpha_1,\ \alpha_2).\chi(\alpha_2,\ \alpha_3).\chi(\alpha_3,\ \alpha_1)$$

nach der Formel

$$(x_1^2-a'\varkappa y_1^2)(x_2^2-a'\varkappa y_2^2)(x_3^2-a'\varkappa y_3^2) = [x_1x_2x_3+a'\varkappa(x_1y_2y_3+x_2y_3y_1+x_3y_1y_2)]^2$$
$$-a'\varkappa[x_2x_3y_1+x_3x_1y_2+x_1x_2y_3+a'\varkappa y_1y_2y_3]^2,$$

indem man setzt:

$$x_1\equiv\sqrt{\varkappa(a+a'\lambda_2^2)}+\sqrt{\varkappa(a+a'\lambda_3^2)},\quad y_1=\lambda_2-\lambda_3,$$
$$x_2\equiv\sqrt{\varkappa(a+a'\lambda_3^2)}+\sqrt{\varkappa(a+a'\lambda_1^2)},\quad y_2=\lambda_3-\lambda_1,$$
$$x_3\equiv\sqrt{\varkappa(a+a'\lambda_1^2)}+\sqrt{\varkappa(a+a'\lambda_2^2)},\quad y_3=\lambda_1-\lambda_2,$$

so erhält man

$$\begin{aligned} x_2x_3y_1+x_3x_1y_2+x_1x_2y_3 &\equiv \lambda_1x_1(x_2-x_3)+\lambda_2x_2(x_3-x_1)+\lambda_3x_3(x_1-x_2) \\ &\equiv a'\varkappa[\lambda_1(\lambda_3^2-\lambda_2^2)+\lambda_2(\lambda_1^2-\lambda_3^2)+\lambda_3(\lambda_2^2-\lambda_1^2)] \\ &\equiv -a'\varkappa y_1y_2y_3 \pmod{\theta}; \end{aligned}$$

daher

$$4^3.\chi(\alpha_1,\alpha_2)\chi(\alpha_2,\alpha_3)\chi(\alpha_3,\alpha_1) \equiv \frac{[x_1x_2x_3+a'\varkappa(x_1y_2y_3+x_2y_3y_1+x_3y_1y_2)]^2}{\varkappa^3(a+a'\lambda_1^2)(a+a'\lambda_2^2)(a+a'\lambda_3^2)} \pmod{\theta}$$

und

$$\chi(\alpha_1,\alpha_2)\chi(\alpha_2,\alpha_3)\chi(\alpha_3,\alpha_1)R\theta.$$

2°.) α_1, α_2, α_3 nicht durch θ theilbar.

Man setze $\gamma_1\equiv\alpha_1\lambda_1$ u. s. w. wie vorhin.

3°.) $\gamma_1\equiv\alpha_2\equiv 0 \pmod{\theta}$.

Es wird

$$2\chi_{12}\equiv 1,\quad 2\chi_{23}\equiv 1+\frac{a\gamma_3}{\sqrt{a(a\gamma_3^2+a'\alpha_3^2)}},\quad 2\chi_{31}\equiv 1+\frac{a'\alpha_3}{\sqrt{a'(a\gamma_3^2+a'\alpha_3^2)}} \pmod{\theta},$$

$$2^2\chi_{23}\chi_{31} \equiv \frac{[\sqrt{a(a\gamma_3^2+a'\alpha_3^2)}+a\gamma_3][\sqrt{a'(a\gamma_3^2+a'\alpha_3^2)}+a'\alpha_3]}{\sqrt{aa'}(a\gamma_3^2+a'\alpha_3^2)},$$

$$2^4\chi_{12}\chi_{23}\chi_{31} \equiv \frac{[\sqrt{\varkappa a}\gamma_3+\sqrt{\varkappa a'}\alpha_3+\sqrt{\varkappa(a\gamma_3^2+a'\alpha_3^2)}]^2}{\varkappa(a\gamma_3^2+a'\alpha_3^2)} \pmod{\theta};$$

$$\chi_{12}\chi_{23}\chi_{31}R\theta.$$

4°.) $\gamma_1\equiv\gamma_2\equiv\alpha_3\equiv 0 \pmod{\theta}$.

Es wird $\chi_{12}\equiv 1$, $2\chi_{23}\equiv 1$, $2\chi_{31}\equiv 1$; also $\chi_{12}\chi_{23}\chi_{31}R\theta$.

Die übrigen Fälle sind analog oder haben keine Bedeutung.

19. Es ist jetzt noch die Frage zu beantworten, ob die Zahl $\chi(\alpha_1,\alpha_2)$ alle möglichen Gesammtcharaktere bezüglich der Primfactoren von Γ_1 annehmen könne, wenn man α_1 und γ_1 festhält, dagegen α_2 und γ_2 alle möglichen Werthe durchlaufen lässt, für welche $(a\gamma_1^2+a'\alpha_1^2)(a\gamma_2^2+a'\alpha_2^2)R\Gamma_1$ wird; mit anderen Worten, ob man α_2 und γ_2 so wählen könne, dass in Bezug auf jeden Primfactor θ von Γ_1 die Zahl $\chi(\alpha_1,\alpha_2)$ beliebig Rest oder Nichtrest werde. Es sei

1°.) $\gamma_1\equiv\gamma_2\equiv 1 \pmod{\theta}$; also

$$2\chi \equiv 1+\frac{a+a'\alpha_1\alpha_2}{\sqrt{(a+a'\alpha_1^2)(a+a'\alpha_2^2)}} \pmod{\theta}$$

oder

$$(2\chi-1)^2aa'(\alpha_2-\alpha_1)^2 \equiv 4(\chi-\chi^2)(a+a'\alpha_1\alpha_2)^2.$$

Da θ Grundfactor ist, so ist (Art. 15) $aa'R\theta$; also muss auch $(\chi-\chi^2)R\theta$ sein, wenn nicht $\chi\equiv 1$ ist, und man erhält

$$\alpha_2 \equiv -\frac{2a\sqrt{\chi-\chi^2}+\sqrt{aa'}\alpha_1(2\chi-1)}{2a'\alpha_1\sqrt{\chi-\chi^2}-\sqrt{aa'}(2\chi-1)} \pmod{\theta},$$

vorausgesetzt, dass der Nenner nicht durch θ theilbar ist, was sich, da aa' nicht durch θ theilbar ist, durch zweckmässige Wahl der Vorzeichen der Quadratwurzeln stets erreichen lässt, wenn nicht zugleich $2\chi\equiv 1$, $\alpha_1\equiv 0$ ist. Für $\alpha_1\equiv 0$ aber hat man einfacher

$$\alpha_2 \equiv \frac{2}{2\chi-1}\sqrt{\frac{a(\chi-\chi^2)}{a'}} \pmod{\theta}.$$

Da für $\alpha_2\equiv\alpha_1 \pmod{\theta}$ $\chi\equiv 1$ also $R\theta$ wird, fragt es sich nur, ob χ und $1-\chi$ zugleich $N\theta$ sein können und $2\chi-1$ nicht durch θ theilbar. Dass dies für $\theta>5$ stets möglich ist, folgt aus bekannten Sätzen über die quadratischen Reste.

2°.) $\gamma_1\equiv 0$, $\gamma_2\equiv 1 \pmod{\theta}$.

Es wird

$$2\chi\equiv 1+\frac{a'\alpha_2}{\sqrt{a'(a+a'\alpha_2^2)}},\quad \alpha_2\equiv\frac{2\chi-1}{2}\sqrt{\frac{a}{a'(\chi-\chi^2)}} \pmod{\theta},$$

was zu demselben Resultate führt.

Die Fälle $\theta=3$ und $\theta=5$ bedürfen einer besondern Untersuchung. Da $aa'R\theta$ sein muss und χ nur von $\frac{a'}{a} \pmod{\theta}$ abhängt, genügt es, die Fälle $a\equiv a'\equiv 1 \pmod{3}$, $a\equiv\pm a'\equiv 1 \pmod{5}$ zu discutiren. Für den Modul 3 erhält man, wenn

$$\gamma_1\equiv\gamma_2\equiv 1;\quad \gamma_1\equiv 1,\quad \gamma_2\equiv 0;\quad \gamma_1\equiv\gamma_2\equiv 0$$

ist, bezw.

$$2\chi\equiv 1+\frac{1+\alpha_1\alpha_2}{\sqrt{(1+\alpha_1^2)(1+\alpha_2^2)}};\quad 2\chi\equiv 1+\frac{\alpha_1}{\sqrt{1+\alpha_1^2}};\quad \chi\equiv 1,$$

und demnach folgende Tafel:

f_1R3:	$\gamma\equiv 1$,	$\alpha\equiv 0$,	$\gamma_1\equiv 1$,	$\alpha_1\equiv 0$;	$\chi\equiv 1$
			$\gamma_1\equiv 0$,	$\alpha_1\equiv 1$	2
	$\gamma\equiv 0$,	$\alpha\equiv 1$,	$\gamma_1\equiv 1$,	$\alpha_1\equiv 0$	2
			$\gamma_1\equiv 0$,	$\alpha_1\equiv 1$	1
f_1N3:	$\gamma\equiv 1$,	$\alpha\equiv 1$,	$\gamma_1\equiv 1$,	$\alpha_1\equiv 1$	1
				$\alpha_1\equiv -1$	2,

aus welcher ersichtlich ist, dass auch für den Modul 3 die Zahl χ sowohl $R3$ als $N3$ werden kann. Dasselbe würde sich für den Modul 5 ergeben. Und da offenbar dasselbe für die Zahlen $\chi(\beta_1, \beta_2)$ bezüglich der Primfactoren von Γ_2 gilt, folgt hieraus, dass, wenn die Zahlen α_1, β_1, γ_1, δ_1 (d. h. die Form f_1) gegeben sind, man α_2, β_2, γ_2, δ_2, d. h. die Form f_2 stets so wählen kann, dass χ_{12} einen beliebig vorgeschriebenen Totalcharakter erhält. Ist m die Anzahl der Grundfactoren von G, so beträgt die Anzahl der verschiedenen Totalcharaktere 2^m und jedem derselben entsprechen wirklich Zahlen χ.

20. Ist 2^n die Ordnung (die Anzahl der verschiedenen Totalcharaktere) der Gruppe $\mathfrak{G}$, so kann man irgend welche 2^m Zahlen χ, denen diese 2^m verschiedenen Totalcharaktere zukommen, in 2^{m-n} Zeilen von je 2^n ordnen, indem man zwei χ in dieselbe oder in verschiedene Zeilen stellt, je nachdem der Totalcharakter ihres Productes zu $\mathfrak{G}$ gehört oder nicht. Demgemäss bezeichne ich diese Zahlen durch

$$\begin{array}{llll} \chi_{11} & \chi_{12} & \cdots & \chi_{12^n}, \\ \chi_{21} & \chi_{22} & \cdots & \chi_{22^n}, \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \chi_{2^{m-n}1} & \chi_{2^{m-n}2} & \cdots & \chi_{2^{m-n}2^n}, \end{array}$$

wo $\chi_{11} \equiv 1 \pmod{\Gamma}$ oder sonst ein χ sein mag, dem der Hauptcharakter zukommt, so dass die erste Zeile diejenigen χ enthält, deren Totalcharakter zu $\mathfrak{G}$ gehört. Die Aufeinanderfolge in der ersten Zeile ist beliebig; in den übrigen soll sie dadurch geregelt sein, dass χ_{ik} mit $\chi_{i1}\chi_{1k}$ gleichen Totalcharakter haben soll. Entspricht der Zahl χ_{ik} die Form f_{ik}, wobei zur Abkürzung $f_{i1} = f_i$ sei, so sind nach Satz $\mathfrak{B}$ zwei Formen f_{ik} und $f_{i'k'}$ äquivalent oder nicht, je nachdem $i = i'$ oder $i \gtrless i'$ ist, und man erhält 2^{m-n} nicht äquivalente Formen, also den Satz:

$\mathfrak{C}$. ***Ist** m **die Anzahl der Grundfactoren für das Geschlecht** G **und** 2^n **die Ordnung der zu** G **gehörigen Gruppe** $\mathfrak{G}$**, so ist die Klassenanzahl von** G **gleich** 2^{m-n}.*

Die Zahl χ_{ik} möge kurz ***charakteristische Zahl*** von f_{ik} heissen ($\chi_{i1} = \chi_i$).

Reducirt sich Θ auf eine Primzahl θ oder auf θ^2, so kann die Klassenanzahl des Geschlechtes G nur dann grösser als 1, also gleich 2 sein, wenn $m = 1$, $n = 0$ ist. Es muss somit θ ein Grundfactor von G sein; d. h. G muss den Bedingungen genügen $\left(\frac{-\Delta_1 f_1}{\theta}\right) = +1$, $\left(\frac{-\Omega_1 F_1}{\theta}\right) = +1$. Damit

ferner $n = 0$ sei, müssen alle positiven und negativen Theiler von $2\Omega_1\Delta_1$ quadratische Reste von θ sein, insbesondere $\left(\frac{-1}{\theta}\right) = \left(\frac{2}{\theta}\right) = +1$, folglich $\theta \equiv 1$ (mod.8) und $\theta R \Omega_1 \Delta_1$ zufolge des quadratischen Reciprocitätsgesetzes. Hierdurch reduciren sich die vorigen Bedingungen auf $\left(\frac{f_1}{\theta}\right) = \left(\frac{F_1}{\theta}\right) = +1$ und es gilt der Satz:

Sind Ω_2^2, Δ_2^2 die grössten in Ω, Δ aufgehenden Quadrate, $\Omega = \Omega_1\Omega_2^2$, $\Delta = \Delta_1\Delta_2^2$, hat ferner das Product $\Omega_1\Omega_2\Delta_1\Delta_2$ keinen quadratischen Theiler und ist θ eine in $\Omega\Delta$ nicht aufgehende Primzahl, so enthält jedes Geschlecht von indefiniten ternären Formen f_1 der Invarianten $\Omega\theta$, $\Delta\theta$ ($\Omega\theta^2$, $\Delta\theta^2$) im allgemeinen bloss eine Klasse, und nur wenn zugleich

$$(\theta.) \qquad \theta \equiv 1 \text{ (mod.8)}, \quad \theta R \Omega_1 \Delta_1, \quad \left(\frac{f_1}{\theta}\right) = \left(\frac{F_1}{\theta}\right) = +1$$

ist, enthält das betreffende Geschlecht zwei Klassen.

Wählt man die Form $f = \begin{pmatrix} a, & a', & a'' \\ b, & b', & b'' \end{pmatrix}$ gemäss den Bedingungen des Art. 2 und (was möglich) so, dass $aR\theta$ ist, so lassen sich die beiden Klassen der Invarianten $\Omega\theta$, $\Delta\theta$ durch die Formen repräsentiren

$$f_1 = \begin{pmatrix} a, & \theta^2 a', & a'' \\ \theta b, & b', & \theta b'' \end{pmatrix}, \quad f_2 = \begin{pmatrix} a + 2b''\alpha' + a'\alpha'^2, & \theta^2 a', & a'' \\ \theta b, & b' + b\alpha', & \theta(b'' + a'\alpha') \end{pmatrix},$$

wo α' irgend eine Zahl ist, welche den Bedingungen genügt:

$$|a + a'\alpha'^2|_\theta = 0, \quad (a + a'\alpha'^2) R\theta, \quad \left(1 + \sqrt{\frac{a}{a + a'\alpha'^2}}\right) N\theta.$$

Denn in (A.), (A'.) Art. 14 ist dann $\gamma_1 = \gamma_2 = 1$, $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = \alpha'$ zu setzen.

Zu *Riemanns* Abhandlung „Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse"*).

(Von Herrn *H. von Mangoldt* in Aachen.)

Von den verschiedenen Fragen, zu welchen die bekannte Abhandlung *Riemanns* „Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse"**) Anlass giebt, haben einige in der Arbeit des Herrn *J. Hadamard* „Étude sur les propriétés des fonctions entières et en particulier d'une fonction considérée par *Riemann*"***) ihre Erledigung gefunden. Dadurch ist auf diesem Gebiete zum ersten mal seit beinahe 34 Jahren ein wirklicher Fortschritt erzielt. Zugleich ist für weitere Untersuchungen eine sichere Grundlage gewonnen.

Unter Benutzung der von Herrn *Hadamard* gewonnenen Ergebnisse wird im Nachfolgenden zunächst die Frage behandelt, ob die Anzahl derjenigen Nullstellen der *Riemann*schen Function $\xi(t)$, deren reelle Theile zwischen Null und einer sehr grossen positiven Zahl h enthalten sind, wirklich durch den von *Riemann* angegebenen Ausdruck

$$\frac{h}{2\pi}\, l\frac{h}{2\pi}-\frac{h}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\cdot hlh-\frac{1+l(2\pi)}{2\pi}\cdot h\dagger)$$

näherungsweise dargestellt wird, und wie gross der Unterschied höchstens werden kann. Diese Frage ist zwar schon in den Nummern 36 und 37 der Abhandlung des Herrn *Hadamard* gestreift, aber noch nicht bis zur

---

*) Ein Auszug aus der nachstehenden Arbeit ist bereits in dem Sitzungsberichte der Königl. Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin vom 19. Juli 1894 veröffentlicht worden.

**) Monatsberichte der Berliner Akademie, November 1859, und Gesammelte Mathematische Werke, 1. Auflage, 1876, Seite 136—144; 2. Auflage, 1892, Seite 145—153.

***) Journal de Mathématiques pures et appliquées, 4ème Série, Tome 9, 1893, p. 171—215.

†) Das Zeichen la bedeutet hier, so wie überall im Nachfolgenden, den natürlichen Logarithmus von a.

äussersten gegenwärtig erreichbaren Grenze erledigt. Denn aus den Ausführungen des Herrn *Hadamard* geht — auch wenn man die nicht ganz einwandfreien Betrachtungen im Anfang der No. 37 in geeigneter Weise abändert, — nur hervor, dass die Grössenordnung der erwähnten Anzahl mit der des Productes $h.lh$ übereinstimmt. Ob aber gerade durch den in *Riemanns* Formel vorkommenden Werth $\frac{1}{2\pi}$ des Coefficienten dieses Productes die grösste mögliche Uebereinstimmung erreicht wird, und ob auch das nächstfolgende Glied von der Ordnung h in dieser Formel richtig bestimmt ist, das bleibt alles unentschieden. Herr *Hadamard* giebt dies selbst zu, indem er seine hierauf sich beziehenden Betrachtungen mit den Worten schliesst: „... de sorte que nous ne sommes pas à même de décider si le coefficient $\frac{1}{2\pi}\cdots$ est exact ou non".

Das Endergebniss des diesem Gegenstande gewidmeten Theiles der nachfolgenden Betrachtungen ist folgendes:

Solange die reelle positive Zahl h nicht grösser als 12 ist, ist die Anzahl derjenigen Wurzeln der Gleichung

$$\xi(t) = 0,$$

deren reeller Theil zwischen 0 *und h enthalten ist, gleich Null. Für alle grösseren Werthe von h ist der Unterschied zwischen dieser Anzahl und dem Riemannschen Näherungswerth*

$$\frac{h}{2\pi}\cdot l\frac{h}{2\pi}-\frac{h}{2\pi}$$

absolut genommen kleiner als

$$0{,}34.(lh)^2+1{,}35.lh+2{,}58.$$

Mit Hülfe eines anderen bei Gelegenheit dieser Untersuchung gewonnenen Satzes wird sodann in einem zweiten Abschnitt für eine gewisse Klasse unendlicher Reihen, welche zur analytischen Darstellung zahlentheoretischer Functionen dienen, und auf welche das *Riemann*sche Verfahren führt, der Beweis der Convergenz erbracht. Als ein specieller Fall eines der hierbei gewonnenen allgemeineren Sätze ergiebt sich,

dass die in Riemanns Abhandlung vorkommende unendliche Reihe

$$\Sigma^{\alpha}\left\{Li(x^{\frac{1}{2}+\alpha i})+Li(x^{\frac{1}{2}-\alpha i})\right\}$$

bei der dort näher angegebenen Anordnung ihrer Glieder wirklich convergirt und auch die von Riemann angegebene Summe hat.

Die *Riemann*schen Behauptungen finden somit in allen wesentlichen Punkten Bestätigung.

Die Frage dagegen, ob die Wurzeln der Gleichung $\xi(t) = 0$ wirklich, wie *Riemann* es für sehr wahrscheinlich hält, alle reell sind, bleibt wie bisher unerledigt.

Wie dem Verfasser erst nach Vollendung seiner Arbeit bekannt geworden ist, findet sich ein Theil der Grundgedanken dieses zweiten Abschnittes bereits ausgesprochen in der Habilitationsschrift des Herrn *Adolf Piltz* „Ueber die Häufigkeit der Primzahlen in arithmetischen Progressionen und über verwandte Gesetze", Jena 1884. Die auf S. 42—43 dieser Schrift gegebenen Andeutungen darüber, wie sich die Convergenz der oben erwähnten Klasse unendlicher Reihen beweisen lasse, wenn man annimmt, dass die von *Riemann* ausgesprochenen Behauptungen über die Vertheilung der Nullstellen der Function $\xi(t)$ im Wesentlichen richtig seien, und die in S. 33—36 enthaltene Angabe eines Weges, welcher zu der Endformel der *Riemann*schen Abhandlung führt, decken sich theilweise mit den im Nachfolgenden vorkommenden Entwickelungen.

I.

Ueber die Vertheilung der Nullstellen der Function $\xi(t)$.

Aus jeder der beiden von *Riemann* gegebenen Darstellungen der Function $\xi(t)$ durch bestimmte Integrale folgt leicht, dass diese Function eine Nullstelle, deren reeller Theil gleich Null wäre, nicht besitzt. Dagegen sind, wie aus der in der Einleitung angeführten Arbeit des Herrn *Hadamard* hervorgeht, Nullstellen, deren reelle Theile von Null verschieden sind, wirklich vorhanden, und zwar in unendlicher Menge.

Demgemäss seien nun

$$\alpha_1, \quad \alpha_2, \quad \alpha_3, \quad \ldots$$

diejenigen Nullstellen, deren reelle Theile *positiv* sind. Dabei sei jede etwa vorhandene mehrfache Nullstelle in diese Reihe so oft aufgenommen, als ihre Ordnungszahl angiebt; und die Anordnung sei eine solche, dass die reellen Theile der einzelnen Glieder mit wachsendem Index niemals abnehmen.

Bei Anwendung dieser Bezeichnungen kann man die Endergebnisse,

welche aus den im dritten Theil der Abhandlung des Herrn *Hadamard* durchgeführten Untersuchungen hervorgehen, folgendermassen aussprechen.

Das unendliche Product

$$\prod_{\nu=1}^{\infty}\left(1-\frac{t^2}{\alpha_\nu^2}\right)$$

ist für jeden Werth der complexen Veränderlichen t unbedingt convergent und stimmt mit der Function $\xi(t)$ bis auf einen constanten Factor überein. Man hat daher die Gleichung

$$(1.)\qquad \xi(t) = \xi(0).\prod_{\nu=1}^{\infty}\left(1-\frac{t^2}{\alpha_\nu^2}\right).$$

Fasst man in der Ebene der complexen Veränderlichen t einen ganz im Endlichen liegenden Bereich B ins Auge, dessen Begrenzung keine Nullstelle der Function $\xi(t)$ enthält, so ist die Anzahl der im Innern dieses Bereiches liegenden Nullstellen bekanntlich gleich dem in positiver Richtung über die Begrenzung von B erstreckten Integral $\int dl\xi(t)$ dividirt durch $2\pi i$. Oder anders und etwas anschaulicher ausgedrückt:

Die Anzahl der im Innern von B enthaltenen Nullstellen ist gleich $\frac{1}{2\pi}$ multiplicirt mit dem Zuwachs, welchen die Abweichung der Function $\xi(t)$ erfährt, wenn die Veränderliche t die Begrenzung von B in positiver Richtung durchläuft.

Obgleich man nun diesen Satz nicht ohne weiteres zur Bestimmung der Anzahl der in einem gegebenen Bereiche enthaltenen Nullstellen der Function $\xi(t)$ benutzen kann, so erweist es sich doch als möglich, durch eine Untersuchung der Aenderungen, welche die Abweichung der Function $\xi(t)$ bei gewissen passend gewählten Bewegungen der Veränderlichen t erfährt, über die Lage der Nullstellen einige Aufschlüsse zu gewinnen, und zwar in folgender Weise:

Man bezeichne durch $a < b$ zwei beliebige *reelle* Constanten und lasse die Veränderliche t längs des geraden Verbindungsweges vom Punkte $a-i\frac{3}{2}$ zum Punkte $b-i\frac{3}{2}$ übergehen. Dann dreht sich jede einzelne der Geraden, welche die Nullstellen der Function $\xi(t)$ mit dem beweglichen Punkte t verbinden, in *positivem* Sinne. Denn, wie schon *Riemann* bewiesen hat, liegt keine der Nullstellen der Function $\xi(t)$ ausserhalb desjenigen Streifens, welcher von den beiden durch die Punkte $-\frac{i}{2}$ und $+\frac{i}{2}$ gehenden Parallelen zur Axe des Reellen begrenzt wird. Die Bahn des Punktes t

verläuft aber ausserhalb dieses Streifens und lässt denselben, wenn die positive Richtung der Ordinatenaxe wie üblich links von derjenigen der Abscissenaxe liegt, ebenfalls zur Linken.

Die Zunahmen, welche die Abweichungen der einzelnen Linearfactoren der Function $\xi(t)$ bei der angegebenen Bewegung des Punktes t erfahren, sind daher ***sämmtlich positiv,*** und eben deswegen bleibt die Summe jeder beliebigen endlichen Anzahl dieser Zunahmen stets kleiner als der Zuwachs, um welchen sich die Abweichung der Function $\xi(t)$ selbst bei der gleichen Bewegung vergrössert.

Nun sei

Φ der eben erwähnte Zuwachs der Abweichung der Function $\xi(t)$,

A die Anzahl derjenigen Nullstellen der Function $\xi(t)$, deren reelle Theile nicht ausserhalb des Intervalles $a \dots b$ liegen, jede so oft gezählt, als ihre Ordnungszahl angiebt, und

S die Summe aller (positiv zu nehmenden, hohlen) Winkel, unter welchen die Bahn des Punktes t von diesen Nullstellen aus gesehen erscheint, wobei wieder jeder einzelne Winkel so oft zu zählen ist, als die Ordnungszahl der zugehörigen Nullstelle angiebt. Dann ist insbesondere

$$(2.) \qquad S < \Phi.$$

Ferner ist, wenn das Zeichen arctg den zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ liegenden Bogen bedeutet,

$$(3.) \qquad A.\operatorname{arctg}\frac{b-a}{2} < S.$$

Denn die Nullstellen, welche bei der Bildung der Summe S zu berücksichtigen sind, liegen sämmtlich im Innern oder auf der Begrenzung desjenigen Rechtecks, welches die Punkte

$$a \pm \frac{i}{2} \quad \text{und} \quad b \pm \frac{i}{2}$$

zu Ecken hat. Denkt man sich aber die Bahn des Punktes t von irgend einem Punkte dieses Rechtecks aus betrachtet, so wird der Winkel, unter welchem dieselbe erscheint, wie aus einfachen geometrischen Ueberlegungen hervorgeht, dann am kleinsten, wenn sein Scheitel mit einer der beiden Ecken $a+\frac{i}{2}$ oder $b+\frac{i}{2}$ zusammenfällt, und erreicht dann gerade den Werth $\operatorname{arctg}\frac{b-a}{2}$. Jedes Glied der Summe S ist also $\geqq \operatorname{arctg}\frac{b-a}{2}$, folg-

lich, wie behauptet wurde

$$(3.)\qquad A.\operatorname{arctg}\frac{b-a}{2} < S,$$

und um so mehr

$$(4.)\qquad A.\operatorname{arctg}\frac{b-a}{2} < \Phi.$$

Für die Zahl Φ kann man aber durch die folgenden Ueberlegungen eine obere Grenze gewinnen: Man hat nach *Riemann*

$$(5.)\qquad \xi(t) = \Pi\left(\frac{1}{4}+i\frac{t}{2}\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}+it\right)\cdot\pi^{-\left(\frac{1}{4}+i\frac{t}{2}\right)}.\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right),$$

wobei die Zeichen Π und ζ die gleiche Bedeutung haben, wie in *Riemanns* Abhandlung. Setzt man hier

$$t = \tau - i\frac{3}{2},$$

wo τ eine *reelle* Veränderliche bedeuten soll, so erhält man

$$\xi\left(\tau-i\frac{3}{2}\right) = \Pi\left(1+i\frac{\tau}{2}\right)\cdot(1+i\tau).\pi^{-\left(1+i\frac{\tau}{2}\right)}.\zeta(2+i\tau),$$

oder

$$\xi\left(\tau-i\frac{3}{2}\right) = \Pi\left(i\frac{\tau}{2}\right)\cdot\left(1+i\frac{\tau}{2}\right)\cdot(1+i\tau).\pi^{-\left(1+i\frac{\tau}{2}\right)}.\zeta(2+i\tau).$$

Versteht man nun unter $l\pi$ den *reellen* und unter

$$l\xi\left(\tau-i\frac{3}{2}\right);\quad l\Pi\left(i\frac{\tau}{2}\right);\quad l\left(1+i\frac{\tau}{2}\right);\quad l(1+i\tau);\quad l\zeta(2+i\tau)$$

diejenigen Werthe der Logarithmen, welche für $\tau = 0$ *reell* sind und sich zugleich mit τ *stetig* ändern, so folgt

$$(6.)\quad l\xi\left(\tau-i\frac{3}{2}\right) = l\Pi\left(i\frac{\tau}{2}\right)+l\left(1+i\frac{\tau}{2}\right)+l(1+i\tau)-\left(1+i\frac{\tau}{2}\right)l\pi+l\zeta(2+i\tau).$$

Zur Umformung des ersten Gliedes der rechten Seite dieser Gleichung kann man die Ergebnisse benutzen, welche Herr *T. J. Stieltjes* in seiner Abhandlung „Sur le développement de $\log\Gamma(a)$“ *) bei Untersuchung der Frage, ob und wie man die sogenannte *Stirling*sche Formel auf imaginäre

*) Journal de Mathématiques pures et appliquées, 4ème Série, Tome 5, 1889, p. 425—444.

Werthe der unabhängigen Veränderlichen ausdehnen könne, gewonnen hat. Nach Gleichung (20) dieser Abhandlung ist nämlich, wenn man die negativen reellen Werthe aus dem Gebiet der complexen Veränderlichen s ausschliesst, für alle übrigen Werthe von s

$$(7.)\qquad l\Pi(s) = ls + l\Gamma(s) = (s+\tfrac{1}{2})ls - s + \tfrac{1}{2}l(2\pi) + J(s),$$

wobei für alle vorkommenden Logarithmen diejenigen Werthe zu nehmen sind, die bei stetiger Fortsetzung für reelle positive Werthe von s ebenfalls reell werden, und wo $J(s)$ ein Ergänzungsglied bedeutet, dessen absoluter Werth eine leicht anzugebende Grenze nie überschreitet. Bezeichnet man nämlich durch R den absoluten Werth und durch θ die Abweichung der complexen Zahl s, so ist nach Formel (26) der Abhandlung des Herrn *Stieltjes:*

$$(8.)\qquad |J(s)| < \frac{1}{12.R.\left(\cos\frac{\theta}{2}\right)^2}.$$

Unterwirft man nun die Veränderliche τ der Bedingung

$$\tau > 0,$$

und setzt man in (7.) $s = i\frac{\tau}{2}$, so erhält man

$$l\Pi\left(i\frac{\tau}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}+i\frac{\tau}{2}\right)\cdot\left(l\frac{\tau}{2}+i\frac{\pi}{2}\right) - i\frac{\tau}{2} + \frac{1}{2}l(2\pi) + J\left(i\frac{\tau}{2}\right),$$

wo $l\frac{\tau}{2}$ den reellen Werth bedeutet, und hierauf aus (6.)

$$(9.)\qquad \begin{cases} l\xi\left(\tau - i\frac{3}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}+i\frac{\tau}{2}\right)\left(l\frac{\tau}{2}+i\frac{\pi}{2}\right) + l\left(1+i\frac{\tau}{2}\right) + l(1+i\tau) \\ \qquad\qquad - i\frac{\tau}{2}\cdot(1+l\pi) - \frac{1}{2}l\frac{\pi}{2} + l\zeta(2+i\tau) + J\left(i\frac{\tau}{2}\right). \end{cases}$$

Nun denke man sich jeden der beiden Ausdrücke

$$l\xi\left(\tau - i\frac{3}{2}\right) \quad \text{und} \quad l\zeta(2+i\tau) + J\left(i\frac{\tau}{2}\right)$$

in seinen reellen und imaginären Theil zerlegt und bezeichne

durch $F(\tau)$ den Coefficienten von i in dem Ausdruck $l\xi\left(\tau - i\frac{3}{2}\right)$ und

durch $f(\tau)$ den Coefficienten von i in dem Ausdruck $l\zeta(2+i\tau)+J\left(i\frac{\tau}{2}\right)$.

Dann erhält man, da die Function $\xi(t)$ gerade und auf beiden Coordinatenaxen reell ist,

$$(10.)\qquad F(0) = 0,$$

$$(11.)\qquad F(-\tau) = -F(\tau)$$

und für $\tau > 0$ aus (9.)

$$(12.)\qquad F(\tau) = \frac{\tau}{2}l\frac{\tau}{2}+\operatorname{arctg}\frac{\tau}{2}+\operatorname{arctg}\tau+\frac{\pi}{4}-\frac{\tau}{2}(1+l\pi)+f(\tau),$$

wobei man unter dem Zeichen arctg jedesmal den zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ enthaltenen Bogen zu verstehen hat.

Ferner ist

$$(13.)\qquad l\zeta(2+i\tau) = \Sigma\left\{\frac{1}{p^{2+i\tau}}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{p^{2(2+i\tau)}}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{p^{3(2+i\tau)}}+\cdots\right\},$$

wo der Summationsbuchstabe p alle Primzahlen von 2 bis ins Unendliche durchläuft. Also wird

$$|l\zeta(2+i\tau)| \leqq \Sigma\left\{\frac{1}{p^2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{p^4}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{p^6}+\cdots\right\} = l\zeta(2) = l\frac{\pi^2}{6}.$$

Ausserdem ergiebt sich aus (8.) die Ungleichung

$$(14.)\qquad \left|J\left(i\frac{\tau}{2}\right)\right| < \frac{1}{12\cdot\left|\frac{\tau}{2}\right|\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = \frac{1}{3.|\tau|}.$$

Endlich ist nach Formel (25.) der Abhandlung des Herrn *Stieltjes*

$$J\left(i\frac{\tau}{2}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{2(\frac{1}{2}-x)^2dx}{\left(n+x+i\frac{\tau}{2}\right)\left(n+1-x+i\frac{\tau}{2}\right)},$$

also, wie hieraus leicht hervorgeht, der Coefficient von i in dem Ausdruck $J\left(i\frac{\tau}{2}\right)$ *negativ*, sobald $\tau > 0$ ist, und daher unter der gleichen Voraussetzung

$$(15.)\qquad -l\frac{\pi^2}{6}-\frac{1}{3\tau} < f(\tau) < l\frac{\pi^2}{6}.$$

Die Function $F(\tau)$ kann daher aus Gleichung (12.) wenigstens näherungsweise berechnet werden. Dasselbe gilt von dem früher erklärten Zuwachs Φ der Abweichung der Function $\xi(t)$. Denn infolge der Festsetzungen, welche im Vorangehenden zur eindeutigen Erklärung der vor-

kommenden Logarithmen getroffen wurden, ist dieser Zuwachs gleich demjenigen Zuwachs, welchen die Function $F(\tau)$ erfährt, wenn τ von a bis b zunimmt, oder in Zeichen

$$(16.)\qquad \Phi = F(b)-F(a).$$

Mit Hülfe dieser Entwickelungen gewinnt man über die Vertheilung der Nullstellen der Function $\xi(t)$ die folgenden Aufschlüsse:

1) *Die Gleichung* $\xi(t)=0$ *besitzt sicher keine Wurzel, deren reeller Theil absolut genommen* $\leqq 12$ *wäre.*

Beweis: Man nehme $b>0$ und $a=-b$. Dann muss die Anzahl A wegen der in Bezug auf den Nullpunkt obwaltenden Symmetrie nothwendig gerade sein, ist also, falls sie von Null verschieden ist, mindestens gleich 2. Ferner ist im vorliegenden Falle

$$\begin{aligned}\Phi &= F(b)-F(-b) = 2.F(b)\\ &= b.l\frac{b}{2}+2\operatorname{arctg}\frac{b}{2}+2\operatorname{arctg}b+\frac{\pi}{2}-b.(1+l\pi)+2f(b).\end{aligned}$$

Da aber nach (4.)

$$A.\operatorname{arctg}\frac{b-a}{2}<\Phi$$

sein muss, so kann die Gleichung $\xi(t)=0$ nur dann eine Wurzel haben, deren reeller Theil absolut genommen $\leqq b$ ist, wenn

$$2\operatorname{arctg}b<bl\frac{b}{2}+2\operatorname{arctg}\frac{b}{2}+2\operatorname{arctg}b+\frac{\pi}{2}-b(1+l\pi)+2f(b),$$

oder

$$(17.)\qquad bl\frac{b}{2}+2\operatorname{arctg}\frac{b}{2}+\frac{\pi}{2}+2f(b)>b(1+l\pi)$$

ist.

Setzt man nun $b=12$, so erhält man

$$\begin{aligned}bl\frac{b}{2}+2\operatorname{arctg}\frac{b}{2}+\frac{\pi}{2} &= 12.l6+2\operatorname{arctg}6+\frac{\pi}{2}\\ &= 21{,}50111+2{,}81128+1{,}57080\\ &= 25{,}88319\end{aligned}$$

und

$$b(1+l\pi) = 12.(1+1{,}144730) = 25{,}73676.$$

Jetzt handelt es sich noch um die Abschätzung von $2.f(12)$. Die Formel (15.) gewährt im vorliegenden Falle nicht die nöthige Schärfe. Aber wenn man auf die Erklärung der Function $f(\tau)$ und auf die Gleichung (13.) zurückgeht, so erhält man

$$l\zeta(2+i.12) = \frac{1}{2^2}\cdot e^{-i.12l2}+\frac{1}{3^2}\cdot e^{-i.12l3}+\cdots$$

und hieraus, wenn man bedenkt, dass der Coefficient von i in dem Ausdruck $J\left(i\cdot\frac{12}{2}\right)$ negativ ist,

$$f(12) < -\frac{1}{2^2}\sin(12l2)-\frac{1}{3^2}\sin(12l3)-\cdots,$$

oder

$$\begin{aligned} f(12) &< l\frac{\pi^2}{6}-\frac{1}{2^2}[1+\sin(12l2)]-\frac{1}{3^2}[1+\sin(12l3)]-\cdots \\ &< 0{,}49770-0{,}47360-0{,}17535 \\ &< -0{,}15125, \end{aligned}$$

also

$$2f(12) < -0{,}30250$$

und

$$12l6+2\operatorname{arctg}6+\frac{\pi}{2}+2f(12) < 25{,}58069.$$

Für $b = 12$ ist also die Ungleichung (17.) *nicht* erfüllt. Die reellen Theile der Wurzeln der Gleichung $\xi(t) = 0$ sind somit sämmtlich absolut genommen grösser als 12, wie behauptet wurde.

Dagegen erweist sich die linke Seite der Ungleichung (17.) für $b = 13$ wirklich grösser als die rechte, so dass das Vorhandensein einer Wurzel, deren reeller Theil zwischen 12 und 13 läge nicht ganz ausgeschlossen erscheint.

In einer Note „Sur la fonction $\zeta(s)$ de *Riemann*"*) hat Herr *J. L. W. V. Jensen* ein Verfahren angedeutet, durch welches unter Voraussetzung der erst später von Herrn *Hadamard* bewiesenen Sätze gezeigt werden kann, dass die reellen Theile aller Wurzeln der Gleichung $\xi(t) = 0$ absolut genommen grösser als 6,561 sind, und ohne Beweis die Behauptung hinzugefügt, dass dieselben auch grösser als 8,4 seien. Das gegenwärtig erhaltene Ergebniss steht hiermit in Einklang.

*) Comptes Rendus, Tome 104, 1887, I, p. 1156.

2) *Sind h und k irgend zwei reelle Zahlen, welche die Bedingung*

$$\operatorname{tg} 1 = 1{,}55741 \leqq k \leqq h-4$$

erfüllen, so ist die Anzahl derjenigen in der Reihe der Nullstellen

$$\alpha_1, \quad \alpha_2, \quad \alpha_3, \quad \ldots$$

enthaltenen Glieder, deren reelle Theile nicht ausserhalb des Intervalles $h-k \ldots h+k$ liegen, kleiner als

$$k . lh.$$

Beweis: Setzt man $a = h-k$ und $b = h+k$, so wird

$$\operatorname{arctg} \frac{b-a}{2} = \operatorname{arctg} k \geqq 1,$$

also

$$A \leqq A . \operatorname{arctg} \frac{b-a}{2} < \Phi.$$

Ferner wird, wenn zur Abkürzung

$$\frac{\tau}{2} l \frac{\tau}{2} + \operatorname{arctg} \frac{\tau}{2} + \operatorname{arctg} \tau = \varphi(\tau)$$

gesetzt wird,

$$F(\tau) = \varphi(\tau) + \frac{\pi}{4} - \frac{\tau}{2}(1 + l\pi) + f(\tau),$$

also

$$\begin{aligned} \Phi = F(b) - F(a) &= F(h+k) - F(h-k) \\ &= \varphi(h+k) - \varphi(h-k) - k(1+l\pi) + f(h+k) - f(h-k) \\ &= 2k . \varphi'(h+\eta k) - k(1+l\pi) + f(h+k) - f(h-k), \end{aligned}$$

wo

$$-1 < \eta < 1$$

ist.

Nun ist

$$\varphi'(\tau) = \frac{1}{2} \cdot l \frac{\tau}{2} + \frac{1}{2} + \frac{2}{4+\tau^2} + \frac{1}{1+\tau^2},$$

folglich

$$\begin{aligned} \varphi'(h+\eta k) &< \frac{1}{2} l \frac{h+k}{2} + \frac{1}{2} + \frac{2}{4+(h-k)^2} + \frac{1}{1+(h-k)^2} \\ &< \frac{1}{2} lh + \frac{1}{2} + \frac{1}{10} + \frac{1}{17} \\ &< \frac{1}{2} lh + 0{,}658824. \end{aligned}$$

Ferner ist nach (15.)

$$f(h+k)-f(h-k) < 2l\frac{\pi^2}{6}+\frac{1}{12} = 1{,}07873.$$

Somit wird

$$A < k.lh-k\left\{1+l\pi-1{,}31765-\frac{1{,}07873}{k}\right\}.$$

Der Inhalt der geschweiften Klammer nimmt mit wachsendem k zu und ist für den Minimalwerth 1,55741 der Zahl k gleich $+0{,}13444$, also immer positiv. Folglich ist

$$A < k.lh,$$

wie behauptet wurde.

3) *Für alle Werthe der reellen Zahl h, welche > 12 sind, wird die Anzahl derjenigen Wurzeln der Gleichung $\xi(t) = 0$, deren reelle Theile positiv und nicht grösser als h sind, dargestellt durch den Ausdruck*

$$\frac{h}{2\pi}\cdot l\frac{h}{2\pi}-\frac{h}{2\pi}+\frac{5}{4}+\eta\left\{0{,}34.(lh)^2+1{,}35.lh+1{,}33\right\},$$

wo η eine zwischen -1 und $+1$ enthaltene Zahl bedeutet. Dabei ist jede etwa vorkommende mehrfache Wurzel so oft zu zählen, als ihre Ordnungszahl angiebt.

Beweis: Man nehme im Vorangehenden, unter h eine beliebige reelle positive Zahl > 12 verstehend,

$$a = -h \quad \text{und} \quad b = +h.$$

Dann wird nach den Gleichungen (12.) und (16.):

$$\begin{aligned}
\Phi &= F(h)-F(-h) = 2F(h)\\
&= hl\frac{h}{2}+2\operatorname{arctg}\frac{h}{2}+2\operatorname{arctg}h+\frac{\pi}{2}-h(1+l\pi)+2f(h)\\
&= h.l\frac{h}{2\pi}-h+2\operatorname{arctg}\frac{h}{2}+2\operatorname{arctg}h+\frac{\pi}{2}+2f(h)\\
&= h.l\frac{h}{2\pi}-h+\frac{5\pi}{2}-2\operatorname{arctg}\frac{2}{h}-2\operatorname{arctg}\frac{1}{h}+2f(h),
\end{aligned}$$

oder

$$\Phi = h.l\frac{h}{2\pi}-h+\frac{5\pi}{2}+\eta.1{,}548, \tag{18.}$$

wo

$$-1 < \eta < 1$$

ist.

Andererseits ist Φ gleich der Summe der Vermehrungen, welche die Abweichungen der Linearfactoren der Function $\xi(t)$ erfahren, wenn die Veränderliche t längs des geraden Verbindungsweges vom Punkte $-h-i\frac{3}{2}$ zum Punkte $+h-i\frac{3}{2}$ übergeht. Zur Berechnung dieser Summe werde festgesetzt, dass das Zeichen arctg jedesmal denjenigen Bogen bedeuten soll, welcher zwischen $-\frac{\pi}{2}$ ausschliesslich und $+\frac{\pi}{2}$ einschliesslich enthalten ist. Ferner seien

$$\text{(19.)} \qquad \alpha_\nu = \beta_\nu + i\gamma_\nu \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots, \infty)$$

diejenigen Gleichungen, welche durch Zerlegung der Zahlen $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ in ihre reellen und imaginären Theile entstehen. Dann wird der Zuwachs der Abweichung des Linearfactors $1-\frac{t}{\alpha_\nu}$ in allen Fällen durch den Ausdruck

$$\operatorname{arctg}\frac{h+\beta_\nu}{\frac{3}{2}+\gamma_\nu} + \operatorname{arctg}\frac{h-\beta_\nu}{\frac{3}{2}+\gamma_\nu}$$

dargestellt. Genau der gleiche Ausdruck ergiebt sich für den Zuwachs der Abweichung des Linearfactors $1-\frac{t}{\alpha'_\nu}$, wo

$$\alpha'_\nu = -\beta_\nu + i\gamma_\nu$$

die in Bezug auf die Ordinatenaxe zu α_ν symmetrisch gelegene Zahl bedeutet. Somit wird

$$\Phi = 2\sum_{\nu=1}^{\infty}\left\{\operatorname{arctg}\frac{h+\beta_\nu}{\frac{3}{2}+\gamma_\nu} + \operatorname{arctg}\frac{h-\beta_\nu}{\frac{3}{2}+\gamma_\nu}\right\}.$$

Nun sei H die Anzahl derjenigen Glieder der Reihe

$$\alpha_1, \quad \alpha_2, \quad \alpha_3, \quad \ldots,$$

deren reelle Theile nicht grösser als h sind.

Fasst man in der für Φ gefundenen Summe die H ersten Glieder zu einer besonderen Summe zusammen, so erhält man

$$\Phi = 2\sum_{\nu=1}^{H}\left\{\operatorname{arctg}\frac{h+\beta_\nu}{\frac{3}{2}+\gamma_\nu} + \operatorname{arctg}\frac{h-\beta_\nu}{\frac{3}{2}+\gamma_\nu}\right\} + 2\sum_{\nu=H+1}^{\infty}\left\{\operatorname{arctg}\frac{h+\beta_\nu}{\frac{3}{2}+\gamma_\nu} + \operatorname{arctg}\frac{h-\beta_\nu}{\frac{3}{2}+\gamma_\nu}\right\}.$$

Nun ist aber

$$\operatorname{arctg}\frac{h+\beta_\nu}{\frac{3}{2}+\gamma_\nu} = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\frac{\frac{3}{2}+\gamma_\nu}{h+\beta_\nu}.$$

Ferner ist für jedes Glied der ersten Summe, weil hier $h-\beta_\nu \geqq 0$ ist,

$$\operatorname{arctg}\frac{h-\beta_\nu}{\frac{3}{2}+\gamma_\nu} = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\frac{\frac{3}{2}+\gamma_\nu}{h-\beta_\nu},$$

dagegen für jedes Glied der zweiten Summe, weil hier $h-\beta_\nu < 0$ ist,

$$\operatorname{arctg}\frac{h-\beta_\nu}{\frac{1}{2}+\gamma_\nu} = -\operatorname{arctg}\frac{\beta_\nu-h}{\frac{1}{2}+\gamma_\nu} = -\frac{\pi}{2}+\operatorname{arctg}\frac{\frac{1}{2}+\gamma_\nu}{\beta_\nu-h}.$$

Somit wird, wenn zur Abkürzung

$$(20.)\qquad \sum_{\nu=1}^{H}\left\{\operatorname{arctg}\frac{\frac{1}{2}+\gamma_\nu}{h+\beta_\nu}+\operatorname{arctg}\frac{\frac{1}{2}+\gamma_\nu}{h-\beta_\nu}\right\} = S_1$$

und

$$(21.)\qquad \sum_{\nu=H+1}^{\infty}\left\{\operatorname{arctg}\frac{\frac{1}{2}+\gamma_\nu}{\beta_\nu-h}-\operatorname{arctg}\frac{\frac{1}{2}+\gamma_\nu}{\beta_\nu+h}\right\} = S_2$$

gesetzt wird,

$$(22.)\qquad \Phi = 2\pi.H-2S_1+2S_2.$$

Es handelt sich nun noch darum, für die Summen S_1 und S_2 Näherungswerthe zu berechnen. Dabei möge zu Gunsten der Einfachheit der Rechnung auf die Erreichung der äussersten Schärfe, welche sich allenfalls erzielen liesse, verzichtet werden. Da

$$|\gamma_\nu| \leqq \tfrac{1}{2}$$

ist, so hat man zunächst

$$0 \leqq S_1 < \sum_{\nu=1}^{H}\frac{2}{h+\beta_\nu}+\sum_{\nu=1}^{H}\operatorname{arctg}\frac{2}{h-\beta_\nu},$$

also um so mehr

$$(23.)\qquad 0 \leqq S_1 < \frac{2H}{h}+\sum_{\nu=1}^{H}\operatorname{arctg}\frac{2}{h-\beta_\nu}.$$

Nun bezeichne man zur Abkürzung

durch $\varkappa$ die Constante $\operatorname{tg}1 = 1{,}55741$ und

durch λ diejenige ganze Zahl, welche die Bedingung

$$(24.)\qquad \frac{h-12}{2\varkappa} < \lambda \leqq \frac{h-12}{2\varkappa}+1$$

erfüllt, und zerlege das Intervall $0\dots h$ durch Schnitte, welche durch die Punkte

$$h-2\lambda\varkappa;\quad h-2(\lambda-1)\varkappa;\quad h-2(\lambda-2)\varkappa;\quad \dots;\quad h-4\varkappa;\quad h-2\varkappa$$

geführt sind, in Theilintervalle.

Da nach (24.)

$$h-2\lambda\varkappa < 12$$

ist, so enthält das erste Theilintervall nach Satz 1) keine der Zahlen β_ν, liefert also auch zu der Summe $\sum_{\nu=1}^{H}\operatorname{arctg}\frac{2}{h-\beta_\nu}$ keinen Beitrag.

Ist nun $\lambda > 1$, so ist für jede dem zweiten Theilintervall angehörende Zahl β_ν

$$\operatorname{arctg}\frac{2}{h-\beta_\nu} < \frac{2}{h-\beta_\nu} \leqq \frac{2}{h-[h-2(\lambda-1)\varkappa]} = \frac{1}{(\lambda-1)\varkappa},$$

und da die Anzahl dieser Zahlen nach Satz 2) kleiner ist als

$$\varkappa l[h-(2\lambda-1)\varkappa],$$

also um so mehr kleiner als $\varkappa lh$, so wird der Gesammtbeitrag, welchen die dem zweiten Theilintervall angehörenden Zahlen β_ν zu der Summe $\sum_{\nu=1}^{H}\operatorname{arctg}\frac{2}{h-\beta_\nu}$ liefern, kleiner als

$$\frac{1}{\lambda-1}\cdot lh.$$

Genau ebenso findet sich, dass die Beiträge, welche die dem dritten, vierten, ..., λten Theilintervall angehörenden Zahlen β_ν zu der erwähnten Summe liefern, beziehentlich kleiner sind als

$$\frac{1}{\lambda-2}\cdot lh;\quad \frac{1}{\lambda-3}\cdot lh;\quad \ldots;\quad \frac{1}{1}\cdot lh.$$

Was endlich das letzte Theilintervall betrifft, so ist die Anzahl der demselben angehörenden Zahlen β_ν kleiner als $\varkappa lh$, und für jede einzelne derselben

$$\operatorname{arctg}\frac{2}{h-\beta_\nu} \leqq \frac{\pi}{2}.$$

Also wird der Gesammtbeitrag dieser Zahlen zu der betrachteten Summe kleiner als

$$\varkappa\cdot\frac{\pi}{2}\cdot lh.$$

Fasst man alles zusammen, so erhält man für $\lambda = 1$:

$$\sum_{\nu=1}^{H}\operatorname{arctg}\frac{2}{h-\beta_\nu} < \varkappa\cdot\frac{\pi}{2}lh$$

und für $\lambda > 1$:

$$\sum_{\nu=1}^{H}\operatorname{arctg}\frac{2}{h-\beta_\nu} < lh\left(\varkappa\cdot\frac{\pi}{2}+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{\lambda-1}\right).$$

Nun ist bekanntlich

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{\lambda-1} < l(\lambda-1)+C+\frac{1}{2(\lambda-1)},$$

wo

$$C = 0{,}57721\,56649\ldots$$

die sogenannte *Euler*sche oder *Mascheroni*sche Constante bedeutet. Unter Benutzung der Formel (24.) folgt hieraus

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{\lambda-1} < lh-l(2\varkappa)+C+\frac{1}{2(\lambda-1)}.$$

Nun ist der Ausdruck

$$-l(2\varkappa)+C+\frac{1}{2(\lambda-1)},$$

wie die numerische Ausrechnung zeigt, schon für $\lambda=2$ negativ. Also ist

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{\lambda-1} < lh,$$

und daher in allen Fällen

$$\sum_{\nu=1}^{H}\operatorname{arctg}\frac{2}{h-\beta_\nu} < (lh)^2+\varkappa\cdot\frac{\pi}{2}\cdot lh,$$

folglich

$$(25.)\qquad S_1 = \vartheta\cdot\left\{\frac{2H}{h}+(lh)^2+\varkappa\cdot\frac{\pi}{2}\cdot lh\right\},$$

wo

$$0\leqq\vartheta<1$$

ist.

In ähnlicher Weise kann man auch für die Summe S_2 einen Näherungswerth finden. Zerlegt man nämlich das Intervall $h\ldots\infty$ in die Theilintervalle

$$h\ldots h+2\varkappa;\quad h+2\varkappa\ldots h+4\varkappa;\quad h+4\varkappa\ldots h+6\varkappa;\quad \ldots,$$

so ist die Anzahl der dem ersten Theilintervall angehörenden Zahlen β_ν kleiner als

$$\varkappa.l(h+\varkappa)$$

und für jede einzelne derselben

$$\operatorname{arctg}\frac{\frac{3}{2}+\gamma_\nu}{\beta_\nu-h}-\operatorname{arctg}\frac{\frac{3}{2}+\gamma_\nu}{\beta_\nu+h} < \frac{\pi}{2},$$

also der Gesammtbeitrag aller dieser Zahlen zu der Summe S_2 kleiner als

$$\frac{\pi}{2}\cdot\varkappa\cdot l(h+\varkappa).$$

Ist ferner μ irgend eine ganze positive Zahl, so ist die Anzahl derjenigen Zahlen β_ν, welche dem $(\mu+1)$-ten Theilintervall angehören, also die Ungleichung

$$h+2\mu\varkappa\leqq\beta_\nu\leqq h+2(\mu+1)\varkappa$$

erfüllen, kleiner als

$$\varkappa . l[h+(2\mu+1)\varkappa].$$

Für jede einzelne derselben ist ferner

$$\operatorname{arctg}\frac{\frac{1}{2}+\gamma_\nu}{\beta_\nu-h} < \frac{\frac{1}{2}+\gamma_\nu}{\beta_\nu-h}$$

und

$$\operatorname{arctg}\frac{\frac{1}{2}+\gamma_\nu}{\beta_\nu+h} > \frac{\frac{1}{2}+\gamma_\nu}{\beta_\nu+h} - \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{\frac{1}{2}+\gamma_\nu}{\beta_\nu+h}\right)^3,$$

also

$$\operatorname{arctg}\frac{\frac{1}{2}+\gamma_\nu}{\beta_\nu-h} - \operatorname{arctg}\frac{\frac{1}{2}+\gamma_\nu}{\beta_\nu+h} < \frac{2h(\frac{1}{2}+\gamma_\nu)}{(\beta_\nu-h).(\beta_\nu+h)} + \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{\frac{1}{2}+\gamma_\nu}{\beta_\nu+h}\right)^3$$

$$< \frac{h}{\mu\varkappa.(h+\mu\varkappa)} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{(h+\mu\varkappa)^3}.$$

Der Beitrag, welchen diese Zahlen zu der Summe S_2 liefern, ist daher kleiner als

$$h\cdot\frac{l[h+(2\mu+1)\varkappa]}{\mu.(h+\mu\varkappa)} + \frac{\varkappa}{3}\cdot\frac{l[h+(2\mu+1)\varkappa]}{(h+\mu\varkappa)^3}.$$

Folglich ist

$$S_2 < \frac{\pi}{2}\cdot\varkappa\cdot l(h+\varkappa) + h.\sum_{\mu=1}^{\infty}\frac{l[h+(2\mu+1)\varkappa]}{\mu(h+\mu\varkappa)} + \frac{\varkappa}{3}\cdot\sum_{\mu=1}^{\infty}\frac{l[h+(2\mu+1)\varkappa]}{(h+\mu\varkappa)^3}.$$

Nun hat man, unter $[h]$ die grösste in h enthaltene ganze Zahl verstehend,

$$h\sum_{\mu=1}^{\infty}\frac{l[h+(2\mu+1)\varkappa]}{\mu(h+\mu\varkappa)} = h.\sum_{\mu=1}^{[h]}\frac{l[h+(2\mu+1)\varkappa]}{\mu(h+\mu\varkappa)} + h.\sum_{\mu=[h]+1}^{\infty}\frac{l[h+(2\mu+1)\varkappa]}{\mu(h+\mu\varkappa)}.$$

Da der Quotient $\frac{l[h+(2\mu+1)\varkappa]}{h+\mu\varkappa}$ sowohl mit wachsendem μ als auch mit wachsendem h abnimmt, und da ausserdem $h > 7\varkappa$ ist, so folgt hieraus

$$h\sum_{\mu=1}^{\infty}\frac{l[h+(2\mu+1)\varkappa]}{\mu(h+\mu\varkappa)} < h\cdot\frac{l(h+\varkappa)}{h}\sum_{\mu=1}^{[h]}\frac{1}{\mu} + \frac{h}{\varkappa}\cdot\sum_{\mu=[h]+1}^{\infty}\frac{l[2(\mu+4)\varkappa]}{\mu(\mu+7)}$$

$$< l(h+\varkappa).\left\{l[h]+C+\frac{1}{2[h]}\right\} + \frac{h}{\varkappa}\cdot\sum_{\mu=[h]+1}^{\infty}\frac{l[2(\mu+4)\varkappa]}{(\mu+3)^2}.$$

Da nun die Function $lx+\frac{1}{2x}$ für $x>\frac{1}{2}$ mit wachsendem x zunimmmt, so ist

$$l[h]+\frac{1}{2[h]} \leqq lh+\frac{1}{2h}.$$

Ferner ist

$$\sum_{\mu=[h]+1}^{\infty}\frac{l[2(\mu+4)\varkappa]}{(\mu+3)^2} = \sum_{\mu=[h]+4}^{\infty}\frac{l[2(\mu+1)\varkappa]}{\mu^2} < \int_h^{\infty}\frac{l[2(x+1)\varkappa]}{x^2}dx$$

$$= \frac{l[2(h+1)\varkappa]}{h} + l\frac{h+1}{h} < \frac{l[2(h+1)\varkappa]+1}{h}.$$

Somit ergiebt sich

$$h\sum_{\mu=1}^{\infty}\frac{l[h+(2\mu+1)\varkappa]}{\mu.(h+\mu\varkappa)} < l(h+\varkappa).\left(lh+C+\frac{1}{2h}\right)+\frac{l[2(h+1)\varkappa]+1}{\varkappa}.$$

Endlich ist

$$\frac{\varkappa}{3}\cdot\sum_{\mu=1}^{\infty}\frac{l[h+(2\mu+1)\varkappa]}{(h+\mu\varkappa)^2} < \frac{\varkappa}{3}\cdot\frac{l(h+\varkappa)}{h}\cdot\sum_{\mu=1}^{\infty}\frac{1}{(h+\mu\varkappa)^2}$$

$$< \frac{\varkappa}{3}\cdot\frac{l(h+\varkappa)}{h}\cdot\int_0^{\infty}\frac{dx}{(h+\varkappa x)^2} < \frac{1}{3}\cdot\frac{l(h+\varkappa)}{h^2}.$$

Also ist

$$S_2 < l(h+\varkappa).\left(lh+C+\frac{\pi}{2}\varkappa+\frac{1}{2h}+\frac{1}{3h^2}\right)+\frac{l[2(h+1)\varkappa]+1}{\varkappa}$$

$$< \left(lh+\frac{\varkappa}{h}\right)\cdot\left(lh+C+\frac{\pi}{2}\varkappa+\frac{1}{2h}+\frac{1}{3h^2}\right)+\frac{1}{\varkappa}\cdot\left(lh+l(2\varkappa)+1+\frac{1}{h}\right)$$

$$< (lh)^2+\left(C+\frac{\pi}{2}\varkappa+\frac{1}{\varkappa}\right)\cdot lh+\frac{1}{\varkappa}(l(2\varkappa)+1)+\left(\varkappa+\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{lh}{h}$$

$$+\left(\varkappa C+\frac{\pi}{2}\varkappa^2+\frac{1}{\varkappa}\right)\cdot\frac{1}{h}+\frac{1}{3}\cdot\frac{lh}{h^2}+\frac{\varkappa}{h}\cdot\left(\frac{1}{2h}+\frac{1}{3h^2}\right)$$

$$< (lh)^2+\left(C+\frac{\pi}{2}\varkappa+\frac{1}{\varkappa}\right)lh+2{,}256,$$

und da S_2 positiv ist, so kann man

$$(26.)\qquad S_2 = \vartheta'\left\{(lh)^2+\left(C+\frac{\pi}{2}\varkappa+\frac{1}{\varkappa}\right)\cdot lh+2{,}256\right\}$$

setzen, wo

$$0<\vartheta'<1$$

ist.

Nun möge festgesetzt werden, dass solche Zahlen, von denen nichts weiter bekannt zu sein braucht, als dass sie zwischen -1 und $+1$ enthalten sind, durchweg durch den Buchstaben η, solche Zahlen dagegen, von denen nur bekannt zu sein braucht, dass sie $\geqq 0$, aber <1 sind, durch ϑ oder ϑ' bezeichnet werden sollen. Dann kann man der aus (18.), (22.), (25.) und (26.) folgenden Gleichung

$$hl\frac{h}{2\pi}-h+\frac{5\pi}{2}+\eta.1{,}548 = 2\pi H-2\vartheta\left\{\frac{2H}{h}+(lh)^2+\varkappa\cdot\frac{\pi}{2}lh\right\}$$

$$+2\vartheta'\left\{(lh)^2+\left(C+\frac{\pi}{2}\varkappa+\frac{1}{\varkappa}\right)lh+2{,}256\right\}$$

zunächst die Form geben

$$2\pi\cdot\left(1-\frac{2\vartheta}{\pi h}\right)\cdot H = hl\frac{h}{2\pi}-h+\frac{5\pi}{2}+2\eta\cdot\left\{(lh)^2+\left(C+\frac{\pi}{2}\varkappa+\frac{1}{\varkappa}\right)\cdot lh+3{,}03\right\}.$$

Da ferner

$$\frac{1}{1-\frac{2\vartheta}{\pi h}} = 1+\frac{\frac{2\vartheta}{\pi h}}{1-\frac{2\vartheta}{\pi h}} < 1+\frac{2\vartheta}{\pi h}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{6\pi}},$$

oder

$$\frac{1}{1-\frac{2\vartheta}{\pi h}} = 1+\frac{12}{6\pi-1}\cdot\frac{\vartheta'}{h}$$

ist, so folgt hieraus

$$H = \frac{h}{2\pi}\cdot l\frac{h}{2\pi}-\frac{h}{2\pi}+\frac{5}{4}+\frac{6\vartheta'}{\pi(6\pi-1)}\cdot\left(lh-l(2\pi)-1+\frac{5\pi}{2h}\right)$$
$$+\frac{6\eta}{6\pi-1}\left\{(lh)^2+\left(C+\frac{\pi}{2}\varkappa+\frac{1}{\varkappa}\right)lh+3{,}03\right\},$$

oder endlich

$$(27.)\quad H = \frac{h}{2\pi}\cdot l\frac{h}{2\pi}-\frac{h}{2\pi}+\frac{5}{4}+\eta\left\{0{,}34(lh)^2+1{,}35.lh+1{,}33\right\},$$

womit Satz (3.) bewiesen ist.

Hieraus folgt leicht:

Wenn k eine Function von h bezeichnet, welche bei unbegrenzt wachsendem h ebenfalls unendlich wird, und zwar von höherer Ordnung als $(lh)^2$, aber von niedrigerer Ordnung als h, so wird die Anzahl derjenigen Nullstellen der Function $\xi(t)$, deren reelle Theile zwischen h und $h+k$ enthalten sind, bis auf Grössen niedrigerer Ordnung dargestellt durch den Ausdruck

$$k\cdot\frac{1}{2\pi}l\frac{h}{2\pi}.$$

In diesem Sinne kann man sagen, dass die Dichtigkeit der Nullstellen von der Grösse h wie $\frac{1}{2\pi}l\frac{h}{2\pi}$ zunehme.

4) *Die Gleichung $\xi(t)=0$ hat mindestens eine Wurzel, deren reeller Theil zwischen* 0 *und* 53 *enthalten ist.*

Angenommen nämlich, dies wäre nicht der Fall, so müsste für $h=53$

$$H=0 \quad\text{und}\quad S_1=0,$$

also nach (22.)

$$\Phi = 2S_2$$

sein. Nun liefert aber die numerische Ausrechnung unter Benutzung von (18.)

$$\Phi > hl\frac{h}{2\pi}-h+\frac{5\pi}{2}-1{,}548 = 66{,}3243,$$

und unter Benutzung von (26.)

$$2S_2 < 2\left\{(lh)^2 + \left(C + \frac{\pi}{2}\varkappa + \frac{1}{\varkappa}\right)lh + 2{,}256\right\} = 65{,}147,$$

also

$$\Phi > 2S_2.$$

Die gemachte Annahme ist daher unstatthaft.

Für $h = 52$ ist dagegen ein ähnlicher Schluss nicht mehr möglich. Die Zahlen 12 und 53 bilden somit die engsten ganzzahligen Grenzen, zwischen welche man den reellen Theil der Wurzel α_1 der Gleichung $\xi(t) = 0$ mit Sicherheit einschliessen kann, solange man andere Hülfsmittel, als die im Vorangehenden benutzten, nicht zur Verfügung hat und einen grösseren Aufwand numerischer Rechnung vermeiden will.

II.

Convergenzbeweise und Anwendungen.

Im Nachfolgenden bedeuten a, b, u reelle positive Constanten und h eine reelle Veränderliche, welche alle positiven Werthe annehmen kann. Bei jedem der vorkommenden bestimmten Integrale ist als Integrationsweg die die Grenzen verbindende *gerade* Strecke zu nehmen. Unter allen vorkommenden Potenzen und Logarithmen sind die Hauptwerthe zu verstehen.

Hülfssätze.

A) *Sind c, d, g, v reelle Constanten, welche die Bedingungen*

$$0 \leqq c < d,$$
$$g \gtrless 0,$$
$$v \gtrless 0$$

erfüllen, so gelten die Formeln

$$(28.)\qquad \left|\int_{g+ic}^{g+id} \frac{e^{vs}}{s}\,ds\right| < \frac{4+\pi}{\sqrt{2}} \cdot \frac{e^{vg}}{|v|} \cdot \frac{1}{|g|+c}$$

und

$$(29.)\qquad \left|\int_{g-ih}^{g+ih} \frac{e^{vs}}{s}\,ds\right| < (4+\pi).\sqrt{2} \cdot \frac{e^{vg}}{|v.g|}\cdot$$

Durch theilweise Integration erhält man nämlich

$$\int \frac{e^{vs}}{s}\,ds = \frac{1}{s} \cdot \frac{e^{vs}}{v} + \frac{1}{v}\int \frac{e^{vs}}{s^2}\,ds$$

und hieraus

$$\int_{g+ic}^{g+id} \frac{e^{vs}}{s}\, ds = \frac{e^{vg}}{v}\cdot\left(\frac{e^{ivd}}{g+id}-\frac{e^{ivc}}{g+ic}\right)+i\frac{e^{vg}}{v}\cdot\int_c^d \frac{e^{ivy}}{(g+iy)^2}\, dy.$$

Hieraus folgt

$$\left|\int_{g+ic}^{g+id} \frac{e^{vs}}{s}\, ds\right| < \frac{2e^{vg}}{|v|}\cdot\frac{1}{\sqrt{g^2+c^2}}+\frac{e^{vg}}{|v|}\cdot\int_c^d \frac{dy}{g^2+y^2}.$$

Nun ist

$$\int_c^d \frac{dy}{g^2+y^2} = \int_0^{d-c} \frac{d\eta}{g^2+(c+\eta)^2} \leqq \int_0^{d-c} \frac{d\eta}{g^2+c^2+\eta^2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{g^2+c^2}}\cdot \operatorname{arctg} \frac{d-c}{\sqrt{g^2+c^2}} < \frac{1}{\sqrt{g^2+c^2}}\cdot\frac{\pi}{2}.$$

Also wird

$$\left|\int_{g+ic}^{g+id} \frac{e^{vs}}{s}\, ds\right| < \frac{e^{vg}}{|v|}\cdot\frac{1}{\sqrt{g^2+c^2}}\cdot\left(2+\frac{\pi}{2}\right).$$

Da nun

$$2(g^2+c^2) \geqq (|g|+c)^2,$$

also

$$\sqrt{g^2+c^2} \geqq \frac{|g|+c}{\sqrt{2}}$$

ist, so ergiebt sich schliesslich

$$\left|\int_{g+ic}^{g+id} \frac{e^{vs}}{s}\, ds\right| < \frac{4+\pi}{\sqrt{2}}\cdot\frac{e^{vg}}{|v|}\cdot\frac{1}{|g|+c}. \tag{28.}$$

Setzt man hier $c = 0$, $d = h$, so folgt

$$\left|\int_{g}^{g+ih} \frac{e^{vs}}{s}\, ds\right| < \frac{4+\pi}{\sqrt{2}}\cdot\frac{e^{vg}}{|vg|}.$$

Da ferner

$$-\int_{g-ih}^{g} \frac{e^{vs}}{s}\, ds = \int_{g}^{g-ih} \frac{e^{vs}}{s}\, ds$$

nichts anderes ist, als der conjugirte Werth von $\int_{g}^{g+ih} \frac{e^{vs}}{s}\, ds$, so ist auch

$$\left|\int_{g-ih}^{g} \frac{e^{vs}}{s}\, ds\right| < \frac{4+\pi}{\sqrt{2}}\cdot\frac{e^{vg}}{|vg|},$$

folglich

$$\left|\int_{g-ih}^{g+ih} \frac{e^{vs}}{s}\, ds\right| < (4+\pi).\sqrt{2}\cdot\frac{e^{vg}}{|vg|}. \tag{29.}$$

B) *Man hat*

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\cdot\int_{a-ih}^{a+ih} \frac{e^{us}}{s}\, ds - 1\right| \leqq \frac{3}{2\pi}\cdot\frac{e^{ua}}{hu} \tag{30.}$$

und

$$(31.)\qquad \left|\frac{1}{2\pi i}\cdot\int_{a-ih}^{a+ih}\frac{e^{-us}}{s}ds\right| \leqq \frac{3}{2\pi}\cdot\frac{e^{-ua}}{hu}.$$

Beweis: Man betrachte dasjenige Rechteck, welches die Punkte

$$a-ih,\quad a+ih,\quad -b+ih,\quad -b-ih$$

zu Ecken hat. Da dieses Rechteck den Nullpunkt umschliesst, so hat das über die Begrenzung desselben in positiver Richtung erstreckte Integral $\int\frac{e^{us}}{s}ds$ den Werth $2\pi i$. Daher ist

$$(32.)\qquad \begin{cases} \frac{1}{2\pi i}\cdot\int_{a-ih}^{a+ih}\frac{e^{us}}{s}ds = 1-\frac{1}{2\pi i}\cdot\int_{a+ih}^{-b+ih}\frac{e^{us}}{s}ds \\ \qquad -\frac{1}{2\pi i}\cdot\int_{-b+ih}^{-b-ih}\frac{e^{us}}{s}ds-\frac{1}{2\pi i}\cdot\int_{-b-ih}^{a-ih}\frac{e^{us}}{s}ds. \end{cases}$$

Nun folgt aus (29.), wenn man g durch $-b$ und v durch u ersetzt,

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{-b+ih}^{-b-ih}\frac{e^{us}}{s}ds\right| < \frac{4+\pi}{\pi.\sqrt{2}}\cdot\frac{e^{-ub}}{ub}.$$

Nach willkürlicher Annahme einer beliebig kleinen reellen positiven Zahl ε kann man daher, indem man b oberhalb einer gewissen Grenze annimmt, stets erreichen, dass

$$(33.)\qquad \left|\frac{1}{2\pi i}\int_{-b+ih}^{-b-ih}\frac{e^{us}}{s}ds\right| < \varepsilon$$

wird. Ferner ist

$$\frac{1}{2\pi i}\cdot\int_{a+ih}^{-b+ih}\frac{e^{us}}{s}ds = \frac{1}{2\pi i}\cdot\int_{a}^{-b}e^{ux}.\frac{\cos(uh)+i\sin(uh)}{x+ih}dx,$$

$$\frac{1}{2\pi i}\cdot\int_{-b-ih}^{a-ih}\frac{e^{us}}{s}ds = -\frac{1}{2\pi i}\cdot\int_{a-ih}^{-b-ih}\frac{e^{us}}{s}ds$$

$$= -\frac{1}{2\pi i}\cdot\int_{a}^{-b}e^{ux}.\frac{\cos(uh)-i\sin(uh)}{x-ih}dx,$$

folglich

$$\frac{1}{2\pi i}\cdot\int_{a+ih}^{-b+ih}\frac{e^{us}}{s}ds+\frac{1}{2\pi i}\cdot\int_{-b-ih}^{a-ih}\frac{e^{us}}{s}ds = \frac{1}{\pi}\cdot\int_{a}^{-b}e^{ux}.\frac{x\sin(uh)-h\cos(uh)}{h^2+x^2}dx.$$

Da ferner

$$\left|\frac{x\sin(uh)}{h^2+x^2}\right| \leqq \frac{1}{2h}$$

und

$$\left|\frac{h\cos(uh)}{h^2+x^2}\right| \leqq \frac{1}{h}$$

ist, so ergiebt sich

$$(34.)\quad \left|\frac{1}{2\pi i}\cdot\int_{a+ih}^{-b+ih}\frac{e^{us}}{s}ds+\frac{1}{2\pi i}\cdot\int_{-b-ih}^{a-ih}\frac{e^{us}}{s}ds\right|<\frac{3}{2\pi}\cdot\frac{1}{h}\cdot\int_{-b}^{a}e^{ux}dx<\frac{3}{2\pi}\cdot\frac{e^{ua}}{hu}\cdot$$

Nunmehr folgt aus (32.), (33.), (34.):

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{a-ih}^{a+ih}\frac{e^{us}}{s}ds-1\right|<\frac{3}{2\pi}\cdot\frac{e^{ua}}{hu}+\varepsilon$$

$$\leqq\frac{3}{2\pi}\cdot\frac{e^{ua}}{hu},$$

womit Formel (30.) bewiesen ist. Ganz ähnlich lässt sich die Ungleichung (31.) beweisen: Man hat nur nöthig, u durch $-u$ zu ersetzen und an Stelle des eben betrachteten Rechtecks dasjenige (den Nullpunkt nicht mehr umschliessende) Rechteck ins Auge zu fassen, welches die Punkte

$$a-ih,\quad a+ih,\quad b+ih,\quad b-ih$$

zu Ecken hat.

C) *Aus* (30.) *und* (31.) *folgt*

$$(35.)\qquad \lim_{h=\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{a-ih}^{a+ih}\frac{e^{us}}{s}ds = 1,$$

$$(36.)\qquad \lim_{h=\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{a-ih}^{\;+ih}\frac{e^{-us}}{s}ds = 0,$$

welchen Gleichungen man als dritte die leicht direct zu bestätigende Gleichung

$$(37.)\qquad \lim_{h=\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{a-ih}^{a+ih}\frac{1}{s}ds = \frac{1}{2}$$

anreihen kann.

Diese Hülfssätze in Verbindung mit den im ersten Abschnitt erhaltenen Ergebnissen gestatten, für eine gewisse Klasse unendlicher Reihen, die bei der analytischen Darstellung zahlentheoretischer Functionen Anwendung finden, den Beweis der Convergenz zu erbringen. Zu diesen Reihen kommt man durch die folgende Verallgemeinerung der *Riemann*schen Betrachtungen:

Es sei n eine Veränderliche, welche alle ganzzahligen positiven Werthe annehmen kann, und $L(n)$ diejenige Function von n, welche durch die drei folgenden Gleichungen erklärt wird:

α) $L(1) = 0$,

β) $L(n) = 0$, wenn n aus verschiedenen Primfactoren zusammenge-

setzt ist,

γ) $L(n) = lp$, wenn $n = p^\alpha$ ist, wo p eine *Primzahl* und α einen ganzzahligen positiven Exponenten bedeutet.

Ferner sei r eine beliebige reelle Zahl. Dann gilt für alle Werthe der complexen Veränderlichen s, welche so beschaffen sind, dass der reelle Theil von $s+r$ grösser als 1 ist, die unmittelbar aus der *Riemann*schen Formel

$$l\zeta(s) = \Sigma p^{-s} + \tfrac{1}{2}\Sigma p^{-2s} + \tfrac{1}{3}\Sigma p^{-3s} + \cdots$$

folgende Gleichung

$$-\frac{\zeta'(s+r)}{\zeta(s+r)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{L(n)}{n^{s+r}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{L(n)}{n^r}}{n^s}.$$

Sind nun a und x zwei reelle positive Constanten, welche die Bedingungen

$$a+r > 1 \quad \text{und} \quad x > 1$$

erfüllen, und h eine reelle positive Veränderliche, so folgt aus der vorstehenden Gleichung durch Multiplication mit $\frac{1}{2\pi i}\cdot\frac{x^s}{s}$ und Integration über den geraden Verbindungsweg der Punkte $a-ih$ und $a+ih$:

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{a-ih}^{a+ih} \frac{\zeta'(s+r)}{\zeta(s+r)}\cdot\frac{x^s}{s}\,ds = \sum_{n=1}^{x} \frac{L(n)}{n^r}\cdot\frac{1}{2\pi i}\cdot\int_{a-ih}^{a+ih}\frac{1}{s}\cdot\left(\frac{x}{n}\right)^s ds.$$

Nun bezeichne man durch G eine beliebige oberhalb x liegende ganze positive Zahl und denke sich die rechts stehende Summe in die beiden Theile

$$\sum_{n=1}^{G} \frac{L(n)}{n^r}\cdot\frac{1}{2\pi i}\int_{a-ih}^{a+ih}\frac{1}{s}\cdot\left(\frac{x}{n}\right)^s ds \quad \text{und} \quad \sum_{n=G+1}^{\infty} \frac{L(n)}{n^r}\cdot\frac{1}{2\pi i}\cdot\int_{a-ih}^{a+ih}\frac{1}{s}\cdot\left(\frac{x}{n}\right)^s ds$$

zerlegt. Für jedes Glied des zweiten Theiles ist

$$ln - lx > 0,$$

also nach (31.)

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{a-ih}^{a+ih}\frac{1}{s}\cdot\left(\frac{x}{n}\right)^s ds\right| = \left|\frac{1}{2\pi i}\cdot\int_{a-ih}^{a+ih}\frac{e^{-(ln-lx)s}}{s}\,ds\right| < \frac{3}{2\pi}\cdot\left(\frac{x}{n}\right)^a\cdot\frac{1}{h(ln-lx)}.$$

Somit ist

$$\left|\sum_{n=G+1}^{x}\frac{L(n)}{n^r}\cdot\frac{1}{2\pi i}\cdot\int_{a-ih}^{a+ih}\frac{1}{s}\cdot\left(\frac{x}{n}\right)^s ds\right| < \frac{3x^a}{2\pi.[l(G+1)-lx]}\cdot\frac{1}{h}\cdot\sum_{n=G+1}^{x}\frac{L(n)}{n^{a+r}},$$

also

$$\lim_{h=\infty}\sum_{n=G+1}^{\infty}\frac{L(n)}{n^r}\cdot\frac{1}{2\pi i}\cdot\int_{a-ih}^{a+ih}\frac{1}{s}\cdot\left(\frac{x}{n}\right)^s ds = 0.$$

Auch der erste Theil nähert sich bei unbegrenzt wachsendem h einem endlichen Grenzwerth, da die Anzahl der Glieder endlich ist, und jedes einzelne einem bestimmten Grenzwerth zustrebt. Aus den Gleichungen (35.), (36.), (37.) folgt nämlich

$$\lim_{h=\infty}\frac{1}{2\pi i}\cdot\int_{a-ih}^{a+ih}\frac{1}{s}\cdot\left(\frac{x}{n}\right)^s ds = \begin{cases} 1 & \text{für } x > n, \\ \frac{1}{2} & \text{-} \quad x = n, \\ 0 & \text{-} \quad x < n. \end{cases}$$

Setzt man daher, unter $[x]$ die grösste in x enthaltene ganze Zahl verstehend, für den Fall, dass x keine Potenz einer Primzahl ist,

$$\varLambda(x, r) = \sum_{n=1}^{[x]}\frac{L(n)}{n^r},$$

dagegen, wenn x eine Potenz einer Primzahl ist,

$$\varLambda(x, r) = \sum_{n=1}^{x}\frac{L(n)}{n^r}-\frac{1}{2}\cdot\frac{L(x)}{x^r},$$

so dass $\varLambda(x, r)$ als Function von x angesehen an allen Sprungstellen den Mittelwerth zwischen den unmittelbar benachbarten Werthen annimmt, so erhält man die Gleichung

$$\lim_{h=\infty}\sum_{n=1}^{G}\frac{L(n)}{n^r}\cdot\frac{1}{2\pi i}\cdot\int_{a-ih}^{a+ih}\frac{1}{s}\cdot\left(\frac{x}{n}\right)^s ds = \varLambda(x, r).$$

Also nähert sich auch der Ausdruck $\frac{1}{2\pi i}\cdot\int_{a-ih}^{a+ih}\frac{\zeta'(s+r)}{\zeta(s+r)}\cdot\frac{x^s}{s}ds$ einem endlichen Grenzwerth, und zwar wird

$$(38.)\qquad -\lim_{h=\infty}\frac{1}{2\pi i}\cdot\int_{a-ih}^{a+ih}\frac{\zeta'(s+r)}{\zeta(s+r)}\cdot\frac{x^s}{s}ds = \varLambda(x, r).$$

Andererseits ist nach *Riemann*

$$\zeta(s+r) = \frac{1}{s+r-1}\cdot\frac{\pi^{\frac{s+r}{2}}}{\Pi\left(\frac{s+r}{2}\right)}\cdot\xi[i(s+r-\tfrac{1}{2})],$$

also

$$-\frac{\zeta'(s+r)}{\zeta(s+r)} = \frac{1}{s+r-1}-\frac{1}{2}l\pi+\frac{1}{2}\cdot\frac{\Pi'\left(\frac{s+r}{2}\right)}{\Pi\left(\frac{s+r}{2}\right)}-i\cdot\frac{\xi'[i(s+r-\frac{1}{2})]}{\xi[i(s+r-\frac{1}{2})]}$$

und unter Benutzung der von Herrn *Hadamard* bewiesenen Gleichung (1.):

$$-\frac{\zeta'(s+r)}{\zeta(s+r)} = \frac{1}{s+r-1}-\frac{1}{2}l\pi-\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{2}l\frac{n}{n+1}+\frac{1}{s+r+2n}\right\}-\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{2(s+r-\frac{1}{2})}{(s+r-\frac{1}{2})^2+\alpha_\nu^2},$$

oder

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{2(s+r-\frac{1}{2})}{(s+r-\frac{1}{2})^2+\alpha_\nu^2} = \frac{\zeta'(s+r)}{\zeta(s+r)} + \frac{1}{s+r-1} - \frac{1}{2} l\pi - \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{2} l \frac{n}{n+1} + \frac{1}{s+r+2n} \right\},$$

folglich

$$(39.) \quad \begin{cases} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{a-ih}^{a+ih} \frac{2(s+r-\frac{1}{2})}{(s+r-\frac{1}{2})^2+\alpha_\nu^2} \cdot \frac{x^s}{s} ds = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-ih}^{a+ih} \frac{\zeta'(s+r)}{\zeta(s+r)} \cdot \frac{x^s}{s} ds \\ \quad + \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{a-ih}^{a+ih} \frac{x^s}{s(s+r-1)} ds - \frac{1}{2} l\pi \cdot \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{a-ih}^{a+ih} \frac{x^s}{s} ds \\ \quad - \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{a-ih}^{a+ih} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{2} l \frac{n}{n+1} + \frac{1}{s+r+2n} \right\} \frac{x^s}{s} ds. \end{cases}$$

Nun nehme man wieder an, dass h über alle Grenzen hinaus wachse. Dann nähern sich die 4 Glieder der rechten Seite der vorstehenden Gleichung sämmtlich endlichen Grenzwerthen. Für das erste und dritte Glied ist dies schon im Vorangehenden bewiesen. Für das zweite hat man, falls $r \gtrless 1$ ist,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{a-ih}^{a+ih} \frac{x^s}{s(s+r-1)} ds = \frac{1}{r-1} \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{a-ih}^{a+ih} \frac{x^s}{s} ds - x^{1-r} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{a-ih}^{a+ih} \frac{x^{s+r-1}}{s+r-1} ds \right\},$$

also

$$(40.) \qquad \lim_{h=\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{a-ih}^{a+ih} \frac{x^s}{s(s+r-1)} ds = \frac{1}{r-1} \cdot (1-x^{1-r}).$$

Falls dagegen $r = 1$ ist, erhält man, da

$$\int \frac{x^s}{s^2} ds = -\frac{x^s}{s} + lx \cdot \int \frac{x^s}{s} ds$$

ist,

$$(40^a.) \qquad \lim_{h=\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{a-ih}^{a+ih} \frac{x^s}{s^2} ds = lx = \lim_{r=1} \frac{1-x^{1-r}}{r-1}.$$

Für das vierte Glied endlich kann man folgendermassen schliessen: Man hat, wenn zunächst vorausgesetzt wird, dass r von allen negativen geraden ganzzahligen Werthen verschieden sei,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{2} l \frac{n}{n+1} + \frac{1}{s+r+2n} \right\}$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{2} \left(l \frac{n}{n+1} + \frac{1}{n} \right) + \left(\frac{1}{s+r+2n} - \frac{1}{r+2n} \right) + \left(\frac{1}{r+2n} - \frac{1}{2n} \right) \right\}$$
$$= \frac{1}{2} C - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{s}{(r+2n)(s+r+2n)} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r}{2n(r+2n)},$$

wo

$$C = 0{,}57721\,56649\ldots$$

wieder die *Euler*sche Constante bedeutet. Daher ist

$$(41.)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{1}{2\pi i}\int_{a-ih}^{a+ih}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{2}\,l\,\frac{n}{n+1}+\frac{1}{s+r+2n}\right\}\frac{x^s}{s}\,ds \\ &\qquad = \left\{\frac{1}{2}\,C-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r}{2n(r+2n)}\right\}\cdot\frac{1}{2\pi i}\int_{a-ih}^{a+ih}\frac{x^s}{s}\,ds \\ &\qquad\qquad -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{r+2n}\cdot\frac{1}{2\pi i}\int_{a-ih}^{a+ih}\frac{x^s}{s+r+2n}\,ds. \end{aligned}\right.$$

Ferner ist, wenn G eine beliebige ganze positive Zahl bedeutet,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{r+2n}\cdot\frac{1}{2\pi i}\int_{a-ih}^{a+ih}\frac{x^s}{s+r+2n}\,ds = \sum_{n=1}^{G}\frac{x^{-r-2n}}{r+2n}\cdot\frac{1}{2\pi i}\int_{a-ih}^{a+ih}\frac{x^{s+r+2n}}{s+r+2n}\,ds$$
$$+\sum_{n=G+1}^{\infty}\frac{x^{-r-2n}}{r+2n}\cdot\frac{1}{2\pi i}\int_{a-ih}^{a+ih}\frac{x^{s+r+2n}}{s+r+2n}\,ds.$$

Da nach (29.)

$$\left|\int_{a-ih}^{a+ih}\frac{x^{s+r+2n}}{s+r+2n}\,ds\right| = \left|\int_{a+r+2n-ih}^{a+r+2n+ih}\frac{e^{\sigma lx}}{\sigma}\,d\sigma\right| < (4+\pi)\cdot\sqrt{2}\cdot\frac{x^{a+r+2n}}{lx}\cdot\frac{1}{a+r+2n}$$

ist, so ergiebt sich

$$\left|\sum_{n=G+1}^{\infty}\frac{x^{-r-2n}}{r+2n}\cdot\frac{1}{2\pi i}\int_{a-ih}^{a+ih}\frac{x^{s+r+2n}}{s+r+2n}\,ds\right| < \frac{4+\pi}{\pi.\sqrt{2}}\cdot\frac{x^a}{lx}\sum_{n=G+1}^{\infty}\frac{1}{(r+2n)(a+r+2n)}$$
$$< \frac{4+\pi}{\pi.\sqrt{2}}\cdot\frac{x^a}{lx}\int_G^{\infty}\frac{dy}{(r+2y)(a+r+2y)}$$
$$< \frac{4+\pi}{\pi.\sqrt{2}}\cdot\frac{x^a}{lx}\int_G^{\infty}\frac{dy}{(r+2y)^2}$$
$$< \frac{4+\pi}{2\pi.\sqrt{2}}\cdot\frac{x^a}{lx}\cdot\frac{1}{r+2G}\,.$$

Nun wähle man nach willkürlicher Annahme einer beliebig kleinen reellen positiven Zahl ε zuerst die Zahl G so, dass die Ungleichungen

$$\sum_{n=G+1}^{\infty}\frac{x^{-r-2n}}{r+2n} < \frac{\varepsilon}{3} \quad\text{und}\quad \frac{4+\pi}{2\pi.\sqrt{2}}\cdot\frac{x^a}{lx}\cdot\frac{1}{r+2G} < \frac{\varepsilon}{3}$$

gleichzeitig bestehen, was ja nur erfordert, dass G oberhalb einer gewissen Grenze liege, und sodann die Zahl h so gross, dass auch

$$\left|\sum_{n=1}^{G}\frac{x^{-r-2n}}{r+2n}\cdot\frac{1}{2\pi i}\int_{a-ih}^{a+ih}\frac{x^{s+r+2n}}{s+r+2n}\,ds-\sum_{n=1}^{G}\frac{x^{-r-2n}}{r+2n}\right| < \frac{\varepsilon}{3}$$

wird, was nach Formel (30.) immer möglich ist. Hierauf denke man sich

die Differenz

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{r+2n}\cdot\frac{1}{2\pi i}\int_{a-ih}^{a+ih}\frac{x^s}{s+r+2n}ds-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{-r-2n}}{r+2n}$$

in die drei Theile

$$\sum_{n=1}^{G}\frac{x^{-r-2n}}{r+2n}\cdot\frac{1}{2\pi i}\int_{a-ih}^{a+ih}\frac{x^{s+r+2n}}{s+r+2n}ds-\sum_{n=1}^{G}\frac{x^{-r-2n}}{r+2n};\quad -\sum_{n=G+1}^{\infty}\frac{x^{-r-2n}}{r+2n};$$

$$\sum_{n=G+1}^{\infty}\frac{1}{r+2n}\cdot\frac{1}{2\pi i}\int_{a-ih}^{a+ih}\frac{x^s}{s+r+2n}ds$$

zerlegt. Dann erhält man

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{r+2n}\cdot\frac{1}{2\pi i}\int_{a-ih}^{a+ih}\frac{x^s}{s+r+2n}ds-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{-r-2n}}{r+2n}\right|<\varepsilon,$$

oder anders ausgedrückt

$$\lim_{h=\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{r+2n}\cdot\frac{1}{2\pi i}\int_{a-ih}^{a+ih}\frac{x^s}{s+r+2n}ds=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{-r-2n}}{r+2n}.$$

Daher folgt aus (41.) unter Berücksichtigung von (35.):

$$\lim_{h=\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{a-ih}^{a+ih}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{2}l\frac{n}{n+1}+\frac{1}{s+r+2n}\right\}\frac{x^s}{s}ds$$

$$=\frac{1}{2}C-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r}{2n(r+2n)}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{-r-2n}}{r+2n}.$$

Giebt man dieser Gleichung die Form

$$\lim_{h=\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{a-ih}^{a+ih}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{2}l\frac{n}{n+1}+\frac{1}{s+r+2n}\right\}\frac{x^s}{s}ds=\frac{1}{2}C-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r+2nx^{-r-2n}}{2n(r+2n)},$$

so bleibt dieselbe auch dann noch richtig, wenn r mit einer negativen geraden ganzen Zahl $-2m$ zusammenfällt, sobald man nur das die unbestimmte Form $\frac{0}{0}$ annehmende Glied

$$\frac{r+2mx^{-r-2m}}{2m(r+2m)}$$

der rechts stehenden Summe durch seinen Grenzwerth

$$\lim_{r=-2m}\frac{r+2mx^{-r-2m}}{2m(r+2m)}=\frac{1}{2m}-lx$$

ersetzt. Dies ergiebt sich unter Benutzung der Formel (40^a.) durch einfache und nahe liegende Abänderungen der vorangehenden Betrachtungen.

Hiermit ist nachgewiesen, dass sämmtliche Glieder der rechten Seite der Gleichung (39.) bei unbegrenzt wachsendem h gegen endliche Grenz-

werthe convergiren. Also strebt auch die linke Seite dieser Gleichung einem endlichen Grenzwerthe zu, und zwar ist

$$(42.)\quad \begin{cases} \lim\limits_{h=\infty} \sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{a-ih}^{a+ih} \frac{2(s+r-\frac{1}{2})}{(s+r-\frac{1}{2})^2+\alpha_\nu^2} \cdot \frac{x^s}{s}\, ds \\ \qquad = -\varDelta(x,r) + \frac{1-x^{1-r}}{r-1} - \frac{1}{2} l\pi - \frac{1}{2} C + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{r+2nx^{-r-2n}}{2n(r+2n)}, \end{cases}$$

mit dem Zusatz, dass, falls ein Glied der rechten Seite für einen speciellen Werth r_0 von r die unbestimmte Form $\frac{0}{0}$ annimmt, an Stelle dieses Gliedes derjenige Grenzwerth zu setzen ist, welchem dasselbe bei unbegrenzter Annäherung der Veränderlichen r an den festen Werth r_0 zustrebt.

Auch jedes einzelne Glied der in Gleichung (42.) auf der linken Seite stehenden Summe nähert sich bei unbegrenzt wachsendem h einem endlichen Grenzwerth. Man hat nämlich

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{a-ih}^{a+ih} \frac{2(s+r-\frac{1}{2})}{(s+r-\frac{1}{2})^2+\alpha_\nu^2} \cdot \frac{x^s}{s}\, ds$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{a-ih}^{a+ih} \left\{ \frac{1}{s+r-\frac{1}{2}-i\alpha_\nu} + \frac{1}{s+r-\frac{1}{2}+i\alpha_\nu} \right\} \frac{x^s}{s}\, ds,$$

und da

$$\frac{1}{(s+r-\frac{1}{2}-i\alpha_\nu).s} = \frac{1}{r-\frac{1}{2}-i\alpha_\nu} \cdot \frac{1}{s} - \frac{1}{r-\frac{1}{2}-i\alpha_\nu} \cdot \frac{1}{s+r-\frac{1}{2}-i\alpha_\nu}$$

und

$$\frac{1}{(s+r-\frac{1}{2}+i\alpha_\nu)s} = \frac{1}{r-\frac{1}{2}+i\alpha_\nu} \cdot \frac{1}{s} - \frac{1}{r-\frac{1}{2}+i\alpha_\nu} \cdot \frac{1}{s+r-\frac{1}{2}+i\alpha_\nu}$$

ist, so folgt hieraus

$$(43.)\quad \begin{cases} \frac{1}{2\pi i} \int_{a-ih}^{a+ih} \frac{2(s+r-\frac{1}{2})}{(s+r-\frac{1}{2})^2+\alpha_\nu^2} \cdot \frac{x^s}{s}\, ds = \frac{2(r-\frac{1}{2})}{(r-\frac{1}{2})^2+\alpha_\nu^2} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{a-ih}^{a+ih} \frac{x^s}{s}\, ds \\ \qquad - \frac{x^{-r+\frac{1}{2}+i\alpha_\nu}}{r-\frac{1}{2}-i\alpha_\nu} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{a-ih}^{a+ih} \frac{x^{s+r-\frac{1}{2}-i\alpha_\nu}}{s+r-\frac{1}{2}-i\alpha_\nu}\, ds \\ \qquad - \frac{x^{-r+\frac{1}{2}-i\alpha_\nu}}{r-\frac{1}{2}+i\alpha_\nu} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{a-ih}^{a+ih} \frac{x^{s+r-\frac{1}{2}+i\alpha_\nu}}{s+r-\frac{1}{2}+i\alpha_\nu}\, ds. \end{cases}$$

Setzt man nun wieder

$$(19.)\qquad \alpha_\nu = \beta_\nu + i\gamma_\nu, \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots, \infty),$$

wo β_ν und γ_ν reell sind, und zur Abkürzung

$$(44.)\qquad a+r-\tfrac{1}{2}+\gamma_\nu = b,$$

so erhält man

$$(45.)\quad \begin{cases} \frac{1}{2\pi i}\int_{a-ih}^{a+ih}\frac{x^{s+r-\frac{1}{2}-i\alpha_\nu}}{s+r-\frac{1}{2}-i\alpha_\nu}ds = \frac{1}{2\pi i}\int_{b-i(h+\beta_\nu)}^{b+i(h-\beta_\nu)}\frac{x^\sigma}{\sigma}d\sigma \\ = \frac{1}{2\pi i}\int_{b-i(h+\beta_\nu)}^{b+i(h+\beta_\nu)}\frac{x^\sigma}{\sigma}d\sigma - \frac{1}{2\pi i}\int_{b+i(h-\beta_\nu)}^{b+i(h+\beta_\nu)}\frac{x^\sigma}{\sigma}d \end{cases}$$

Nimmt man nun $h > \beta_\nu$, und ersetzt man in (28.) g, c, d, v beziehentlic durch $b, h-\beta_\nu, h+\beta_\nu, lx$, so erhält man

$$\left|\int_{b+i(h-\beta_\nu)}^{b+i(h+\beta_\nu)}\frac{x^\sigma}{\sigma}d\sigma\right| < \frac{4+\pi}{\sqrt{2}}\cdot\frac{x^b}{lx}\cdot\frac{1}{b+h-\beta_\nu},$$

also

$$\lim_{h=\infty}\frac{1}{2\pi i}\cdot\int_{b+i(h-\beta_\nu)}^{b+i(h+\beta_\nu)}\frac{x^\sigma}{\sigma}d\sigma = 0.$$

Da ferner nach (35.)

$$\lim_{h=\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{b-i(h+\beta_\nu)}^{b+i(h+\beta_\nu)}\frac{x^\sigma}{\sigma}d\sigma = 1$$

ist, so ergiebt sich

$$\lim_{h=\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{a-ih}^{a+ih}\frac{x^{s+r-\frac{1}{2}-i\alpha_\nu}}{s+r-\frac{1}{2}-i\alpha_\nu}ds = 1.$$

Ganz ähnlich findet man

$$\lim_{h=\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{a-ih}^{a+ih}\frac{x^{s+r-\frac{1}{2}+i\alpha_\nu}}{s+r-\frac{1}{2}+i\alpha_\nu}ds = 1.$$

Folglich nähert sich auch die linke Seite der Gleichung (43.) einem end lichen Grenzwerth, wie behauptet wurde, und zwar ist

$$\lim_{h=\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{a-ih}^{a+ih}\frac{2(s+r-\frac{1}{2})}{(s+r-\frac{1}{2})^2+\alpha_\nu^2}\cdot\frac{x^s}{s}ds = \frac{2(r-\frac{1}{2})}{(r-\frac{1}{2})^2+\alpha_\nu^2} - x^{-r+\frac{1}{2}}.\left\{\frac{x^{i\alpha_\nu}}{r-\frac{1}{2}-i\alpha_\nu}+\frac{x^{-i\alpha_\nu}}{r-\frac{1}{2}+i\alpha_\nu}\right.$$

$$= \frac{2(r-\frac{1}{2})}{(r-\frac{1}{2})^2+\alpha_\nu^2} - 2.x^{-r+\frac{1}{2}}.\frac{(r-\frac{1}{2})\cos(\alpha_\nu lx)-\alpha_\nu\sin(\alpha_\nu lx)}{(r-\frac{1}{2})^2+\alpha_\nu^2}$$

Das hiermit gewonnene Ergebniss führt zu folgender Frage:

Ist die unendliche Reihe, welche die Functionen

$$(46.)\qquad W_\nu(x, r) = \frac{2(r-\frac{1}{2})}{(r-\frac{1}{2})^2+\alpha_\nu^2} - 2.x^{-r+\frac{1}{2}}.\frac{(r-\frac{1}{2})\cos(\alpha_\nu lx)-\alpha_\nu\sin(\alpha_\nu lx}{(r-\frac{1}{2})^2+\alpha_\nu^2}$$

$$(\nu = 1, 2, 3, \ldots, \infty)$$

zu Gliedern hat, für beliebige Werthe von x und r convergent

Und stimmt ihre Summe mit der rechten Seite der Gleichung (42.) überein? Mit andern Worten:

Darf man in dem Ausdrucke

$$\lim_{h=\infty} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{a-ih}^{a+ih} \frac{2(s+r-\frac{1}{2})}{(s+r-\frac{1}{2})^2+\alpha_\nu^2} \cdot \frac{x^s}{s}\, ds$$

die Reihenfolge der durch die Zeichen Σ und lim angedeuteten Operationen umkehren, ohne dass der Werth dieses Ausdruckes eine Aenderung erleidet?

Die Antwort lautet bejahend und wird gegeben durch den folgenden Satz:

Wenn die Glieder der unendlichen Reihe

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} W_\nu(x,\, r)$$

so geordnet werden, wie sie bei wachsenden Werthen des Index ν auf einander folgen, so ist die Reihe für alle reellen Werthe von r und für alle reellen positiven Werthe von x convergent. Und wenn

$$x > 1$$

ist, so wird ihre Summe durch den Ausdruck

$$-\Lambda(x,\, r) + \frac{1-x^{1-r}}{r-1} - \frac{1}{2} l\pi - \frac{1}{2} C + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r+2nx^{-r-2n}}{2n(r+2n)}$$

dargestellt, wobei, falls ein Glied dieses Ausdruckes für einen speciellen Werth von r die unbestimmte Form $\frac{0}{0}$ annimmt, statt dieses Gliedes der entsprechende Grenzwerth zu nehmen ist.

Beweis: Es sei wie im ersten Abschnitt H die Anzahl derjenigen Zahlen α_ν, deren reelle Theile $\leqq h$ sind. Die Zahl h selbst sei von vorn herein so gross angenommen, dass H mindestens gleich 1 wird. Dann ergiebt sich aus der (nur eine andere Form der Gleichung (46.) darstellenden) Gleichung

$$W_\nu(x,\, r) = \frac{2(r-\frac{1}{2})}{(r-\frac{1}{2})^2+\alpha_\nu^2} - \frac{x^{-r+\frac{1}{2}+i\alpha_\nu}}{r-\frac{1}{2}-i\alpha_\nu} - \frac{x^{-r+\frac{1}{2}-i\alpha_\nu}}{r-\frac{1}{2}+i\alpha_\nu}$$

durch Summation von $\nu = 1$ bis $\nu = H$

$$(47.)\quad \sum_{\nu=1}^{H} W_\nu(x,\, r) = \sum_{\nu=1}^{H} \frac{2(r-\frac{1}{2})}{(r-\frac{1}{2})^2+\alpha_\nu^2} - \sum_{\nu=1}^{H} \frac{x^{-r+\frac{1}{2}+i\alpha_\nu}}{r-\frac{1}{2}-i\alpha_\nu} - \sum_{\nu=1}^{H} \frac{x^{-r+\frac{1}{2}-i\alpha_\nu}}{r-\frac{1}{2}+i\alpha_\nu}.$$

Ebenso folgt aus (43.), wenn man die Summe

$$\sum_{\nu=1}^{H}\frac{1}{2\pi i}\int_{a-ih}^{a+ih}\frac{2(s+r-\frac{1}{2})}{(s+r-\frac{1}{2})^2+\alpha_\nu^2}\cdot\frac{x^s}{s}\,ds$$

durch

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{a-ih}^{a+ih}\frac{2(s+r-\frac{1}{2})}{(s+r-\frac{1}{2})^2+\alpha_\nu^2}\cdot\frac{x^s}{s}\,ds-\sum_{\nu=H+1}^{\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{a-ih}^{a+ih}\frac{2(s+r-\frac{1}{2})}{(s+r-\frac{1}{2})^2+\alpha_\nu^2}\cdot\frac{x^s}{s}\,ds$$

ersetzt,

$$(48.)\quad\left\{\begin{aligned}0=&\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{a-ih}^{a+ih}\frac{2(s+r-\frac{1}{2})}{(s+r-\frac{1}{2})^2+\alpha_\nu^2}\cdot\frac{x^s}{s}\,ds\\&-\sum_{\nu=H+1}^{\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{a-ih}^{a+ih}\frac{2(s+r-\frac{1}{2})}{(s+r-\frac{1}{2})^2+\alpha_\nu^2}\cdot\frac{x^s}{s}\,ds\\&-\frac{1}{2\pi i}\int_{a-ih}^{a+ih}\frac{x^s}{s}\,ds\cdot\sum_{\nu=1}^{H}\frac{2(r-\frac{1}{2})}{(r-\frac{1}{2})^2+\alpha_\nu^2}\\&+\sum_{\nu=1}^{H}\frac{x^{-r+\frac{1}{2}+i\alpha_\nu}}{r-\frac{1}{2}-i\alpha_\nu}\cdot\frac{1}{2\pi i}\int_{a-ih}^{a+ih}\frac{x^{s+r-\frac{1}{2}-i\alpha_\nu}}{s+r-\frac{1}{2}-i\alpha_\nu}\,ds\\&+\sum_{\nu=1}^{H}\frac{x^{-r+\frac{1}{2}-i\alpha_\nu}}{r-\frac{1}{2}+i\alpha_\nu}\cdot\frac{1}{2\pi i}\int_{a-ih}^{a+ih}\frac{x^{s+r-\frac{1}{2}+i\alpha_\nu}}{s+r-\frac{1}{2}+i\alpha_\nu}\,ds.\end{aligned}\right.$$

Aus (47.) und (48.) ergiebt sich durch Addition

$$(49.)\quad\left\{\begin{aligned}\sum_{\nu=1}^{H}W_\nu(x,r)=&\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{a-ih}^{a+ih}\frac{2(s+r-\frac{1}{2})}{(s+r-\frac{1}{2})^2+\alpha_\nu^2}\cdot\frac{x^s}{s}\,ds\\&-\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{a-ih}^{a+ih}\frac{x^s}{s}\,ds-1\right)\cdot\sum_{\nu=1}^{H}\frac{2(r-\frac{1}{2})}{(r-\frac{1}{2})^2+\alpha_\nu^2}\\&-\sum_{\nu=1}^{H}\frac{x^{-r+\frac{1}{2}+i\alpha_\nu}}{r-\frac{1}{2}-i\alpha_\nu}\cdot\left(1-\frac{1}{2\pi i}\int_{a-ih}^{a+ih}\frac{x^{s+r-\frac{1}{2}-i\alpha_\nu}}{s+r-\frac{1}{2}-i\alpha_\nu}\,ds\right)\\&-\sum_{\nu=1}^{H}\frac{x^{-r+\frac{1}{2}-i\alpha_\nu}}{r-\frac{1}{2}+i\alpha_\nu}\cdot\left(1-\frac{1}{2\pi i}\int_{a-ih}^{a+ih}\frac{x^{s+r-\frac{1}{2}+i\alpha_\nu}}{s+r-\frac{1}{2}+i\alpha_\nu}\,ds\right)\\&-\sum_{\nu=H+1}^{\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{a-ih}^{a+ih}\frac{2(s+r-\frac{1}{2})}{(s+r-\frac{1}{2})^2+\alpha_\nu^2}\cdot\frac{x^s}{s}\,ds.\end{aligned}\right.$$

Wegen des schon früher erhaltenen, durch Gleichung (42.) ausgedrückten Ergebnisses genügt es daher zum Beweise der in Bezug auf die Reihe $\sum_{\nu=1}^{\infty}W_\nu(x,r)$ ausgesprochenen Behauptungen zu zeigen, dass jedes einzelne der Glieder, welche in Gleichung (49.) auf der rechten Seite stehen, mit alleiniger Ausnahme des ersten bei unbegrenzt wachsendem h gegen Null convergirt. Dies ergiebt sich aber durch die folgenden Betrachtungen:

Erstens. Nach Gleichung (35.) ist

$$\lim_{h=\infty}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{a-ih}^{a+ih}\frac{x^s}{s}\,ds-1\right) = 0.$$

Ferner folgt aus der Convergenz der Reihe $\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\alpha_\nu^2}$, dass auch die Reihe $\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{2(r-\frac{1}{2})}{(r-\frac{1}{2})^2+\alpha_\nu^2}$ convergirt. Daher kann der absolute Werth der Summe

$$\sum_{\nu=1}^{H}\frac{2(r-\frac{1}{2})}{(r-\frac{1}{2})^2+\alpha_\nu^2}$$

eine gewisse Grenze niemals überschreiten, wie gross auch H werden mag. Also ist auch

$$\lim_{h=\infty}\left\{\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{a-ih}^{a+ih}\frac{x^s}{s}\,ds-1\right)\cdot\sum_{\nu=1}^{H}\frac{2(r-\frac{1}{2})}{(r-\frac{1}{2})^2+\alpha_\nu^2}\right\} = 0.$$

Zweitens folgt aus (45.) unter Benutzung der durch (19.) und (44.) erklärten Bezeichnungen

$$1-\frac{1}{2\pi i}\int_{a-ih}^{a+ih}\frac{x^{s+r-\frac{1}{2}-i\alpha_\nu}}{s+r-\frac{1}{2}-i\alpha_\nu}\,ds$$
$$= 1-\frac{1}{2\pi i}\int_{b-i(h+\beta_\nu)}^{b+i(h+\beta_\nu)}\frac{x^\sigma}{\sigma}\,d\sigma+\frac{1}{2\pi i}\int_{b+i(h-\beta_\nu)}^{b+i(h+\beta_\nu)}\frac{x^\sigma}{\sigma}\,d\sigma$$

und sodann unter der Voraussetzung, dass $\beta_\nu \leqq h$ ist, welche für alle Glieder der in (49.) auf der rechten Seite an dritter Stelle stehenden Summe zutrifft, mit Hülfe von (28.) und (30.)

$$\left|1-\frac{1}{2\pi i}\int_{a-ih}^{a+ih}\frac{x^{s+r-\frac{1}{2}-i\alpha_\nu}}{s+r-\frac{1}{2}-i\alpha_\nu}\,ds\right| < \frac{3}{2\pi}\cdot\frac{x^b}{lx}\cdot\frac{1}{h+\beta_\nu}+\frac{4+\pi}{2.\sqrt{2}.\pi}\cdot\frac{x^b}{lx}\cdot\frac{1}{b+h-\beta_\nu}.$$

Also ist, wie man nach einfachen Zwischenrechnungen findet,

$$(50.)\quad \begin{cases} \left|\sum_{\nu=1}^{H}\frac{x^{-r+\frac{1}{2}+i\alpha_\nu}}{r-\frac{1}{2}-i\alpha_\nu}\cdot\left(1-\frac{1}{2\pi i}\int_{a-ih}^{a+ih}\frac{x^{s+r-\frac{1}{2}-i\alpha_\nu}}{s+r-\frac{1}{2}-i\alpha_\nu}\,ds\right)\right| \\ \qquad < \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{x^a}{lx}\left\{3.\sum_{\nu=1}^{H}\frac{1}{\beta_\nu(h+\beta_\nu)}+\frac{4+\pi}{\sqrt{2}}\cdot\sum_{\nu=1}^{H}\frac{1}{\beta_\nu(b+h-\beta_\nu)}\right\}. \end{cases}$$

Für die Werthe der Summen, welche in dieser Ungleichung auf der rechten Seite vorkommen, kann man aber mit Hülfe der im ersten Abschnitt er-

haltenen Ergebnisse obere Grenzen gewinnen. Hierzu werde, wie im ersten Abschnitt,

$$\operatorname{tg} 1 = 1{,}55741 = \varkappa$$

gesetzt. Ferner sei λ diejenige ganze Zahl, welche die Ungleichung

$$\frac{h-12}{2\varkappa} - 1 < \lambda \leqq \frac{h-12}{2\varkappa}$$

erfüllt. Denkt man sich das Intervall $0 \ldots h$ durch Schnitte, welche durch die Punkte

$$12; \quad 12+2\varkappa; \quad 12+4\varkappa; \quad \ldots, \quad 12+2\lambda\varkappa$$

geführt sind, in Theile zerlegt, so kann man die Beiträge, welche die diesen Theilintervallen angehörenden Zahlen β_ν zu der Summe $\sum_{\nu=1}^{H} \frac{1}{\beta_\nu(b+h-\beta_\nu)}$ liefern der Reihe nach abschätzen:

Das erste Theilintervall $0 \ldots 12$ enthält keine der Zahlen β_ν, kommt also überhaupt nicht in Betracht.

Für das zweite Theilintervall ist die Anzahl der Zahlen β_ν kleiner als $\varkappa l(12+\varkappa)$, und jede einzelne derselben erfüllt die Bedingungen

$$\beta_\nu > 12 \quad \text{und} \quad b+h-\beta_\nu > b+h-12-2\varkappa.$$

Somit ist der Beitrag, welchen diese Zahlen zu der erwähnten Summe liefer kleiner als

$$\frac{\varkappa . l(12+\varkappa)}{12.(b+h-12-2\varkappa)}.$$

Ebenso findet sich, dass die Beiträge, welche die dem 3., 4., ..., $(\lambda+1)$ Theilintervall angehörenden Zahlen β_ν liefern, beziehentlich kleiner als die Werthe, welche der Ausdruck

$$\frac{\varkappa l[12+(2\varrho+1)\varkappa]}{(12+2\varrho\varkappa).[b+h-12-2(\varrho+1)\varkappa]}$$

für $\varrho = 1, 2, \ldots, \lambda-1$ annimmt.

Endlich ist der Beitrag aller dem letzten Theilintervall angehö Zahlen β_ν kleiner als

$$\frac{\varkappa l h}{(12+2\lambda\varkappa).b}.$$

Folglich ist

$$\sum_{\nu=1}^{H}\frac{1}{\beta_\nu(b+h-\beta_\nu)} < \sum_{\varrho=0}^{\lambda-1}\frac{\varkappa l[12+(2\varrho+1).\varkappa]}{(12+2\varrho\varkappa).[b+h-12-2(\varrho+1)\varkappa]} + \frac{\varkappa.lh}{(12+2\lambda\varkappa).b}$$

$$< \frac{\varkappa lh}{h+b-2\varkappa}\cdot\sum_{\varrho=0}^{\lambda-1}\left\{\frac{1}{12+2\varrho\varkappa}+\frac{1}{b+h-12-2(\varrho+1)\varkappa}\right\}+\frac{\varkappa}{b}\cdot\frac{lh}{h-2\varkappa}$$

$$< \frac{\varkappa lh}{h+b-2\varkappa}\cdot\left\{\int_{-1}^{\lambda-1}\frac{dx}{12+2\varkappa.x}+\int_{1}^{\lambda}\frac{dx}{b+h-12-2\varkappa.x}+\frac{1}{b}\right\}+\frac{\varkappa}{b}\cdot\frac{lh}{h-2\varkappa}$$

$$< \frac{\varkappa lh}{h-2\varkappa}\cdot\left\{\frac{1}{2\varkappa}\cdot l\frac{12+2\varkappa(\lambda-1)}{12-2\varkappa}+\frac{1}{2\varkappa}l\frac{b+h-12-2\varkappa}{b+h-12-2\varkappa\lambda}+\frac{2}{b}\right\}$$

$$< \frac{lh}{h-2\varkappa}\cdot\left\{\frac{1}{2}l\frac{h}{8}+\frac{1}{2}l\frac{h+b}{b}+\frac{2\varkappa}{b}\right\}.$$

Hieraus folgt aber sofort

$$\lim_{h=\infty}\sum_{\nu=1}^{H}\frac{1}{\beta_\nu(b+h-\beta_\nu)} = 0.$$

Durch ähnliche Rechnungen ergiebt sich

$$\lim_{h=\infty}\sum_{\nu=1}^{H}\frac{1}{\beta_\nu(h+\beta_\nu)} = 0.$$

Nunmehr folgt aus (50.)

$$\lim_{h=\infty}\sum_{\nu=1}^{H}\frac{x^{-r+\frac12+i\alpha_\nu}}{r-\frac12-i\alpha_\nu}\cdot\left(1-\frac{1}{2\pi i}\int_{a-ih}^{a+ih}\frac{x^{s+r-\frac12-i\alpha_\nu}}{s+r-\frac12-i\alpha_\nu}ds\right) = 0.$$

Da der conjugirte Werth der hier vorkommenden Summe ebenfalls gegen Null convergiren muss, so ist *drittens*

$$\lim_{h=\infty}\sum_{\nu=1}^{H}\frac{x^{-r+\frac12-i\alpha_\nu}}{r-\frac12+i\alpha_\nu}\cdot\left(1-\frac{1}{2\pi i}\int_{a-ih}^{a+ih}\frac{x^{s+r-\frac12+i\alpha_\nu}}{s+r-\frac12+i\alpha_\nu}ds\right) = 0.$$

Viertens: Man hat nach (43.)

$$(51.)\quad\begin{cases}\displaystyle\sum_{\nu=H+1}^{\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{a-ih}^{a+ih}\frac{2(s+r-\frac12)}{(s+r-\frac12)^2+\alpha_\nu^2}\cdot\frac{x^s}{s}ds \\ \displaystyle\qquad = \frac{1}{2\pi i}\int_{a-ih}^{a+ih}\frac{x^s}{s}ds.\sum_{\nu=H+1}^{\infty}\frac{2(r-\frac12)}{(r-\frac12)^2+\alpha_\nu^2} \\ \displaystyle\qquad -\sum_{\nu=H+1}^{\infty}\left\{\frac{x^{-r+\frac12+i\alpha_\nu}}{r-\frac12-i\alpha_\nu}\cdot\frac{1}{2\pi i}\int_{a-ih}^{a+ih}\frac{x^{s+r-\frac12-i\alpha_\nu}}{s+r-\frac12-i\alpha_\nu}ds\right. \\ \displaystyle\qquad\qquad \left.+\frac{x^{-r+\frac12-i\alpha_\nu}}{r-\frac12+i\alpha_\nu}\cdot\frac{1}{2\pi i}\int_{a-ih}^{a+ih}\frac{x^{s+r-\frac12+i\alpha_\nu}}{s+r-\frac12+i\alpha_\nu}ds\right\}.\end{cases}$$

Wegen der Convergenz der unendlichen Reihe $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}\frac{2(r-\frac{1}{2})}{(r-\frac{1}{2})^2+\alpha_\nu^2}$ ist

$$\lim_{h=\infty}\sum_{\nu=H+1}^{\infty}\frac{2(r+\frac{1}{2})}{(r-\frac{1}{2})^2+\alpha_\nu^2} = 0,$$

und da der absolute Werth des Ausdruckes $\frac{1}{2\pi i}\int_{a-ih}^{a+ih}\frac{x^s}{s}ds$ nach (29.) die von h unabhängige Zahl $(4+\pi).\sqrt{2}\cdot\frac{x^a}{alx}$ niemals zu überschreiten vermag, so ist auch

$$\text{(52.)}\qquad \lim_{h=\infty}\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_{a-ih}^{a+ih}\frac{x^s}{s}ds\cdot\sum_{\nu=H+1}^{\infty}\frac{2(r-\frac{1}{2})}{(r-\frac{1}{2})^2+\alpha_\nu^2}\right\} = 0.$$

Ferner erhält man unter Benutzung der durch (19.) und (44.) erklärten Bezeichnungen

$$\sum_{\nu=H+1}^{\infty}\frac{x^{-r+\frac{1}{2}+i\alpha_\nu}}{r-\frac{1}{2}-i\alpha_\nu}\cdot\frac{1}{2\pi i}\int_{a-ih}^{a+ih}\frac{x^{s+r-\frac{1}{2}-i\alpha_\nu}}{s+r-\frac{1}{2}-i\alpha_\nu}ds$$
$$= \sum_{\nu=H+1}^{\infty}\frac{x^{a-b+i\beta_\nu}}{b-a-i\beta_\nu}\cdot\frac{1}{2\pi i}\int_{b-i(\beta_\nu+h)}^{b-i(\beta_\nu-h)}\frac{x^\sigma}{\sigma}d\sigma,$$

also

$$\text{(53.)}\qquad \begin{cases}\left|\sum\limits_{\nu=H+1}^{\infty}\frac{x^{-r+\frac{1}{2}+i\alpha_\nu}}{r-\frac{1}{2}-i\alpha_\nu}\cdot\frac{1}{2\pi i}\int_{a-ih}^{a+ih}\frac{x^{s+r-\frac{1}{2}-i\alpha_\nu}}{s+r-\frac{1}{2}-i\alpha_\nu}ds\right| \\ \qquad < \frac{x^{a-b}}{2\pi}\cdot\sum\limits_{\nu=H+1}^{\infty}\frac{1}{\beta_\nu}\cdot\left|\frac{1}{i}\int_{b-i(\beta_\nu+h)}^{b-i(\beta_\nu-h)}\frac{x^\sigma}{\sigma}d\sigma\right|.\end{cases}$$

Nun ist aber

$$\left|\frac{1}{i}\int_{b-i(\beta_\nu+h)}^{b-i(\beta_\nu-h)}\frac{x^\sigma}{\sigma}d\sigma\right| = \left|\frac{1}{i}\int_{b+i(\beta_\nu-h)}^{b+i(\beta_\nu+h)}\frac{x^\sigma}{\sigma}d\sigma\right|,$$

denn die beiden Ausdrücke, deren absolute Beträge hier verglichen werden, haben conjugirte Werthe, und da gegenwärtig nur solche Werthe von ν in Betracht kommen, welche grösser als H sind, für welche also die Differenz $\beta_\nu-h$ positiv ist, so kann man die rechte Seite der vorstehenden Gleichung mittelst der Formel (28.) abschätzen, indem man in dieser

$$c=\beta_\nu-h;\quad d=\beta_\nu+h;\quad g=b;\quad v=lx$$

setzt. So erhält man die Ungleichung

$$\left|\frac{1}{i}\int_{b-i(\beta_\nu+h)}^{b-i(\beta_\nu-h)}\frac{x^\sigma}{\sigma}d\sigma\right| < \frac{4+\pi}{\sqrt{2}}\cdot\frac{x^b}{lx}\cdot\frac{1}{b+\beta_\nu-h}$$

und hierauf aus (53.)

$$(54.)\quad \begin{cases} \left| \sum_{\nu=H+1}^{\infty} \frac{x^{-r+\frac{1}{2}+i\alpha_\nu}}{r-\frac{1}{2}-i\alpha_\nu} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{a-ih}^{a+ih} \frac{x^{s+r-\frac{1}{2}-i\alpha_\nu}}{s+r-\frac{1}{2}-i\alpha_\nu} ds \right| \\ \qquad < \frac{4+\pi}{2.\sqrt{2}.\pi} \cdot \frac{x^a}{lx} \cdot \sum_{\nu=H+1}^{\infty} \frac{1}{\beta_\nu(b+\beta_\nu-h)}. \end{cases}$$

Nun sei wieder zur Abkürzung

$$\operatorname{tg} 1 = \varkappa$$

gesetzt. Ferner werde von vorn herein vorausgesetzt, dass $h > b$ sei, und durch μ die grösste in $\frac{h}{2\varkappa}$ enthaltene ganze Zahl bezeichnet. Dann erhält man durch Zerlegung des Intervalles $h \dots \infty$ in Theile, welche die Werthe

$$h;\quad h+2\varkappa;\quad h+4\varkappa;\quad h+6\varkappa;\quad \dots$$

zu Grenzen haben, auf Grund ähnlicher Ueberlegungen wie im Vorangehenden die Ungleichung

$$\sum_{\nu=H+1}^{\infty} \frac{1}{\beta_\nu(b+\beta_\nu-h)} < \sum_{\varrho=0}^{\infty} \frac{\varkappa l[h+(2\varrho+1)\varkappa]}{(h+2\varrho\varkappa).(b+2\varrho\varkappa)}$$

und sodann durch Trennung der $\mu+1$ ersten Summanden der rechten Seite von den übrigen

$$\sum_{\nu=H+1}^{\infty} \frac{1}{\beta_\nu(b+\beta_\nu-h)} < \sum_{\varrho=0}^{\mu} \frac{\varkappa l[h+(2\varrho+1)\varkappa]}{(h+2\varrho\varkappa)(b+2\varrho\varkappa)} + \sum_{\varrho=\mu+1}^{\infty} \frac{\varkappa l[h+(2\varrho+1)\varkappa]}{(h+2\varrho\varkappa)(b+2\varrho\varkappa)}$$

$$< \varkappa \cdot \frac{l(2h+\varkappa)}{h} \sum_{\varrho=0}^{\mu} \frac{1}{b+2\varrho\varkappa} + \varkappa \sum_{\varrho=\mu+1}^{\infty} \frac{l[h+(2\varrho+1)\varkappa]}{(b+2\varrho\varkappa)^2}$$

$$< \varkappa \cdot \frac{l(2h+\varkappa)}{h} \cdot \left(\frac{1}{b} + \int_0^{\mu} \frac{dx}{b+2\varkappa x}\right) + \varkappa \cdot \int_{\mu}^{\infty} \frac{l(h+\varkappa+2\varkappa x)}{(b+2\varkappa x)^2} dx$$

$$< \varkappa \cdot \frac{l(2h+\varkappa)}{h} \cdot \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{2\varkappa} l \frac{b+h}{b}\right) + \frac{1}{2} \frac{l(h+\varkappa+2\varkappa\mu)}{b+2\varkappa\mu} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{h+\varkappa-b} \cdot l \frac{b+2\varkappa\mu}{h+\varkappa+2\varkappa\mu}$$

$$< \varkappa \cdot \frac{l(2h+\varkappa)}{h} \cdot \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{2\varkappa} l \frac{b+h}{b}\right) + \frac{1}{2} \frac{l(2h+\varkappa)}{h+b-2\varkappa} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{h+\varkappa-b} \cdot l \frac{2h+\varkappa}{h+b-2\varkappa}.$$

Hieraus folgt aber sofort

$$\lim_{h=\infty} \sum_{\nu=H+1}^{\infty} \frac{1}{\beta_\nu(b+\beta_\nu-h)} = 0,$$

sodann aus (54.)

$$\lim_{h=\infty} \sum_{\nu=H+1}^{\infty} \frac{x^{-r+\frac{1}{2}+i\alpha_\nu}}{r-\frac{1}{2}-i\alpha_\nu} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{a-ih}^{a+ih} \frac{x^{s+r-\frac{1}{2}-i\alpha_\nu}}{s+r-\frac{1}{2}-i\alpha_\nu} ds = 0$$

und hierauf durch Betrachtung des conjugirten Werthes der hier vorkommen-

den Summe:

$$\lim_{h=\infty} \sum_{\nu=H+1}^{\infty} \frac{x^{-r+\frac{1}{2}-i\alpha_\nu}}{r-\frac{1}{2}+i\alpha_\nu} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{a-ih}^{a+ih} \frac{x^{s+r-\frac{1}{2}+i\alpha_\nu}}{s+r-\frac{1}{2}+i\alpha_\nu} ds = 0.$$

Nunmehr ergiebt sich mit Hülfe von (51.) und (52.)

$$\lim_{h=\infty} \sum_{\nu=H+1}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{a-ih}^{a+ih} \frac{2(s+r-\frac{1}{2})}{(s+r-\frac{1}{2})^2+\alpha_\nu^2} \cdot \frac{x^s}{s} ds = 0.$$

Mit Ausnahme des ersten convergiren also sämmtliche Glieder der rechten Seite der Gleichung (49.) bei unbegrenzt wachsendem h gegen Null. Daher folgt aus (49.) und (42.):

$$\lim_{H=\infty} \sum_{\nu=1}^{H} W_\nu(x,\, r) = \lim_{h=\infty} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{a-ih}^{a+ih} \frac{2(s+r-\frac{1}{2})}{(s+r-\frac{1}{2})^2+\alpha_\nu^2} \cdot \frac{x^s}{s} ds$$

$$= -\Lambda(x,\, r) + \frac{1-x^{1-r}}{r-1} - \frac{1}{2} l\pi - \frac{1}{2} C + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r+2nx^{-r-2n}}{2n(r+2n)},$$

wobei ein auf der rechten Seite etwa auftretender Summand von der Form $\frac{0}{0}$ in der bereits mehrfach angegebenen Weise zu deuten ist.

Hiermit sind die oben hinsichtlich der Reihe $\sum_{\nu=1}^{\infty} W_\nu(x, r)$ ausgesprochenen Behauptungen vollständig bewiesen. Zugleich ist für die zahlentheoretische Function $\Lambda(x, r)$ der folgende analytische Ausdruck gewonnen

$$(55.) \quad \Lambda(x,\, r) = \frac{1-x^{1-r}}{r-1} - \frac{1}{2} l\pi - \frac{1}{2} C + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r+2nx^{-r-2n}}{2n(r+2n)} - \sum_{\nu=1}^{\infty} W_\nu(x,\, r).$$

Für $r = \frac{1}{2}$ folgt aus (46.)

$$W_\nu(x,\, \tfrac{1}{2}) = 2 \cdot \frac{\sin(\alpha_\nu lx)}{\alpha_\nu}.$$

Daher ergiebt sich aus dem Vorangehenden insbesondere der folgende Satz:

Die Vertheilung der Nullstellen α_ν der Fnnction $\xi(t)$ ist eine solche, dass die unendliche Reihe

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\sin(\alpha_\nu lx)}{\alpha_\nu},$$

vorausgesetzt, dass ihre Glieder so geordnet werden, wie sie bei wachsenden Werthen des Index ν auf einander folgen, für jeden reellen positiven Werth von x convergirt, und zwar besteht bei dieser Anordnung der Glieder für $x > 1$ die Gleichung

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\sin(\alpha_\nu lx)}{\alpha_\nu} = -\tfrac{1}{2}\Lambda(x,\, \tfrac{1}{2}) + \sqrt{x} - 1 - \tfrac{1}{4} l\pi - \tfrac{1}{4} C$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n(4n+1)} + \frac{1}{\sqrt{x}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{-2n}}{4n+1},$$

oder

$$(56.)\quad \begin{cases} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\sin(\alpha_\nu lx)}{\alpha_\nu} = -\frac{1}{2}\Lambda(x, \frac{1}{2}) + \sqrt{x} - 1 - \frac{1}{4}(l\pi + C) \\ \qquad + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n(4n+1)} - \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{4} l \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{x}}. \end{cases}$$

Da die links stehende unendliche Reihe eine unstetige Function des Argumentes x darstellt, so convergirt sie nothwendig ungleichmässig, und zwar wird die Convergenz eine beliebig langsame, so oft x sich einer Primzahl oder einer Primzahlpotenz unbegrenzt annähert. Dasselbe findet statt, wenn x abnehmend in 1 übergeht. Denn setzt man direct $x = 1$, so wird

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\sin(\alpha_\nu lx)}{\alpha_\nu} = 0,$$

weil jedes einzelne Glied der Reihe verschwindet. Giebt man dagegen der Veränderlichen x zuerst einen oberhalb 1 liegenden Werth und lässt man dieselbe sodann abnehmend dem Werth 1 unbegrenzt nahe rücken, so wird die Summe der Reihe $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\sin(\alpha_\nu lx)}{\alpha_\nu}$ unendlich gross, weil der oben für diese Summe gefundene Ausdruck ein Glied enthält, nämlich $\frac{1}{4} l \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$, welches über alle Grenzen hinaus wächst, während alle übrigen Glieder endliche Werthe behalten.

Da man der Gleichung (46.) die Gestalt geben kann

$$(57.)\quad \begin{cases} W_\nu(x, r) = 2(r-\frac{1}{2}) \cdot \left\{ \frac{1 - x^{-r+\frac{1}{2}} \cos(\alpha_\nu lx)}{(r-\frac{1}{2})^2 + \alpha_\nu^2} - \frac{(r-\frac{1}{2}) x^{-r+\frac{1}{2}} \sin(\alpha_\nu lx)}{\alpha_\nu[(r-\frac{1}{2})^2 + \alpha_\nu^2]} \right\} \\ \qquad + 2x^{-r+\frac{1}{2}} \cdot \frac{\sin(\alpha_\nu lx)}{\alpha_\nu}, \end{cases}$$

so ergiebt sich:

Die unendliche Reihe $\sum_{\nu=1}^{\infty} W_\nu(x, r)$ *kann als Summe zweier Theile dargestellt werden, von denen der eine*

$$2(r-\tfrac{1}{2}) \sum_{\nu=1}^{\infty} \left\{ \frac{1 - x^{-r+\frac{1}{2}} . \cos(\alpha_\nu lx)}{(r-\frac{1}{2})^2 + \alpha_\nu^2} - \frac{(r-\frac{1}{2}) . x^{-r+\frac{1}{2}} \sin(\alpha_\nu lx)}{\alpha_\nu[(r-\frac{1}{2})^2 + \alpha_\nu^2]} \right\}$$

für alle positiven Werthe von x *unbedingt und gleichmässig convergirt, während der andere*

$$2x^{-r+\frac{1}{2}} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\sin(\alpha_\nu lx)}{\alpha_\nu}$$

aus der ungleichmässig convergirenden Reihe

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\sin(\alpha_\nu lx)}{\alpha_\nu}$$

durch Multiplication mit einem Factor hervorgeht, der eine stetige Function von x ist.

Auch alle anderen ungleichmässig convergenten unendlichen Reihen, welche im Nachfolgenden noch vorkommen werden, haben die gleiche Beschaffenheit: *Bei jeder derselben ist der ungleichmässig convergirende Theil das Product einer stetigen Function von x mit der speciellen Reihe*

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\sin(\alpha_\nu lx)}{\alpha_\nu}.$$

Für $r = 0$ folgt aus (55.)

$$\Delta(x,\ 0) = x - 1 - \frac{1}{2} l\pi - \frac{C}{2} - \frac{1}{2} l\left(1 - \frac{1}{x^2}\right) + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\frac{1}{4} + \alpha_\nu^2} - x^{\frac{1}{2}} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\cos(\alpha_\nu lx) + 2\alpha_\nu \sin(\alpha_\nu lx)}{\frac{1}{4} + \alpha_\nu^2}.$$

Da nun, wie sich aus dem Zusammenhang der Functionen $\zeta(s)$ und $\xi(t)$ leicht ergiebt,

$$\frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)} = 1 + \tfrac{1}{2} l\pi + \tfrac{1}{2} C - \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\frac{1}{4} + \alpha_\nu^2},$$

oder

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\frac{1}{4} + \alpha_\nu^2} = 1 + \tfrac{1}{2} l\pi + \tfrac{1}{2} C - \frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)}$$

und

$$\zeta(0) = -\tfrac{1}{2}\text{*)}; \quad \zeta'(0) = -\tfrac{1}{2} l(2\pi),$$

also

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\frac{1}{4} + \alpha_\nu^2} = 1 + \tfrac{1}{2} C - \tfrac{1}{2} l\pi - l2$$

ist, so ergiebt sich

$$\text{(58.)} \qquad \Delta(x,\ 0) = x - l(2\pi) - \tfrac{1}{2} l\left(1 - \frac{1}{x^2}\right) - x^{\frac{1}{2}} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\cos(\alpha_\nu lx) + 2\alpha_\nu \sin(\alpha_\nu lx)}{\frac{1}{4} + \alpha_\nu^2}.$$

Eine ähnlich aussehende, aber unrichtige Gleichung ist in der Abhandlung des Herrn *E. Cahen* „Sur la fonction $\zeta(s)$ de *Riemann* et sur des

---

*) In den Anmerkungen, welche *Riemanns* Abhandlung in der *zweiten* Auflage seiner gesammelten mathematischen Werke beigefügt sind, wird auf Seite 155, letzte Zeile angegeben, die Constante $\zeta(0)$ habe den Werth $\frac{1}{2}$. Es muss statt dessen heissen $\zeta(0) = -\frac{1}{2}$.

fonctions analogues"*) am Schluss der Nummer 33. aufgestellt, jedoch ohne dass die Convergenz der rechts vorkommenden unendlichen Reihe bewiesen wäre. Gerade in diesem Beweise besteht aber die hauptsächlichste hierbei zu überwindende Schwierigkeit.

Giebt man der Veränderlichen x irgend einen festen oberhalb 1 liegenden Werth, und sieht man dagegen r als veränderlich an, so ist die unendliche Reihe

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} W_\nu(x, r)$$

auf jedem endlichen Intervall *gleichmässig* convergent. Daher kann das über irgend ein endliches Intervall erstreckte Integral der durch diese Reihe dargestellten Function von r durch Integration der einzelnen Glieder berechnet werden.

Diese Bemerkung führt zur Darstellung einer *zweiten* Klasse zahlentheoretischer Functionen durch unendliche Reihen in folgender Weise:

Man denke sich eine Function $f(x, r)$ durch folgende Festsetzungen erklärt:

1) Wenn x weder mit einer Primzahl noch mit einer Primzahlpotenz zusammenfällt, so soll sein

$$f(x, r) = \sum_{n=1}^{[x]} \frac{L(n)}{ln} \cdot \frac{1}{n^r},$$

oder ausführlicher

$$f(x, r) = \sum_{1}^{x} \frac{1}{p^r} + \frac{1}{2} \sum_{1}^{x^{\frac{1}{2}}} \frac{1}{p^{2r}} + \frac{1}{3} \sum_{1}^{x^{\frac{1}{3}}} \frac{1}{p^{3r}} + \cdots,$$

wo p einen Summationsbuchstaben bedeutet, welcher jedesmal diejenigen Primzahlwerthe durchläuft, welche nicht ausserhalb der unter und über dem Summenzeichen angegebenen Grenzen liegen.

2) Wenn dagegen x eine Primzahl oder eine Primzahlpotenz ist, so soll

$$f(x, r) = \frac{f(x+0, r) + f(x-0, r)}{2}$$

gesetzt werden, so dass $f(x, r)$ an den Sprungstellen den Mittelwerth annimmt.

---

*) Annales scientifiques de l'école normale supérieure, 3ème Série, Tome 11, 1894, p. 75.

Dann erhält man

$$\int \Lambda(x, r)dr = -f(x, r),$$

also aus (55.), wenn man durch r_1 und r_2 zwei beliebige reelle Constanten bezeichnet,

$$(59.)\quad \begin{cases} f(x, r_1)-f(x, r_2) = \int_{r_1}^{r_2}\left\{\frac{1-x^{1-r}}{r-1}-\frac{1}{2}l\pi-\frac{1}{2}C+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r+2nx^{-r-2n}}{2n(r+2n)}\right\}dr \\ \qquad\qquad -\sum_{\nu=1}^{\infty}\int_{r_1}^{r_2} W_\nu(x, r)\,dr. \end{cases}$$

Nun ist aber infolge von (46.)

$$(60.)\quad \begin{cases} \sum_{\nu=1}^{\infty}\int_{r_1}^{r_2} W_\nu(x, r)dr = \int_{r_1}^{r_2}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{2(r-\frac{1}{2})}{(r-\frac{1}{2})^2+\alpha_\nu^2}dr \\ \qquad -2.\sum_{\nu=1}^{\infty}\cos(\alpha_\nu lx)\cdot\int_{r_1}^{r_2}\frac{(r-\frac{1}{2})x^{-r+\frac{1}{2}}}{(r-\frac{1}{2})^2+\alpha_\nu^2}dr \\ \qquad +2\sum_{\nu=1}^{\infty}\alpha_\nu\sin(\alpha_\nu lx)\cdot\int_{r_1}^{r_2}\frac{x^{-r+\frac{1}{2}}}{(r-\frac{1}{2})^2+\alpha_\nu^2}dr. \end{cases}$$

Ferner ist

$$\int_{r_1}^{r_2}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{2(r-\frac{1}{2})}{(r-\frac{1}{2})^2+\alpha_\nu^2}dr = \int_{r_1}^{r_2}\frac{dl\xi[i(\frac{1}{2}-r)]}{dr}dr$$

$$= \int_{r_1}^{r_2}\left\{\frac{1}{2}\cdot\frac{\Pi'\left(\frac{1}{2}r\right)}{\Pi\left(\frac{1}{2}r\right)}+\frac{1}{r-1}-\frac{1}{2}l\pi+\frac{\zeta'(r)}{\zeta(r)}\right\}dr$$

$$= \int_{r_1}^{r_2}\left\{-\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{2}\,l\frac{n}{n+1}+\frac{1}{r+2n}\right]+\frac{1}{r-1}-\frac{1}{2}l\pi+\frac{\zeta'(r)}{\zeta(r)}\right\}dr.$$

Setzt man diesen Werth zunächst in (60.) und sodann den für $\sum_{\nu=1}^{\infty}\int_{r_1}^{r_2} W_\nu(x, r)dr$ erhaltenen Ausdruck in (59.) ein, so erhält man:

$$f(x, r_1)-f(x, r_2) = \int_{r_1}^{r_2}\left\{\frac{x^{1-r}}{1-r}-\frac{1}{2}C+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{2}\,l\frac{n}{n+1}+\frac{1}{2n}+\frac{x^{-r-2n}}{r+2n}\right]-\frac{\zeta'(r)}{\zeta(r)}\right\}dr$$

$$+2\sum_{\nu=1}^{\infty}\cos(\alpha_\nu lx)\cdot\int_{r_1}^{r_2}\frac{(r-\frac{1}{2})x^{-r+\frac{1}{2}}}{(r-\frac{1}{2})^2+\alpha_\nu^2}dr-2\sum_{\nu=1}^{\infty}\alpha_\nu\sin(\alpha_\nu lx)\cdot\int_{r_1}^{r_2}\frac{x^{-r+\frac{1}{2}}}{(r-\frac{1}{2})^2+\alpha_\nu^2}dr$$

$$= \int_{r_1}^{r_2}\left\{\frac{x^{1-r}}{1-r}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{-r-2n}}{r+2n}-\frac{\zeta'(r)}{\zeta(r)}\right\}dr+2\sum_{\nu=1}^{\infty}\cos(\alpha_\nu lx)\cdot\int_{r_1}^{r_2}\frac{(r-\frac{1}{2})x^{-r+\frac{1}{2}}}{(r-\frac{1}{2})^2+\alpha_\nu^2}dr$$

$$-2.\sum_{\nu=1}^{\infty}\alpha_\nu\sin(\alpha_\nu lx)\cdot\int_{r_1}^{r_2}\frac{x^{-r+\frac{1}{2}}}{(r-\frac{1}{2})^2+\alpha_\nu^2}dr.$$

Nunmehr lasse man die obere Integrationsgrenze r_2 über alle Grenzen hinaus wachsen, was zulässig ist, da die bisher vorgenommenen Umkehrungen der Reihenfolge von Integration und Summation auch für $r_2 = \infty$ durch Anwendung der Formel

$$\begin{aligned}
&\int_{r_1}^{\infty} \sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu \sin(\alpha_\nu lx) \cdot \frac{x^{-r+\frac{1}{2}}}{(r-\frac{1}{2})^2+\alpha_\nu^2}\, dr \\
&\quad = \int_{r_1}^{\infty} \left\{ \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\sin(\alpha_\nu lx)}{\alpha_\nu} \cdot x^{-r+\frac{1}{2}} - \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\sin(\alpha_\nu lx)(r-\frac{1}{2})^2 x^{-r+\frac{1}{2}}}{\alpha_\nu[(r-\frac{1}{2})^2+\alpha_\nu^2]} \right\} dr \\
&\quad = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\sin(\alpha_\nu lx)}{\alpha_\nu} \cdot \int_{r_1}^{\infty} x^{-r+\frac{1}{2}} dr - \int_{r_1}^{\infty} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\sin(\alpha_\nu lx)(r-\frac{1}{2})^2 x^{-r+\frac{1}{2}}}{\alpha_\nu[(r-\frac{1}{2})^2+\alpha_\nu^2]}
\end{aligned}$$

leicht gerechtfertigt werden können. Dann erhält man, wenn man statt r_1 wieder r schreibt, und die vorkommenden Integrationsveränderlichen gleichmässig durch ϱ bezeichnet, die Gleichung

$$(61.)\quad \left\{ \begin{aligned}
f(x, r) &= \int_{r}^{\infty} \left\{ \frac{x^{1-\varrho}}{1-\varrho} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{-\varrho-2n}}{\varrho+2n} - \frac{\zeta'(\varrho)}{\zeta(\varrho)} \right\} d\varrho \\
&+ 2\sum_{\nu=1}^{\infty} \cos(\alpha_\nu lx) \cdot \int_{r-\frac{1}{2}}^{\infty} \frac{\varrho x^{-\varrho}}{\varrho^2+\alpha_\nu^2}\, d\varrho - 2\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu \sin(\alpha_\nu lx) \cdot \int_{r-\frac{1}{2}}^{\infty} \frac{x^{-\varrho}}{\varrho^2+\alpha_\nu^2}\, d\varrho.
\end{aligned} \right.$$

Bei der weiteren Umformung dieser Gleichung sind drei verschiedene Fälle zu unterscheiden.

Erster Fall: Es sei

$$r > 1.$$

Dann ist

$$\frac{x^{1-\varrho}}{1-\varrho} = -\int_{x}^{\infty} y^{-\varrho} dy$$

und

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{-\varrho-2n}}{\varrho+2n} = \int_{x}^{\infty} \frac{1}{y^2-1} \cdot \frac{dy}{y^{\varrho+1}},$$

also

$$\begin{aligned}
\int_{r}^{\infty} \left\{ \frac{x^{1-\varrho}}{1-\varrho} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{-\varrho-2n}}{\varrho+2n} \right\} d\varrho &= \int_{r}^{\infty} \int_{x}^{\infty} \left\{ \frac{1}{y^2-1} \cdot \frac{1}{y^{\varrho+1}} - \frac{1}{y^\varrho} \right\} dy\, d\varrho \\
&= \int_{x}^{\infty} \int_{r}^{\infty} \left\{ \frac{1}{y^2-1} \cdot \frac{1}{y^{\varrho+1}} - \frac{1}{y^\varrho} \right\} d\varrho\, dy \\
&= \int_{x}^{\infty} \frac{1}{ly} \cdot \frac{1}{y^r} \cdot \left(\frac{1}{y^2-1} \cdot \frac{1}{y} - 1 \right) dy.
\end{aligned}$$

Ferner ist

$$-\int_r^\infty \frac{\zeta'(\varrho)}{\zeta(\varrho)}\,d\varrho = l\zeta(r).$$

Setzt man diese Werthe in Gleichung (61.) ein, so erhält man für

$$r > 1$$

die Gleichung

$$(62.)\quad \begin{cases} f(x,\,r) = l\zeta(r)-\int_x^\infty \frac{1}{ly}\cdot\frac{1}{y^r}\cdot\left(1-\frac{1}{y^2-1}\cdot\frac{1}{y}\right)dy \\ \quad +2\sum_{\nu=1}^{\infty}\cos(\alpha_\nu lx)\cdot\int_{r-\frac{1}{2}}^\infty \frac{\varrho x^{-\varrho}}{\varrho^2+\alpha_\nu^2}\,d\varrho-2\sum_{\nu=1}^{\infty}\alpha_\nu\sin(\alpha_\nu lx)\cdot\int_{r-\frac{1}{2}}^\infty \frac{x^{-\varrho}}{\varrho^2+\alpha_\nu^2}\,d\varrho. \end{cases}$$

Zweiter Fall: Es sei

$$-2 < r \leqq 1.$$

Dann hat man nach willkürlicher Annahme einer oberhalb 1 liegenden reellen Zahl a

$$\int_r^\infty \left\{\frac{x^{1-\varrho}}{1-\varrho}-\frac{\zeta'(\varrho)}{\zeta(\varrho)}\right\}d\varrho = \int_r^a \left\{\frac{x^{1-\varrho}}{1-\varrho}-\frac{\zeta'(\varrho)}{\zeta(\varrho)}\right\}d\varrho+l\zeta(a)-\int_x^\infty \frac{1}{ly}\cdot\frac{1}{y^a}\,dy$$

$$= \int_r^a \left\{\frac{x^{1-\varrho}-1}{1-\varrho}-\left[\frac{1}{\varrho-1}+\frac{\zeta'(\varrho)}{\zeta(\varrho)}\right]\right\}d\varrho+l\zeta(a)-\int_x^\infty \frac{1}{ly}\cdot\frac{1}{y^a}\,dy$$

$$= \int_r^a\int_1^x y^{-\varrho}\,dy\,d\varrho-l[(a-1).\zeta(a)]+l[(r-1)\zeta(r)]+l\zeta(a)$$

$$-\int_x^\infty \frac{y^{-a}}{ly}\,dy$$

$$= \int_1^x \frac{y^{-r}-y^{-a}}{ly}\,dy-l(a-1)+l[(r-1)\zeta(r)]-\int_x^\infty \frac{y^{-a}}{ly}\,dy$$

$$= \int_0^{lx} \frac{e^{(1-r)u}-e^{(1-a)u}}{u}\,du-\int_{lx}^\infty \frac{e^{(1-a)u}}{u}\,du$$

$$-l(a-1)+l[(r-1)\zeta(r)].$$

Nun ist aber

$$l(a-1) = \int_2^a \frac{dv}{v-1} = \int_2^a\int_0^\infty e^{-u(v-1)}\,du\,dv$$

$$= \int_0^\infty\int_2^a e^{-u(v-1)}\,dv\,du = \int_0^\infty \frac{e^{-u}-e^{-(a-1)u}}{u}\,du.$$

Setzt man dies ein, so erhält man

$$\int_r^\infty \left\{\frac{x^{1-\varrho}}{1-\varrho} - \frac{\zeta'(\varrho)}{\zeta(\varrho)}\right\} d\varrho = \int_0^{lx} \frac{e^{(1-r)u}-e^{-u}}{u}\,du - \int_{lx}^\infty \frac{e^{-u}}{u}\,du + l[(r-1)\zeta(r)].$$

Ferner ist ähnlich wie im ersten Falle

$$\int_r^\infty \sum_{n=1}^\infty \frac{x^{-\varrho-2n}}{\varrho+2n}\,d\varrho = \int_x^\infty \frac{1}{ly}\cdot\frac{1}{y^2-1}\cdot\frac{dy}{y^{r+1}}.$$

Daher erhält man jetzt aus (61.) die Gleichung

$$(63.)\quad \begin{cases} f(x,r) = \int_0^{lx} \frac{e^{(1-r)u}-e^{-u}}{u}\,du - \int_{lx}^\infty \frac{e^{-u}}{u}\,du + \int_x^\infty \frac{1}{y^2-1}\cdot\frac{dy}{y^{r+1}ly} + l[(r-1)\zeta(r)] \\ +2\sum_{\nu=1}^\infty \cos(\alpha_\nu lx)\cdot\int_{r-\frac{1}{2}}^\infty \frac{\varrho x^{-\varrho}}{\varrho^2+\alpha_\nu^2}\,d\varrho - 2\sum_{\nu=1}^\infty \alpha_\nu \sin(\alpha_\nu lx)\cdot\int_{r-\frac{1}{2}}^\infty \frac{x^{-\varrho}}{\varrho^2+\alpha_\nu^2}\,d\varrho, \end{cases}$$

welche für

$$-2 < r \leqq 1$$

gültig ist.

In dieser Formel ist die Gleichung

$$f(x) = Li(x) - \Sigma^\alpha\left(Li(x^{\frac{1}{2}+\alpha i}) + Li(x^{\frac{1}{2}-\alpha i})\right) + \int_x^\infty \frac{1}{x^2-1}\cdot\frac{dx}{x\log x} - l2\,^{*}),$$

welche Riemann für die von ihm durch $f(x)$ bezeichnete zahlentheoretische Function aufstellt, als ein specieller Fall enthalten.

Setzt man nämlich in Gleichung (63.) $r=0$, so erhält man, da

$$\zeta(0) = -\tfrac{1}{2}$$

ist,

$$(64.)\quad \begin{cases} f(x,0) = \int_0^{lx} \frac{e^{u}-e^{-u}}{u}\,du - \int_{lx}^\infty \frac{e^{-u}}{u}\,du + \int_x^\infty \frac{1}{y^2-1}\cdot\frac{dy}{y\,ly} - l2 \\ +2\sum_{\nu=1}^\infty \cos(\alpha_\nu lx)\cdot\int_{-\frac{1}{2}}^\infty \frac{\varrho x^{-\varrho}}{\varrho^2+\alpha_\nu^2}\,d\varrho - 2\sum_{\nu=1}^\infty \alpha_\nu \sin(\alpha_\nu lx)\cdot\int_{-\frac{1}{2}}^\infty \frac{x^{-\varrho}}{\varrho^2+\alpha_\nu^2}\,d\varrho. \end{cases}$$

Diese Gleichung stimmt aber mit der eben erwähnten Riemannschen Formel vollständig überein, so dass mit ihrer Aufstellung das Endergebniss der Riemannschen Untersuchung auf etwas anderem Wege wieder erreicht wird.

---

*) Das schon längst als irrthümlich erkannte Glied $\log\xi(0)$, welches in den in den Monatsberichten und in beiden Auflagen der gesammelten mathematischen Werke enthaltenen Abdrucken der *Riemann*schen Abhandlung die rechte Seite dieser Gleichung abschliesst, ist hier durch den richtigen Werth $-l2$ ersetzt.

Denn *erstens* ist die Function $f(x, 0)$ identisch mit der Function, welche *Riemann* durch $f(x)$ bezeichnet und zur Darstellung der Anzahl aller zwischen 1 und x enthaltenen Primzahlen benutzt.

Zweitens ist, wenn h wie bisher eine reelle positive Veränderliche bedeutet,

$$\int_0^{lx} \frac{e^u - e^{-u}}{u} du - \int_{lx}^{\infty} \frac{e^{-u}}{u} du = \lim_{h=0} \left\{ \int_h^{lx} \frac{e^u}{u} du + \int_{-lx}^{-h} \frac{e^u}{u} du \right\} + \int_{-\infty}^{-lx} \frac{e^u}{u} du$$

$$= \lim_{h=0} \left\{ \int_{-\infty}^{-h} \frac{e^u}{u} du + \int_h^{lx} \frac{e^u}{u} du \right\},$$

das heisst der Ausdruck

$$\int_0^{lx} \frac{e^u - e^{-u}}{u} du - \int_{lx}^{\infty} \frac{e^{-u}}{u} du$$

stimmt überein mit dem sogenannten *Cauchy*schen *Hauptwerth* des Integrals $\int_{-\infty}^{lx} \frac{e^u}{u} du$, oder auch $\int_0^x \frac{dy}{ly}$, welchen man als den *Integrallogarithmus* von x zu bezeichnen und durch das Zeichen $Li(x)$ darzustellen pflegt.

Drittens endlich ist die Differenz

$$2 \sum_{\nu=1}^{\infty} \cos(\alpha_\nu lx) \cdot \int_{-\frac{1}{2}}^{\infty} \frac{\varrho x^{-\varrho}}{\varrho^2 + \alpha_\nu^2} d\varrho - 2 \sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu \sin(\alpha_\nu lx) \cdot \int_{-\frac{1}{2}}^{\infty} \frac{x^{-\varrho}}{\varrho^2 + \alpha_\nu^2} d\varrho$$

gleichbedeutend mit der Summe

$$-\sum_{\nu=1}^{\infty} \{Li(x^{\frac{1}{2}+i\alpha_\nu}) + Li(x^{\frac{1}{2}-i\alpha_\nu})\},$$

sobald nur die Bedeutung des Zeichens $Li(e^w)$ für imaginäre Werthe der Veränderlichen w in geeigneter Weise festgestellt und ausserdem bestimmt wird, dass auch in dieser letzteren Summe die Glieder so geordnet werden sollen, wie sie bei wachsenden Werthen des Index ν auf einander folgen. Um dies einzusehen, denke man sich die Ebene der complexen Veränderlichen w längs der Axe des Reellen von $-\infty$ bis 0 zerschnitten und fasse dasjenige die Ebene einfach überdeckende Gebiet T ins Auge, welches von den beiden Rändern dieses Schnittes begrenzt wird. Beschränkt man die Veränderliche w auf das Innere dieses Gebietes, so erweist es sich als möglich, für alle Werthe von w eine Function $Li(e^w)$ in *eindeutiger* Weise so zu erklären, dass sie für alle reellen positiven Werthe von w mit der im Vorangehenden bereits erklärten Function $Li(e^w)$ übereinstimmt und ausserdem im Innern des Gebietes T überall den Charakter einer ganzen Function besitzt.

Setzt man nämlich

$$w = u+iv,$$

wo u und v reelle Zahlen bedeuten, und versteht man unter h wieder eine reelle positive Veränderliche, so braucht man nur folgende Festsetzungen zu treffen:

1) Wenn $v > 0$ ist, so soll sein

$$Li(e^w) = \lim_{h=\infty} \int_{-h+w}^{w} \frac{e^z}{z}\,dz + i\pi;$$

2) wenn $v = 0$ ist, so soll sein

$$Li(e^w) = \lim_{h=0} \left\{ \int_{-\infty}^{-h} \frac{e^z}{z}\,dz + \int_{h}^{w} \frac{e^z}{z}\,dz \right\};$$

3) wenn $v < 0$ ist, so soll sein

$$Li(e^w) = \lim_{h=\infty} \int_{-h+w}^{w} \frac{e^z}{z}\,dz - i\pi.$$

Man überzeugt sich leicht, dass die so erklärte Function $Li(e^w)$ in der That die verlangten Eigenschaften besitzt.

Bei Zugrundelegung dieser Erklärung ist nun

$$Li(x^{\frac{1}{2}+i\alpha_\nu}) = \lim_{h=\infty} \int_{-h+\frac{1}{2}lx+i\alpha_\nu lx}^{\frac{1}{2}lx+i\alpha_\nu lx} \frac{e^z}{z}\,dz + i\pi = \int_{-\infty}^{\frac{1}{2}lx} \frac{e^{u+i\alpha_\nu lx}}{u+i\alpha_\nu lx}\,du + i\pi$$

und

$$Li(x^{\frac{1}{2}-i\alpha_\nu}) = \lim_{h=\infty} \int_{-h+\frac{1}{2}lx-i\alpha_\nu lx}^{\frac{1}{2}lx-i\alpha_\nu lx} \frac{e^z}{z}\,dz - i\pi = \int_{-\infty}^{\frac{1}{2}lx} \frac{e^{u-i\alpha_\nu lx}}{u-i\alpha_\nu lx}\,du - i\pi.$$

Also ist

$$Li(x^{\frac{1}{2}+i\alpha_\nu}) + Li(x^{\frac{1}{2}-i\alpha_\nu}) = \int_{-\infty}^{\frac{1}{2}lx} e^u \left\{ \frac{\cos(\alpha_\nu lx)+i\sin(\alpha_\nu lx)}{u+i\alpha_\nu lx} + \frac{\cos(\alpha_\nu lx)-i\sin(\alpha_\nu lx)}{u-i\alpha_\nu lx} \right\} du$$

$$= 2\cos(\alpha_\nu lx) \int_{-\infty}^{\frac{1}{2}lx} \frac{u e^u}{u^2+(\alpha_\nu lx)^2}\,du + 2\alpha_\nu lx \sin(\alpha_\nu lx) \int_{-\infty}^{\frac{1}{2}lx} \frac{e^u}{u^2+(\alpha_\nu lx)^2}\,du.$$

Führt man hier durch die Substitution

$$u = -\varrho\, lx$$

eine neue Integrationsveränderliche ϱ ein, so erhält man

$$Li(x^{\frac{1}{2}+i\alpha_\nu}) + Li(x^{\frac{1}{2}-i\alpha_\nu}) = -2\cos(\alpha_\nu lx) \int_{-\frac{1}{2}}^{\infty} \frac{\varrho x^{-\varrho}}{\varrho^2+\alpha_\nu^2}\,d\varrho + 2\alpha_\nu \sin(\alpha_\nu lx) \int_{-\frac{1}{2}}^{\infty} \frac{x^{-\varrho}}{\varrho^2+\alpha_\nu^2}\,d\varrho,$$

was zu beweisen war.

Hiermit ist die vollständige Uebereinstimmung der Gleichung (64.) mit der von *Riemann* angegebenen Formel dargethan und zugleich für die in der Einleitung hinsichtlich der unendlichen Reihe

$$\Sigma^{\alpha}\{Li(x^{\frac{1}{2}+\alpha i})+Li(x^{\frac{1}{2}-\alpha i})\}$$

ausgesprochene Behauptung der Beweis erbracht.

In der *zweiten* Auflage von *Riemanns* gesammelten mathematischen Werken wird in den Anmerkungen auf Seite 154 eine Stelle aus einem Briefe, dessen Entwurf in *Riemanns* Nachlass vorliegt, mitgetheilt. Gerade diejenigen beiden Behauptungen, welche dort von *Riemann* selbst als einer genaueren Begründung bedürftig hingestellt werden, haben durch die vorangehenden Entwickelungen — abgesehen davon, dass es unentschieden bleibt, ob die Wurzeln der Gleichung $\xi(t) = 0$ wirklich alle reell sind — Bestätigung gefunden.

Dritter Fall: Es sei

$$r \leqq -2.$$

In diesem Falle seien -2λ und $-2(\lambda+1)$ diejenigen beiden negativen geraden ganzen Zahlen, welche den Werth r zwischen sich enthalten, in der Weise, dass

$$-2(\lambda+1) < r \leqq -2\lambda$$

ist. Ferner werde zur Abkürzung

$$\frac{(\varrho-1)\zeta(\varrho)}{(\varrho+2)(\varrho+4)\dots(\varrho+2\lambda)} = Z(\varrho)$$

gesetzt. Dann ist die Function $Z(\varrho)$, wie man leicht zeigen kann, in dem Intervall $r\dots\infty$ überall reell und *positiv*. Nimmt man nun wieder eine reelle oberhalb 1 liegende Zahl a nach Belieben an, so kann man dem ersten Gliede der rechten Seite von Gleichung (61.) die Form geben

$$(65.)\quad \begin{cases} \int_r^\infty \left\{\frac{x^{1-\varrho}}{1-\varrho}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{-\varrho-2n}}{\varrho+2n}-\frac{\zeta'(\varrho)}{\zeta(\varrho)}\right\}d\varrho \\ \quad = \int_r^a \left\{\frac{x^{1-\varrho}-1}{1-\varrho}+\sum_{n=1}^{\lambda}\frac{x^{-\varrho-2n}-1}{\varrho+2n}+\sum_{n=\lambda+1}^{\infty}\frac{x^{-\varrho-2n}}{\varrho+2n}-\frac{Z'(\varrho)}{Z(\varrho)}\right\}d\varrho \\ \qquad + \int_a^\infty \left\{\frac{x^{1-\varrho}}{1-\varrho}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{-\varrho-2n}}{\varrho+2n}-\frac{\zeta'(\varrho)}{\zeta(\varrho)}\right\}d\varrho. \end{cases}$$

Nun ist aber

$$\int_r^a \frac{x^{1-\varrho}-1}{1-\varrho}\,d\varrho = \int_r^a \int_1^x y^{-\varrho}dy\,dx = \int_1^x \frac{y^{-r}-y^{-a}}{ly}\,dy = \int_0^{lx} \frac{e^{(1-r)u}-e^{(1-a)u}}{u}\,du,$$

$$\int_r^a \sum_{n=1}^{\lambda} \frac{x^{-\varrho-2n}-1}{\varrho+2n}\,d\varrho = -\sum_{n=1}^{\lambda}\int_r^a \int_1^x y^{-\varrho-2n-1}dy\,d\varrho = -\sum_{n=1}^{\lambda}\int_1^x \frac{y^{-r-2n-1}-y^{-a-2n-1}}{ly}\,dy$$

$$= -\sum_{n=1}^{\lambda}\int_0^{lx} \frac{e^{-(r+2n)u}-e^{-(a+2n)u}}{u}\,du,$$

$$\int_r^a \sum_{n=\lambda+1}^{\infty} \frac{x^{-\varrho-2n}}{\varrho+2n}\,d\varrho = \sum_{n=\lambda+1}^{\infty}\int_r^a \int_x^{\infty} y^{-\varrho-2n-1}dy\,d\varrho = \int_x^{\infty} \sum_{n=\lambda+1}^{\infty} \frac{y^{-r}-y^{-a}}{ly}\cdot y^{-2n-1}dy$$

$$= \int_x^{\infty} \frac{1}{ly}\cdot\frac{1}{y^2-1}\cdot\frac{dy}{y^{r+2\lambda+1}} - \int_x^{\infty} \frac{1}{ly}\cdot\frac{1}{y^2-1}\cdot\frac{dy}{y^{a+2\lambda+1}},$$

$$-\int_r^a \frac{Z'(\varrho)}{Z(\varrho)}\,d\varrho = l\,\frac{(r-1)\zeta(r)}{(r+2)(r+4)\ldots(r+2\lambda)} - l[(a-1)\zeta(a)] + \sum_{n=1}^{\lambda} l(a+2n).$$

Ferner ist nach den Ergebnissen des ersten Falles

$$\int_a^{\infty}\left\{\frac{x^{1-\varrho}}{1-\varrho} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{-\varrho-2n}}{\varrho+2n} - \frac{\zeta'(\varrho)}{\zeta(\varrho)}\right\}d\varrho = l\zeta(a) - \int_x^{\infty}\frac{1}{ly}\cdot\frac{1}{y^a}\cdot\left(1-\frac{1}{y^2-1}\cdot\frac{1}{y}\right)dy$$

$$= l\zeta(a) - \int_{lx}^{\infty}\frac{e^{(1-a)u}}{u}\,du + \int_x^{\infty}\frac{1}{ly}\cdot\frac{1}{y^2-1}\cdot\frac{dy}{y^{a+1}}.$$

Setzt man diese Werthe in Gleichung (65.) ein, so erhält man nach einfachen Zusammenziehungen

$$(66.)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_r^{\infty}\left\{\frac{x^{1-\varrho}}{1-\varrho} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{-\varrho-2n}}{\varrho+2n} - \frac{\zeta'(\varrho)}{\zeta(\varrho)}\right\}d\varrho \\ \displaystyle = \int_0^{lx}\frac{e^{(1-r)u}-e^{(1-a)u}}{u}\,du - \sum_{n=1}^{\lambda}\int_0^{lx}\frac{e^{-(r+2n)u}-e^{-(a+2n)u}}{u}\,du \\ \displaystyle + \int_x^{\infty}\frac{1}{ly}\cdot\frac{1}{y^2-1}\cdot\frac{dy}{y^{r+2\lambda+1}} + \int_x^{\infty}\frac{1}{ly}\cdot\frac{1}{y^{a+2\lambda+1}}\cdot\frac{y^{2\lambda}-1}{y^2-1}\,dy \\ \displaystyle + l\,\frac{(r-1)\zeta(r)}{(r+2)(r+4)\ldots(r+2\lambda)} - l(a-1) + \sum_{n=1}^{\lambda} l(a+2n) - \int_{lx}^{\infty}\frac{e^{(1-a)u}}{u}\,du. \end{cases}$$

Nun ist aber, wie schon oben gezeigt wurde,

$$-l(a-1) = \int_0^{\infty}\frac{e^{(1-a)u}-e^{-u}}{u}\,du = \int_0^{lx}\frac{e^{(1-a)u}-e^{-u}}{u}\,du + \int_{lx}^{\infty}\frac{e^{(1-a)u}-e^{-u}}{u}\,du$$

und ähnlich

$$\sum_{n=1}^{\lambda} l(a+2n) = \sum_{n=1}^{\lambda} \int_0^{\infty} \frac{e^{-u}-e^{-(a+2n)u}}{u}\, du$$

$$= \sum_{n=1}^{\lambda} \int_0^{lx} \frac{e^{-u}-e^{-(a+2n)u}}{u}\, du + \lambda \int_{lx}^{\infty} \frac{e^{-u}}{u}\, du - \int_x^{\infty} \frac{1}{ly}\cdot\frac{1}{y^{a+2\lambda+1}}\cdot\frac{y^{2\lambda}-1}{y^2-1}\, dy.$$

Setzt man diese Werthe in (66.) und sodann den für die linke Seite dieser Gleichung erhaltenen Ausdruck in Gleichung (61.) ein, so gelangt man zu der für

$$-2(\lambda+1) < r \leqq -2\lambda$$

geltenden Gleichung

$$(67.)\quad \begin{cases} f(x, r) = \displaystyle\int_0^{lx} \frac{e^{(1-r)u}-e^{-u}}{u}\, du - \sum_{n=1}^{\lambda} \int_0^{lx} \frac{e^{-(r+2n)u}-e^{-u}}{u}\, du \\ \quad + \displaystyle\int_x^{\infty} \frac{1}{ly}\cdot\frac{1}{y^2-1}\cdot\frac{dy}{y^{r+2\lambda+1}} + l\frac{(r-1)\zeta(r)}{(r+2)(r+4)\dots(r+2\lambda)} + (\lambda-1)\int_{lx}^{\infty} \frac{e^{-u}}{u}\, du \\ \quad\quad + 2\displaystyle\sum_{\nu=1}^{\infty} \cos(\alpha_\nu lx) \int_{r-\frac{1}{2}}^{\infty} \frac{\varrho x^{-\varrho}}{\varrho^2+\alpha_\nu^2}\, d\varrho - 2\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu \sin(\alpha_\nu lx) \int_{r-\frac{1}{2}}^{\infty} \frac{x^{-\varrho}}{\varrho^2+\alpha_\nu^2}\, d\varrho. \end{cases}$$

Hiermit sind für alle reellen Werthe von r analytische Ausdrücke für die aus den Potenzen der Primzahlen zusammengesetzte zahlentheoretische Function $f(x, r)$ gewonnen.

Wenn es gelingen sollte, nachzuweisen, dass die Wurzeln α_ν der Gleichung $\xi(t) = 0$ sämmtlich reell sind, oder auch nur die imaginären Theile dieser Wurzeln zwischen engere Grenzen als $-\frac{i}{2}$ und $+\frac{i}{2}$ einzuschliessen, so würden sich aus den vorangehenden Entwickelungen eine Reihe von asymptotischen Gesetzen der Zahlentheorie ergeben. So würde z. B. aus Gleichung (58.) folgen, dass

$$\lim_{x=\infty} \frac{\Delta(x, 0)}{x} = 1$$

ist, und hieraus, dass die Summe der Logarithmen aller Primzahlen von 1 bis x für grosse Werthe von x bis auf Grössen niedrigerer Ordnung mit x selbst übereinstimmt.

Aber einstweilen scheinen alle derartigen Folgerungen verfrüht zu sein. Auch derjenige Beweis des eben erwähnten speciellen Satzes, welchen Herr *E. Cahen* in seiner Note „Sur la somme des logarithmes des nombres

premiers qui ne dépassent pas x"*) angegeben und in No. 32 seiner oben angeführten Abhandlung im Wesentlichen unverändert wiederholt hat, ist nicht als befriedigend anzuerkennen. Denn es ist zweifelhaft, ob es überhaupt ein Rechteck giebt, welches alle diejenigen Eigenschaften vereinigt, die Herr *Cahen* von dem von ihm als Integrationsweg benutzten Rechteck voraussetzt. Die Schlüsse des Herrn *Cahen* würden sofort hinfällig werden, wenn die durch den Punkt 1 gehende Parallele zur Axe des Imaginären eine Nullstelle der Function $\zeta(s)$ enthielte, oder wenn auch nur in jeder Nähe dieser Geraden Nullstellen der Function $\zeta(s)$ liegen sollten.

Da es Herrn *Cahen* nicht gelungen ist, diese Möglichkeiten auszuschliessen, so fehlt seinem Beweise die zwingende Kraft.

Aachen, den 2. Juni 1894.

---

*) Comptes Rendus, Tome 116, 1893. I, p. 85—88.

Sur les invariants des équations différentielles linéaires.

(Extrait d'une lettre de M. *Mittag-Leffler* au rédacteur.)

Mon élève et répétiteur à l'université de Stockholm M. ***Gustav Cassel*** vient de fixer mon attention sur un point dans le mémoire de ***P. Günther****): „Ueber die Bestimmung der Fundamentalgleichungen in der Theorie der linearen Differentialgleichungen" (voir p. 314) qui donne une idée inexacte des recherches que j'avais publiées dans mon mémoire**): „Sur la représentation analytique des intégrales et des invariants d'une équation différentielle linéaire et homogène". Vu l'intérêt de la question et parce qu'une mort prématurée a enlevé ***Günther*** à la science je me permettrai de rectifier moi-même par quelques mots l'erreur commise.

Soit donnée l'équation linéaire

$$\frac{d^2y}{dx^2} = p(x)y, \quad p(x) = \frac{\sum_{h=0}^{r} B_h x_h}{\Pi_i (x-a_i)^{l_i}}. \tag{1.}$$

M. ***Poincaré******) avait démontré que les invariants de cette équation peuvent être exprimés par des séries toujours convergentes procédant selon les puissances entières et positives des coefficients B_h. ***Günther*** fait l'observation†) que les coefficients de ces séries sont des sommes infinies de fonctions rationnelles des a_i. Or M. ***Vogt*** en calculant certains de ces coefficients avait trouvé qu'ils dépendent de logarithmes. ***Günther*** a donc parfaitement raison de dire que les coefficients en question ne peuvent pas, en général, se réduire à des fonctions rationnelles des a_i. Mais il a tort quand il pense que cette circonstance est en contradiction avec un théorème qui se trouve dans mon mémoire cité††).

*) Dieses Journal. Bd. 107.

**) Acta mathematica. Tome XV.

***) „Sur les groupes des équations linéaires. § 3." Acta Math. 4.

†) pag. 313.

††) pag. 22.

Voici, en effet, ce que j'ai démontré et qui est exprimé en termes précis dans mon théorème:

Soit C un anneau circulaire dont les cercles limites ont l'origine pour centre et dans l'intérieur duquel ne se trouve aucun point singulier de l'équation différentielle (1.). Soient de plus x_1 et x_2 deux points sur une même droite par l'origine, appartenant tous les deux à C.

Mettons

$$u = \tfrac{1}{2}\log\frac{x_2}{x_1},$$

$$t_0 = \frac{e^{-\frac{\pi^2}{h}}-1}{e^{-\frac{\pi^2}{h}}+1}.$$

J'ai dit, dans mon théorème, que les invariants sont des séries procédant suivant les puissances entières et positives des coefficients B_h et de t_0 et que les coefficients de ces séries sont des fonctions rationnelles de $a_1, \ldots, a_i, \ldots$ et des fonctions entières rationnelles de $\frac{h}{\pi i}$.

Les invariants sont donc des séries procédant suivant les puissances entières et positives des B_h dont les coefficients sont des séries ***infinies*** procédant suivant les puissances entières et positives de t_0 avec des coefficients qui sont rationnelles en $a_1, \ldots, a_i, \ldots$ et entières et rationnelles en $\frac{h}{\pi i}$.

Je ne vois pas bien comment *Günther* a pu me prêter une erreur aussi grossière que d'avoir affirmé que les coefficients des puissances des B_h fussent des fonctions rationnelles des $a_1, \ldots, a_i, \ldots$.

L'expression que j'ai donnée aux invariants dans ce théorème est différente dans un point essentiel de celle qu'avait donnée antérieurement mon ami *Poincaré**). Il entre en effet dans son expression une quantité arbitraire x_0 qui est un point à l'intérieur de C.

On pourrait penser qu'il serait possible d'éliminer la quantité arbitraire h en suivant la même voie que j'ai employée pour éloigner x_0. Mais il n'en est rien. En effet, M. *Cassel* a publié une démonstration de ce fait que les séries en question ne sont pas uniformément convergentes pour toutes les valeurs de h qui ont la même valeur absolue, à moins que cette

*) mémoire cité, page 211.

valeur absolue ne vérifie la relation

$$|h| > 2\pi^{*}).$$

Mais on retombe alors sur le cas déjà traité par M. *Hamburger***). *Günther* ne sort pas non plus de ce cas parce que, en réalité, il suppose toujours que

$$|h| > 2\pi.$$

Ainsi la quantité h joue un rôle essentiel dans cette expression des invariants. Il y a donc lieu de considérer s'il n'existe pas des expressions des invariants d'une autre nature qui sont affranchies de tout paramètre arbitraire. J'ai donné de telles expressions***) dans lesquelles il entre pourtant un élément arbitraire l qui est un nombre entier qui peut être quelconque, sauf qu'il doit être en chaque cas plus grand qu'un nombre donné.

Les conditions du problème étant telles que ce nombre minimum soit *un*, on retombe sur l'expression de M. *Hamburger*.

Il paraît que M. *v. Koch*†) a tort quand il regarde le nombre l comme un paramètre. Le cas est plutôt qu'il y a une infinité d'expressions pour les invariants, correspondant aux différents valeurs de l. Mais comme il est toujours possible de varier les conditions du problème de telle manière que le minimum de l soit aussi grand qu'on le veut, il serait très désirable de trouver l'expression limite dans laquelle mon expression se transforme quand on y fait $l = \infty$. On aurait de la sorte, quelles que fussent les données du problème, une seule et même expression pour les invariants, exempte de tout élément arbitraire.

---

*) Voir la thèse de doctorat de M. *Cassel: Kritiska studier öfver teorin för de automorfa funktionerna och deras användning för integration af linjära differential-ekvationer*. Upsala 1894. Un extrait de ce travail paraîtra bientôt dans les Acta mathematica.

**) Ueber ein Princip zur Darstellung etc. Dieses Journal Bd. 83.

***) l. c. § 3.

†) *v. Koch* Sur les déterminants infinis et les équations différentielles linéaires. Acta Math. T. 16. pag. 291.

Bemerkung zu der Note auf S. 159—169 dieses Bandes.

(Auszug aus einem Briefe an Herrn *L. Heffter* in Giessen.)

(Von Herrn *Ludwig Schlesinger.*)

...Das Verfahren, welches Sie in Ihrer Arbeit*) für die Entscheidung der Frage angegeben haben, ob sich aus dem Gleichungssysteme

$$\sum_{k=0}^{s_0} a_{ik} g_k = 0, \qquad (i=1,2,\dots,s_0)$$

wo

$$a_{ik} = 0, \quad \text{für} \quad k > i$$

und

$$a_{s_0,s_0} = 0, \quad a_{s_1,s_1} = 0, \quad \dots, \quad a_{s_{k-1},s_{k-1}} = 0,$$
$$s_0 > s_1 > \dots > s_{k-1} \geqq 1,$$

für die Unbekannte g_0 ein von Null verschiedener Werth ergiebt, muss, zufolge des Satzes, den ich in der Nr. I meiner Note**) bewiesen habe, zugleich eine Methode liefern, um zu entscheiden, ob das gegebene System

$$\text{(I.)} \qquad (a_{ik}) \qquad \begin{pmatrix} i = 1, 2, \dots, s_0 \\ k = 0, 1, 2, \dots, s_0 \end{pmatrix}$$

vom selben Range ist, wie das System

$$(0) = (a_{ik}). \qquad (i, k = 1, 2, \dots, s_0)$$

Dies lässt sich auf folgende Weise unmittelbar in Evidenz setzen. Multiplicirt man die Elemente der nicht verschwindende Diagonalglieder enthaltenden (Vertical-) Reihen des Systems (I.) mit geeigneten Constanten und addirt dieselben zu den Elementen der vorhergehenden Reihen hinzu, so kann man das System (I.) in ein anderes umformen, in welchem alle Elemente, die nicht in der Diagonale von (0) oder in einer der Zeilen $s_{k-1}, s_{k-2}, \dots, s_0$ stehen, verschwinden. Multiplicirt man dann ebenso die

*) Dieses Journal Bd. 111, S. 59 ff.; vgl. *Heffter*, Einleitung in die Theorie der linearen Differentialgleichungen (1894) S. 21 ff.

**) S. 159 ff. dieses Bandes.

Elemente der nicht verschwindende Diagonalglieder enthaltenden Zeilen mit geeigneten Constanten und addirt sie zu den Elementen der folgenden Zeilen hinzu, so kann man zu einem Systeme

$$\text{(I}'.) \qquad (\bar{a}_{ik}) \qquad \begin{pmatrix} i = 1, 2, \ldots, s_0 \\ k = 0, 1, 2, \ldots, s_0 \end{pmatrix}$$

gelangen, in welchem auch noch diejenigen Elemente der Zeilen $s_{k-1}, s_{k-2}, \ldots, s_0$ verschwinden, die nicht in einer der Reihen

$$s_k = 0, \quad s_{k-1}, \quad s_{k-2}, \quad \ldots, \quad s_1$$

stehen. Von dem so erhaltenen Systeme (I'.) ist zunächst evident, dass sein Rang mit dem Range von (I.), und dass ebenso der Rang des Systems

$$(\bar{a}_{ik}) \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, s_0)$$

mit dem des Systems (0) übereinstimmt. Setzt man ferner (unter Anwendung der Bezeichnungsweise meiner erwähnten Notiz)

$$\Sigma_i = \begin{Bmatrix} s_{k-i} & \ldots s_0 - 1 \\ s_{k-i}+1 \ldots s_0 \end{Bmatrix}, \qquad (i = 0, 1, \ldots, k)$$

wo $s_k = 0$ und $\Sigma_k = 1$ zu nehmen ist, und bezeichnet durch

$$\Sigma_{i;\alpha,\beta,\ldots,\gamma} \qquad (\alpha, \beta, \ldots, \gamma = 0, 1, \ldots, k)$$

die Determinante, welche aus Σ_i entsteht, indem man die Zeilen und Reihen $s_\alpha, s_\beta, \ldots, s_\gamma$ weglässt, so ist klar, dass diese sämmtlichen Determinanten ebenso wie die Σ_i selbst, gebildet aus den Elementen von (I.) denselben Werth haben, wie die entsprechenden Determinanten gebildet aus den Elementen von (I'.). Für das letztere System übersieht man aber unmittelbar, dass

$$\text{(II.)} \qquad \begin{cases} \Sigma_{i-1} = \pm \bar{a}_{s_{k-i}, s_{k-i+1}} A_{i-1} \Sigma_i, \\ \Sigma_{\lambda; k-\lambda-1, \ldots, k-\mu+1} = \pm \bar{a}_{s_{k-\mu}, s_{k-\lambda}} A_\lambda \ldots A_{\mu-1} \Sigma_\mu \end{cases}$$

ist, wo

$$A_i = a_{s_{k-i}+1, s_{k-i}+1} \ldots a_{s_{k-i-1}-1, s_{k-i-1}-1} \qquad (i = 0, 1, \ldots, k-1)$$

gesetzt wurde. Für die Entscheidung der vorliegenden Frage kommen aber diejenigen Zeilen und Reihen, die abgesehen von dem Diagonalgliede aus lauter Nullen bestehen nicht in Betracht, wir können also an Stelle des Systems (I'.) beziehungsweise (I.) das System

$$\text{(III.)} \qquad (\bar{a}_{ik}) \qquad \begin{pmatrix} i = s_{k-1}, s_{k-2}, \ldots, s_0 \\ k = 0, s_{k-1}, s_{k-2}, \ldots, s_0 \end{pmatrix}$$

der Betrachtung zu Grunde legen. Dieses ist aber, vermöge der Glei-

chungen (II.) genau das System der Coefficienten des Gleichungssystems (9.) Ihrer erwähnten Arbeit*).

Der Satz, den ich auf S. 166 meiner Notiz ausgesprochen habe, wird an dem Systeme (I'.) bez. (III.) geradezu evident; ich muss aber hier bemerken, dass in demselben eine Berichtigung angebracht werden muss, die nebst einigen anderen in der erwähnten Notiz anzubringenden Berichtigungen weiter unten folgt. Auf die Nothwendigkeit derselben bin ich durch die Bemerkungen Ihres letzten Schreibens aufmerksam geworden.

*) Dieses Journal Bd. 111, S. 62, vgl. Einleitung etc. S. 26, Gleichung (10.).

Berichtigungen zu der Notiz S. 159 ff.

Seite 163, Zeile 13 v. o. lies „nun“ an Stelle von „nur“.

- 164, - 6 v. o. soll lauten: „sie entweder die Reihe s_0 oder den Factor $a_{s_{k-1}s_{k-1}}$ beziehungsweise $\begin{Bmatrix} s_{k-1} & \dots s_0-1 \\ s_{k-1}+1 & \dots s_0 \end{Bmatrix}$ enthalten.
- 165, - 4 v. o. ist das „und hinreichend“ zu streichen.
- 165, - 13 v. o. lies „mindestens“ an Stelle von „genau“.
- 165, - 15 v. o. ist nach „sei“ einzuschalten „wie das System (0)“.
- 165, - 16 v. o. lies (s_0-i+1) an Stelle von (s_0-i+2).
- 165, - 2, 1 v. u. soll lauten: „sein; dann sind aber alle Determinanten $(s_0-i+\lambda)$ter Ordnung $(\lambda < k-i)$ des Systems (V.) von selbst gleich Null, wenn die sämmtlichen Determinanten derselben Ordnung des Systems (0) verschwinden. Wir erhalten also das folgende“.
- 166, - 7 v. o. ist zwischen „(0)“ und „vom“ einzuschalten „mindestens“.
- 168, - 9 v. o. ist zwischen „$\varrho = r_k$“ und „vom“ einzuschalten „mindestens“.
- 168, - 10 v. o. ist „nothwendig und“ zu streichen.
- 168, - 13 v. o. ist hinzuzufügen: „falls der Rang des Systems (0) genau gleich r_0-r_k-i ist, so sind diese hinreichenden Bedingungen auch sämmtlich nothwendig“.

Die *Steiner*schen Polygone.

(Von Herrn *E. Czuber* in Wien.)

Die Sätze, welche *Steiner* im 32. Bande dieses Journals ohne Beweisführung mitgetheilt hat, sind seither Gegenstand mehrfacher Untersuchungen geworden; es mag genügen, wenn wir in dieser Beziehung auf die beiden Aufsätze *Schoute*s im 95. Bande derselben Zeitschrift hinweisen und den hier zusammengestellten litterarischen Daten die Arbeiten ***Emil Weyr*s** in den Sitzungsberichten der k. Akademie der Wissenschaften in Wien, Band 101, 2. Abth. (S. 1457—1483, 1695—1741) hinzufügen. In einer posthumen Abhandlung, die im 103. Bande dieser Berichte erschienen ist, hat der letztgenannte Geometer einen symbolischen Calcul aufgestellt, welcher in einfacher Weise gestattet, die projectiven Eigenschaften der Träger vom Geschlechte Eins zu entwickeln. Der Calcul, ganz unabhängig von der analytischen Darstellung des Trägers, rechnet mit Punkten, einzig und allein auf die Begriffe der Involution und der eindeutigen Punktbeziehung auf solchen Trägern sich stützend, und unterscheidet sich hierdurch bei Anwendung auf die Curve dritter Ordnung sechster Klasse wesentlich von dem Calcul *Clebsch*s, welcher mit den Werthen des Parameters rechnet, durch dessen elliptische Functionen die Coordinaten eines Punktes der Curve eindeutig dargestellt werden. In den folgenden Blättern soll *Weyr*s Methode, nach kurzer Entwickelung ihrer Grundzüge, auf die *Steiner*schen Schliessungsprobleme angewendet werden.

I.

1. Eine Involution $n$ten Grades $(n-1)$-ter Stufe J^n_{n-1} auf C_3 ist durch eine ihrer Gruppen $a_1 a_2 \ldots a_n$ gegeben; die Zugehörigkeit einer andern n-gliedrigen Punktgruppe $x_1 x_2 \ldots x_n$ zu dieser Involution soll durch die Gleichung

$$x_1 x_2 \ldots x_n = a_1 a_2 \ldots a_n$$

ausgedrückt werden. Diese Festsetzung entspricht vermöge der Commutativität der Multiplication völlig dem Charakter der Involution, welcher darin besteht, dass durch irgend $n-1$ Punkte einer Gruppe der letzte eindeutig bestimmt ist. Bezeichnet man das Product $a_1 a_2 \dots a_n$ durch K, so kann

$$(1.)\qquad x_1 x_2 \dots x_n = K$$

als die die Involution definirende Gleichung gelten. Dieselbe liefert, wenn nur *ein* x unbestimmt gelassen wird, *eine* Lösung; wenn zwei x unbestimmt bleiben, ∞^1 Punktepaare, welche eine J_1^2 constituiren u. s. w.; endlich, wenn alle x unbestimmt sind, ∞^{n-1} Lösungen, deren Gesammtheit eben die $J_{n-1}^n(K)$ ist.

Vereinigen sich alle Punkte einer Gruppe zu einem Punkte x, so wird dieser als Hauptpunkt der Involution bezeichnet, und da eine J_{n-1}^n n^2 Hauptpunkte besitzt, so hat die symbolische Gleichung

$$x^n = K$$

n^2 Lösungen.

2. Vermöge des Satzes, dass von den 3μ Schnittpunkten der C_3 mit einer C_μ jede $3\mu-1$ Punkte den letzten bestimmen, bilden die Schnittpunktgruppen der C_3 mit allen C_μ eine $J_{3\mu-1}^{3\mu}$.

Als fundamental, weil mit der C_3 unmittelbar gegeben, soll die J_2^3 der ∞^2 geraden Tripel in den Vordergrund gerückt und durch die Gleichung

$$(2.)\qquad x_1 x_2 x_3 = k$$

dargestellt werden.

Weil sich unter den C_μ auch Systeme von μ Geraden, also in der durch die C_μ bestimmten $J_{3\mu-1}^{3\mu}$ auch Gruppen von μ Tripeln befinden, so ist die diese Involution charakterisirende Constante K gleich k^μ; mit anderen Worten, die Gleichung

$$(3.)\qquad x_1 x_2 \dots x_{3\mu} = k^\mu$$

bestimmt eine Involution, deren jede Punktgruppe auf einer C_μ liegt.

3. Die Hauptpunkte der fundamentalen J_2^3, also die neun Lösungen der Gleichung

$$x^3 = k,$$

sind die Wendepunkte $i_1 i_2 \dots i_9$ der C_3. Denkt man sie so geordnet, dass in der Determinante

$$(4.)\qquad \begin{vmatrix} i_1 & i_2 & i_3 \\ i_4 & i_5 & i_6 \\ i_7 & i_8 & i_9 \end{vmatrix}$$

den Horizontal- und Verticalreihen sowie den positiven und negativen Gliedern die 4.3 Seiten der vier Wendepunktsdreiseite entsprechen, so ist

$$i_\alpha i_\beta i_\gamma = k,$$

wenn $\alpha\beta\gamma$ Zeiger einer Horizontal-, einer Verticalreihe, eines positiven oder eines negativen Gliedes sind, während für jedes α

$$i_\alpha^3 = k$$

ist.

4. Eine eindeutige Beziehung von Punkten der C_3 ist durch ein Paar zugeordneter Punkte a, b bestimmt; dass x, y ein Paar dieser Beziehung ist, kann entweder durch die Gleichung

$$xy = ab \tag{5.}$$

oder durch die andere

$$\frac{x}{y} = \frac{a}{b} \tag{6.}$$

Ausdruck finden.

Im ersten Falle hat die Beziehung wegen der Commutativität der Multiplication involutorischen Charakter; bezeichnet man die Punkte, welche die Paare ab; xy zu Tripeln der fundamentalen J_2^3 ergänzen, beziehungsweise mit o, ω, so ist

$$xy\omega = abo = k,$$

folglich $\omega = o$, d. h., die Paare liegen projectivisch in Bezug auf das Centrum o. Es ist also durch die Gleichung

$$xy = \frac{k}{o} \tag{7.}$$

die centrale Paarinvolution J_1^2 mit dem Centrum o dargestellt; ihre Hauptpunkte, nämlich die vier Lösungen der Gleichung

$$x^2 = \frac{k}{o},$$

sind die Berührungspunkte der aus o an C_3 gelegten Tangenten. Heisst a eine dieser Lösungen, so hat die Gleichung

$$x^2 = a^2$$

ausser ihr noch drei weitere, die dem Punkte a in den drei Systemen conjugirter Pole entsprechenden Punkte.

In dem zweiten Falle, welcher der Gleichung (6.) entspricht, ist die Beziehung im allgemeinen nicht involutorisch; weil aber

$$bx = ay,$$

so liegen je zwei Paare verkehrt perspectivisch in Bezug auf einen Punkt der C_3, so dass man aus einem Paare alle andern durch Projection aus sämmtlichen Punkten der C_3 ableiten kann.

Die durch das Paar a, b bestimmte nicht-involutorische eindeutige Beziehung soll durch $E(a, b)$ bezeichnet werden; ihre Darstellung ist die Gleichung (6.), oder auch, wenn $\frac{b}{a} = q$ gesetzt wird, die Gleichung

$$y = qx. \tag{8.}$$

Construirt man, von einem beliebigen Punkte x der C_3 ausgehend, die Punktreihe $x\, x_1\, x_2 \ldots x_n \ldots$ derart, dass jeder folgende Punkte aus dem vorangehenden nach der $E(a, b)$ abgeleitet erscheint, so ist

$$\begin{aligned} x_1 &= q\,x, \\ x_2 &= q^2 x, \\ &\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ x_n &= q^n x; \\ &\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \end{aligned}$$

die Reihe kehrt dann und nur dann zum Ausgangspunkte x zurück, wenn es ein n giebt, für welches $q^n = 1$ oder

$$a^n = b^n,$$

wenn also a, b Hauptpunkte einer und derselben J^n_{n-1} sind. In diesem Falle führt die fortgesetzte Ausübung der $E(a, b)$ von jedem Punkte der C_3 zu einer n-gliedrigen in sich geschlossenen Gruppe, die $E(a, b)$ ist cyklisch mit n-gliedrigen Cyklen und werde mit $E_n(a, b)$ bezeichnet.

Ordnet man dem Punkte x jenen Punkt zu, welcher sich aus ihm durch ν-malige Ausübung der $E(a, b)$ ergiebt, also den Punkt $q^\nu x$, so ergiebt sich wieder eine eindeutige Beziehung, welche mit $E^\nu(a, b)$ bezeichnet werden soll. Ihre wiederholte Anwendung führt zu der Punktreihe

$$\begin{aligned} x' &= q^\nu x, \\ x'' &= q^{2\nu} x, \\ &\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ x^{(n)} &= q^{n\nu} x, \\ &\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \end{aligned}$$

War die $E(a, b)$ cyklisch mit n-gliedrigen Cyklen, so ist es die $E^\nu(a, b)$ auch, sobald ν und n keinen gemeinsamen Theiler haben, weil dann erst der Punkt $x^{(n)}$ und kein früherer mit x zusammenfällt; dagegen ist die

$E^\nu(a,b)$ cyklisch mit $\frac{n}{\varkappa}$-gliedrigen Cyklen, wenn $\varkappa$ gemeinsamer Theiler von n und ν ist, weil dann $x^{\left(\frac{n}{\varkappa}\right)} = q^{\frac{\nu}{\varkappa} n} x$ mit dem Ausgangspunkte coincidirt.

Wir kehren nochmals zu der Gleichung (6.) zurück, welche eine von der centralen Paarinvolution verschiedene eindeutige Beziehung definirt, und stellen uns die Frage, wann die Elemente einer solchen Beziehung vertauschungsfähig sind. Es kann dies in zweifacher Art eintreten; entweder dadurch, dass $a = b$; dann ist auch $x = y$, so dass jeder Punkt der C_3 sich selbst entspricht; oder dadurch, dass $\frac{a}{b} = \frac{b}{a}$, also auch $\frac{x}{y} = \frac{y}{x}$ oder

$$x^2 = y^2;$$

dann ist das die E-Beziehung bestimmende wie jedes Punktepaar ein Paar conjugirter Pole. Es giebt also ausser der identischen noch drei E-Beziehungen auf C_3 mit vertauschungsfähigen Elementen.

5. Jede Involution wird aus einem Punkte der C_3 auf diese wieder in eine Involution desselben Grades und gleicher Stufe projicirt und es gehen dabei ihre Hauptpunkte wieder in Hauptpunkte über. Bezeichnet man nämlich die Projectionen von $x_1 x_2 \dots x_n$ mit $\xi_1 \xi_2 \dots \xi_n$, so folgt aus den Gleichungen

$$x_1 o \xi_1 = x_2 o \xi_2 = \cdots = x_n o \xi_n = k$$

mit Rücksicht auf Gleichung (1.):

$$\text{(9.)} \qquad \xi_1 \xi_2 \dots \xi_n = \frac{k^n}{o^n K};$$

ist ferner x ein Hauptpunkt der $J^n_{n-1}(K)$, ξ seine Projection aus o, so bestehen die Gleichungen

$$x^n = K, \quad x o \xi = k;$$

Elimination von x giebt

$$\xi^n = \frac{k^n}{o^n K},$$

wodurch beide Behauptungen erwiesen sind. Die durch Projection gewonnene J^n_{n-1} wird mit der ursprünglichen identisch, wenn

$$\frac{k^n}{o^n K} = K \quad \text{oder} \quad o^n = \frac{k^n}{K^2};$$

jede J^n_{n-1} ist also zu sich selbst perspectivisch in Bezug auf n^2 Centra, welche ihrerseits die Hauptpunkte einer bestimmten J^n_{n-1} darstellen. Hiernach ist beispielsweise die centrale Paarinvolution zu sich selbst perspec-

tivisch in Bezug auf ihre eigenen Doppelpunkte, die fundamentale Involution der geraden Tripel in Bezug auf die Inflexionspunkte.

Die eindeutige Beziehung $E(a, b) \equiv E(q)$ wird aus jedem Punkte der C_3 in die inverse Beziehung $E(b, a) \equiv E\left(\frac{1}{q}\right)$ projicirt. Die Projectionen von x, y aus o auf C_3 sind nämlich $\xi = \frac{k}{ox}$, $\eta = \frac{k}{oy}$, daher besteht zwischen ihnen vermöge (8.) die Gleichung

$$\eta = \frac{1}{q}\xi. \tag{10.}$$

Beide E-Beziehungen bestehen aus den nämlichen Punktepaaren, welche aus einem unter ihnen durch Projection aus den Punkten der C_3 abgeleitet werden können.

II.

1. Es seien $a_1, a_2, \ldots, a_n$ n beliebige Punkte auf C_3; man schreibe der Curve, von einem willkürlichen Punkte x_1 ausgehend, ein Polygon ein, dessen Seiten x_1x_2, x_2x_3, $\ldots$, x_nx_{n+1} der Reihe nach durch die Punkte $a_1a_2\ldots a_n$ gehen. Dann bestehen die Gleichungen

$$\begin{aligned} x_1a_1x_2 &= k, \\ k &= x_2a_2x_3, \\ x_3a_3x_4 &= k, \\ &\cdots\cdots \end{aligned}$$

Durch Multiplication derselben erhält man für $n = 2p$

$$x_1a_1a_3\ldots a_{2p-1} = a_2a_4\ldots a_{2p}x_{2p+1}$$

und daraus

$$x_{2p+1} = \frac{a_1a_3\ldots a_{2p-1}}{a_2a_4\ldots a_{2p}}x_1; \tag{1.}$$

dagegen für $n = 2p+1$

$$x_1a_1a_3\ldots a_{2p+1}x_{2p+2} = a_2a_4\ldots a_{2p}k$$

und daraus

$$x_1x_{2p+2} = \frac{a_2a_4\ldots a_{2p}}{a_1a_3\ldots a_{2p+1}}k. \tag{2.}$$

Aus diesen Gleichungen ergeben sich unmittelbar folgende Resultate.

α) Für $n = 2p$. Der Endpunkt x_{2p+1} des Polygons fällt mit dem Anfangspunkt x_1 zusammen, das Polygon wird also geschlossen dann und

nur dann, wenn

$$a_1 a_3 \ldots a_{2p-1} = a_2 a_4 \ldots a_{2p};$$

mithin besteht der Satz: „Gehen die Seiten eines der C_3 eingeschriebenen Polygons abwechselnd durch die Punkte zweier Gruppen einer und derselben Involution, so schliesst sich das Polygon jedesmal". (*Weyr,* l. c. p. 1467; vgl. *Schoute,* Hülfssatz I p. 106, Hülfssatz II p. 108 und h, p. 323.)

β) Für $n = 2p+1$. Soll das Polygon sich schliessen, so muss $x_{2p+1} = x_1$, daher

$$x_1^2 = \frac{a_2 a_4 \ldots a_{2p}}{a_1 a_3 \ldots a_{2p+1}} k \tag{3.}$$

sein; die *vier* Punkte x_1, von welchen aus sich ein geschlossenes Polygon einschreiben lässt, sind also Doppelpunkte einer centralen Paarinvolution; ihr Centrum kann durch eine lineare Construction gefunden werden. Man bestimmt zu diesem Zwecke die Punkte $u_1 u_2 \ldots u_p$ den Gleichungen

$$\begin{aligned} a_1 a_{2p+1} &= u_1 a_2, \\ a_3 u_1 &= u_2 a_4, \\ a_5 u_2 &= u_3 a_6, \\ &\ldots\ldots \\ a_{2p-1} u_{p-1} &= u_p a_{2p} \end{aligned}$$

gemäss, d. h. man projicire a_2 aus dem dritten Schnitt von $\overline{a_1 a_{2p+1}}$ nach u_1, a_4 aus dem dritten Schnitt von $\overline{a_3 u_1}$ nach u_2 u. s. w., endlich a_{2p} aus dem dritten Schnitt von $\overline{a_{2p-1} u_{p-1}}$ nach u_p; so ist u_p das gesuchte Centrum; denn die letzten Gleichungen geben, wenn man sie multiplicirt,

$$a_1 a_3 \ldots a_{2p+1} = a_2 a_4 \ldots a_{2p} u_p,$$

woraus $u_p = \frac{a_1 a_3 \ldots a_{2p+1}}{a_2 a_4 \ldots a_{2p}}$ und hiermit verwandelt sich (3.) in

$$x_1^2 = \frac{k}{u_p}.$$

Die Lösungen dieser Gleichung sind die Berührungspunkte der aus u_p an C_3 gezogenen Tangenten. Man hat also den Satz: „Es giebt vier $(2p+1)$-Ecke, deren Seiten der Reihe nach durch $2p+1$ vorgeschriebene Punkte der C_3 gehen". (*Schoute,* p. 318.)

Schliesst sich das Polygon nicht, so hängen Anfangs- und Endpunkte durch die Gleichung (2.) zusammen; macht man den Endpunkt zum Ausgangspunkt eines neuen auf dieselbe Art construirten Linienzuges, so wird

für dessen Endpunkt x_{4p+3} die Gleichung bestehen:

$$x_{2p+2}x_{4p+3} = \frac{a_2a_4\ldots a_{2p}}{a_1a_3\ldots a_{2p+1}}k,$$

welche mit (2.) verglichen zeigt, dass $x_{4p+3}=x_1$; daher der Satz: „Führt man die Seiten eines der C_3 eingeschriebenen Polygons zweimal nach einander in derselben Ordnung durch $2p+1$ auf C_3 gegebene Punkte, so entsteht immer ein geschlossenes $(4p+2)$-Eck“. (*Schoute* p. 318, *Weyr* p. 1463.)

Sind nur drei Punkte $a_1a_2a_3$ gegeben, so führen laut (3.) zu Dreiecken die Punkte, welche sich aus der Gleichung

$$x_1^2 = \frac{a_2}{a_1a_3}k$$

ergeben; bilden $a_1a_2a_3$ ein gerades Tripel, so wird

$$x_1^2 = \frac{a_2^2}{a_1a_2a_3}k = a_2^2;$$

Lösungen dieser Gleichung sind a_2 selbst und die zu a_2 conjugirten Pole; a_2 aber als Ausgangspunkt gewählt giebt das uneigentliche Dreieck $a_2a_3a_1$. Man kommt so zu dem Satze: „Durch die Punkte eines geraden Tripels auf C_3 lassen sich nur drei der C_3 eingeschriebene Dreiecke legen; ihre Ecken sind die den Tripelpunkten in den drei Systemen zugeordneten Pole.“ (*Clebsch,* Vorl. über Geom., I. 2, p. 615.)

Die Reihe der Fundamentalpunkte bestehe aus den $6\nu-1$ Punkten $ib_1ib_2\ldots ib_{3\nu-1}i$, wobei i einen beliebigen Inflexionspunkt bezeichnet; dann ist

$$a_1 = a_3 = \cdots = a_{6\nu-1} = i,$$
$$a_2 = b_1,\quad a_4 = b_2,\quad \ldots,\quad a_{6\nu-2} = b_{3\nu-1}$$

und es ergiebt die Formel (3.) folgende Beziehung zwischen dem Anfangspunkt x_1 und dem Endpunkt $x_{6\nu}$ des durch diese Fundamentalpunkte geführten Polygons:

$$x_1x_{6\nu} = \frac{b_1b_2\ldots b_{3\nu-1}}{i^{3\nu}}k,$$

aus welcher

$$b_1b_2\ldots b_{3\nu-1}\frac{k}{x_1x_{6\nu}} = k^\nu$$

folgt, weil $i^3=k$ ist; $\frac{k}{x_1x_{6\nu}}$ aber bedeutet den dritten Schnittpunkt der das Polygon schliessenden Seite mit C_3; nennt man ihn $b_{3\nu}$, so kommt

$$b_1b_2\ldots b_{3\nu-1}b_{3\nu} = k^\nu;$$

diese Gleichung charakterisirt die $J^{3\nu}_{3\nu-1}$, welche durch die C_ν auf C_3 bestimmt wird. Dies giebt den Satz: „Der letzte Schnittpunkt $b_{3\nu}$ der durch die gegebenen Punkte $b_1 b_2 \ldots b_{3\nu-1}$ auf C_3 gehenden C_ν mit C_3 wird gefunden, indem man von einem beliebigen Punkte der C_3 ausgehend dieser ein Polygon einschreibt, dessen Seiten der Reihe nach durch $ib_1 ib_2 \ldots ib_{3\nu-1} i$ gehen; die dieses Polygon schliessende Seite schneidet C_3 zum drittenmale in dem verlangten Punkte." (*Weyr,* p. 1705.)

Die Gleichung (2.) definirt eine centrale Paarinvolution und besagt also, dass die Schlussseiten aller durch die Fundamentalpunkte $a_1 a_2 \ldots a_{2p+1}$ geführten Polygone ein Strahlenbüschel bilden, dessen Centrum auf C_3 liegt. Offenbar gilt dies auch von der Verbindungslinie irgend zweier Ecken, zwischen welchen sich eine ungerade Anzahl auf einander folgender Fundamentalpunkte befindet. Daher der Satz: „Verbindet man in allen Polygonen, deren Seiten der Reihe nach durch die Fundamentalpunkte $a_1 a_2 \ldots a_n$ gehen, zwei Ecken, zwischen welchen mehrere bestimmte auf einander folgende Fundamentalpunkte in ungerader Anzahl sich befinden, so gehen die Verbindungslinien durch einen festen Punkt von C_3." (*Küpper,* Math. Ann., XXIV, p. 2.)

2. Wir gehen nun zu dem von *Steiner* behandelten Falle über und nehmen an, es seien nur zwei Fundamentalpunkte a, b gegeben, durch welche abwechselnd die Seiten eines der C_3 eingeschriebenen Polygons gezogen werden, so dass jeder von den beiden Punkten n-mal an die Reihe kommt. Dieser Fall geht aus II., 1., α) hervor, wenn man

$$(4.)\qquad \begin{cases} a_1 = a_3 = \cdots = a_{2n-1} = a, \\ a_2 = a_4 = \cdots = a_{2n} \quad = b \end{cases}$$

werden lässt; die Bedingung, dass das Polygon zu einem $2n$-Eck sich schliesst, lautet nunmehr

$$(5.)\qquad a^n = b^n.$$

„Zwei Punkte der C_3 müssen, um Fundamentalpunkte *Steiner*scher $2n$-Ecke bilden zu können, Hauptpunkte einer und derselben Involution J^n_{n-1} sein."

Angenommen, die Bedingung (5.) sei erfüllt und es werde der Punkt x_1 zum Ausgangspunkt der Construction eines $2n$-Ecks gewählt; vermöge der Beziehungen (4.) ergiebt sich dann mittels der Gleichungen (1.) und (2.), wenn man $\frac{b}{a} = q$ setzt, für die übrigen Ecken $x_2 \ldots x_{2n}$ folgende Darstellung:

$$\begin{array}{ll} x_1 = x_1, & x_2 = \dfrac{k}{ax_1}, \\ x_3 = \dfrac{x_1}{q}, & x_4 = q\,\dfrac{k}{ax_1}, \\ x_5 = \dfrac{x_1}{q^2}, & x_6 = q^2\,\dfrac{k}{ax_1}, \\ \dots\dots & \dots\dots \\ x_{2n-1} = \dfrac{x_1}{q^{n-1}}, & x_{2n} = q^{n-1}\,\dfrac{k}{ax_1}; \end{array}$$

dafür kann mit Rücksicht auf $q^n = 1$ geschrieben werden:

$$(6.)\quad \begin{cases} x_1 = x_1, \\ x_3 = q^{n-1}x_1, \\ x_5 = q^{n-2}x_1, \\ \dots\dots \\ x_{2n-1} = q\quad x_1; \end{cases} \qquad (7.)\quad \begin{cases} x_2 = \dfrac{k}{ax_1}, \\ x_4 = q\,\dfrac{k}{ax_1}, \\ x_6 = q^2\,\dfrac{k}{ax_1}, \\ \dots\dots \\ x_{2n} = q^{n-1}\dfrac{k}{ax_1}, \end{cases}$$

„Die paaren Ecken eines *Steiner*schen $2n$-Ecks bilden einen Cyklus der $E_n(a, b)$, die unpaaren einen zweiten Cyklus von entgegengesetztem Umlaufssinn.“

Man bemerke, dass bei dieser Darstellung der Ecken der eine Fundamentalpunkt $\frac{k}{x_1 x_2}$, der andere $\frac{k}{x_1 x_{2n}}$ ist. Auf Grund dessen lässt sich umgekehrt zeigen: „Zwei Cyklen einer $E_n(a, b)$ können immer als die paaren und unpaaren Ecken eines *Steiner*schen $2n$-Ecks verwendet werden.“ Ordnet man die Cyklen wie folgt:

$$(8.)\quad \begin{cases} y_1 = y_1, \\ y_3 = q^{n-1}y_1, \\ \dots\dots \\ y_{2n-1} = q\quad y_1, \end{cases} \qquad (9.)\quad \begin{cases} y_2 = y_2, \\ y_4 = q\quad y_2, \\ \dots\dots \\ y_{2n} = q^{n-1}y_2, \end{cases}$$

so hat das zugehörige $2n$-Eck die Fundamentalpunkte $\frac{k}{y_1 y_2}$ und $q\frac{k}{y_1 y_2}$, die, weil sie ein Paar zugeordneter Punkte der $E(a, b)$ bilden, Projectionen von b, a aus einem Punkte der C_3 sind.

„Verbindet man die Punkte zweier Cyklen der $E_n(a, b)$ gegenseitig durch gerade Linien, so schneiden diese n^2 Geraden die C_3 in Gruppen zu je n wieder in Punkten eines Cyklus der $E_n(a, b)$.“

Sind (8.), (9.) die beiden Cyklen, so folgt aus

$$y_1 y_2 = y_3 y_4 = \cdots = y_{2n-1} y_{2n} \, (= y_1 y_2),$$

dass diese n Geraden die C_3 im Punkte $\frac{k}{y_1 y_2}$ schneiden; ebenso bilden wegen

$$y_3 y_2 = y_5 y_4 = \cdots = y_1 y_{2n} \, (= q^{n-1} y_1 y_2)$$

die Verbindungslinien dieser n Paare ein Büschel mit dem Centrum $q \frac{k}{y_1 y_2}$ auf C_3 u. s. w.; schliesslich ergiebt sich aus

$$y_{2n-1} y_2 = y_1 y_4 = \cdots = y_{2n-3} y_{2n} \, (= q y_1 y_2),$$

dass die n Geraden $\overline{y_{2n-1} y_2}, \overline{y_1 y_4}, \ldots, \overline{y_{2n-3} y_{2n}}$ im Punkte $q^{n-1} \frac{k}{y_1 y_2}$ der C_3 zusammenlaufen. Hiermit ist der obige Satz bewiesen.

Mit zwei Cyklen der $E_n(a, b)$ ist also ein dritter derart verbunden, dass jeder dieser drei Cyklen die Projection eines der beiden andern aus jedem Punkte des dritten darstellt; *Küpper* bezeichnet solche Cyklen als „connexe Involutionsgruppen". Aus unserer Darstellung geht unmittelbar hervor: „Construirt man, von den Punkten eines geraden Tripels ausgehend, drei Cyklen der $E_n(a, b)$, so bilden diese drei connexe Involutionsgruppen". Und weiter: „Fasst man zwei von drei connexen Involutionsgruppen, den Cyklus mit einem beliebigen Elemente beginnend, als unpaare und paare Ecken eines *Steiner*schen $2n$-Ecks auf, so gehören seine Fundamentalpunkte der dritten Gruppe an."

Die allgemeinste Darstellung dreier connexen Involutionsgruppen der $E_n(a, b)$ ist durch das Gleichungssystem

$$\begin{array}{ccc} & x'y'z' = k, & \\ x' = x', & y' = y', & z' = z', \\ x'' = qx', & y'' = qy', & z'' = qz', \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ x^{(n)} = q^{n-1}x', & y^{(n)} = q^{n-1}y', & z^{(n)} = q^{n-1}z', \end{array}$$

gegeben; daraus folgt aber

$$x'x'' \ldots x^{(n)} y'y'' \ldots y^{(n)} z'z'' \ldots z^{(n)} = q^{\frac{3n(n-1)}{2}} (x'y'z')^n$$

oder, weil $q^n = 1$ ist,

$$x' \ldots x^{(n)} y' \ldots y^{(n)} z' \ldots z^{(n)} = k^n.$$

Hierin spricht sich der Satz aus: „Die $3n$ Punkte dreier connexen Involutions-

gruppen gehören zu den Fundamentalpunkten eines Büschels von Curven $n$ter Ordnung. Für $n = 3$ sind sie diese Basispunkte selbst." (*Küpper*, l. c., p. 20.)

3. Aus den Gleichungen (6.), (7.) folgt mit Leichtigkeit eine Reihe von Sätzen über *Steiner*sche Polygone. Zunächst erkennt man, dass irgend zwei unpaare wie auch zwei paare Ecken wieder als Fundamentalpunkte für ein *Steiner*sches Polygon derselben Eckenzahl verwendet werden können; denn es ist $x^n_{2\lambda+1} = x^n_{2\mu+1}$ und $x^n_{2\lambda'} = x^n_{2\mu'}$, weil $q^n = 1$.

Projicirt man die Ecken des Polygons (6.), (7.) aus einem beliebigen Punkte o der C_3 auf die Curve, so erhält man die Punkte

$$\xi_1 = \frac{k}{ox_1}, \qquad \xi_2 = \frac{ax_1}{o},$$
$$\xi_3 = q\frac{k}{ox_1}, \qquad \xi_4 = q^{n-1}\frac{ax_1}{o},$$
$$\cdots \qquad \cdots$$
$$\xi_{2n-1} = q^{n-1}\frac{k}{ox_1}, \qquad \xi_{2n} = q\frac{ax_1}{o},$$

dies sind aber wieder die Ecken eines *Steiner*schen $2n$-Ecks und seine Fundamentalpunkte

$$\alpha = \frac{k}{\xi_1\xi_2} = \frac{o^2}{a}, \quad \beta = \frac{k}{\xi_1\xi_{2n}} = \frac{o^2}{qa} = \frac{o^2}{b}$$

sind die Projectionen der Fundamentalpunkte des ursprünglichen aus dem Tangentialpunkt o' von o, weil

$$\alpha a o' = \beta b o' = o^2 o' = k.$$

(*Küpper*, p. 6.)

Leitet man aus den Ecken des Polygons (6.), (7.) nach der eindeutigen Beziehung $E(\alpha, \beta) \equiv E(\chi)$, wenn $\frac{\beta}{\alpha} = \chi$, neue Punkte ab, so bilden diese in derselben Ordnung wieder die Ecken eines *Steiner*schen $2n$-Ecks; denn die abgeleiteten Punkte

$$z_1 = \chi x_1, \qquad z_2 = \chi\frac{k}{ax_1},$$
$$z_3 = q^{n-1}\chi x_1, \qquad z_4 = q\chi\frac{k}{ax_1},$$
$$\cdots \qquad \cdots$$
$$z_{2n-1} = q\chi x_1, \qquad z_{2n} = q^{n-1}\chi\frac{k}{ax_1}$$

stellen wieder zwei Cyklen der $E'_n(q)$ dar; die Fundamentalpunkte dieses neuen Polygons sind

$$\frac{k}{z_1 z_2} = \frac{a}{\chi^2} \qquad \frac{k}{z_1 z_{2n}} = \frac{qa}{\chi^2} = \frac{b}{\chi^2}.$$

Wiederholte successive Anwendung der $E(\chi)$ führt also zu einer Reihe *Steiner*scher $2n$-Ecke, deren Fundamentalpunkte sich aus fortgesetzter Anwendung der $E\left(\frac{1}{\chi^2}\right)$ auf a, b ergeben. Ist die $E(\chi)$ cyklisch mit μ-gliedrigen Cyklen, so ergiebt sich auf diese Weise aus einem $2n$-Eck eine in sich geschlossene Gruppe von μ solchen Polygonen.

Die Tangentialpunkte der Ecken des Polygons (6.), (7.) sind

$$\begin{array}{ll} x'_1 = x'_1, & x'_2 = \dfrac{a^2}{x'_1}, \\ x'_3 = q^2 x'_1, & x'_4 = q^{2n-2}\dfrac{a^2}{x'_1}, \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ x'_{2n-1} = q^{2n-2} x_1, & x'_{2n} = q^2 \dfrac{a^2}{x'_1}; \end{array}$$

sie bilden also wieder die Ecken eines *Steiner*schen Polygons, das

$$\alpha = \frac{k}{x'_1 x'_2} = \frac{k}{a^2} = a' \quad \beta = \frac{k}{x'_1 x'_{2n}} = \frac{k}{q^2 a^2} = \frac{k}{b^2} = b',$$

also die Tangentialpunkte von a, b zu Fundamentalpunkten hat. (*Küpper*, p. 6.) Wie man bemerkt, bilden die beiden Gruppen von Ecken Cyklen der $E^2(q)$ und diese Cyklen sind nur dann n-gliedrig, wenn n eine ungerade Zahl ist; bei geradem n werden sie $\frac{n}{2}$-gliedrig, das Polygon der Tangentialpunkte besteht dann in zwei sich deckenden n-Ecken.

Dieser Satz ist der einfachste Fall des folgenden allgemeinen Satzes: „Die $r$ten Tangentialpunkte der Ecken eines *Steiner*schen Polygons bilden wieder ein solches Polygon und seine Fundamentalpunkte sind die $r$ten Tangentialpunkte der Fundamentalpunkte des ursprünglichen." Wenn man nämlich zwischen den Gleichungen

$$x^2 x' = k, \quad x'^2 x'' = k, \quad \ldots, \quad x^{(r-1)^2} x^{(r)} = k,$$

durch welche die auf einander folgenden Tangentialpunkte von x bis zum $r$ten einschliesslich verbunden sind, x', x'', …, $x^{(r-1)}$ eliminirt, so ergiebt

sich für den $r$ten Tangentialpunkt von x der Ausdruck

$$x^{(r)} = \left[\frac{x^{\nu}}{k^{\frac{2^r-(-1)^r}{3}}}\right]^{(-1)^r};$$

hiernach sind die $r$ten Tangentialpunkte von (6.) und (7.)

$$\begin{array}{ll} x_1^{(r)} = x_1^{(r)}, & x_2^{(r)} = \dfrac{k}{a^{(r)}x_1^{(r)}}, \\ x_3^{(r)} = q^{(-2)^r(n-1)}x_1^{(r)}, & x_4^{(r)} = q^{(-2)^r}\dfrac{k}{a^{(r)}x_1^{(r)}}, \\ \cdots & \cdots \\ x_{2n-1}^{(r)} = q^{(-2)^r}x_1^{(r)}, & x_{2n}^{(r)} = q^{(-2)^r(n-1)}\dfrac{k}{a^{(r)}x_1^{(r)}}; \end{array}$$

dies aber sind thatsächlich die Ecken eines *Steiner*schen Polygons mit den Fundamentalpunkten

$$\alpha = \frac{k}{x_1^{(r)}x_2^{(r)}} = a^{(r)}, \quad \beta = \frac{k}{x_1^{(r)}x_{2n}^{(r)}} = q^{(-2)^r}a^{(r)} = b^{(r)}.$$

Dieses Polygon ist nur dann wieder ein $2n$-Eck, wenn 2^r und n keinen gemeinsamen Theiler haben, also dann, wenn n eine ungerade Zahl ist; enthält dagegen n den Factor 2^p $(p < r)$, so wird die $E^{2^r}(q)$, welcher die Ecken angehören, nur $\frac{n}{2^p}$-gliedrige Cyklen aufweisen, das neue Polygon also ein $\frac{n}{2^{p-1}}$-Eck, 2^p-fach gelegt, sein. Ist $n = 2^r$, so wird $a^{(r)} = b^{(r)}$ und es entsteht ein Zweieck, indem die Tangentialpunkte aller unpaaren wie auch die aller paaren Ecken zusammenfallen. Hierin liegt zugleich der Satz: „Sind a, b Fundamentalpunkte für ein $2^{p+1}n$-Eck, so sind die $p$ten Tangentialpunkte von a, b Fundamentalpunkte für ein $2n$-Eck.“

4. Ein Polygon besonderer Art ergiebt sich, wenn man den Fundamentalpunkt a zum Ausgangspunkt der Construction macht, also $x_1 = a$ werden lässt; die Gleichungen (6.) und (7.) liefern für die Ecken dieses von *Küpper* „Kernpolygon“ genannten $2n$-Ecks die Werthe

$$(6^*.)\quad \begin{cases} \eta_1 = a, \\ \eta_3 = q^{n-1}a, \\ \cdots \\ \eta_{2n-1} = qa = b, \end{cases} \qquad (7^*.)\quad \begin{cases} \eta_2 = \dfrac{k}{a^2} = a', \\ \eta_4 = qa', \\ \cdots \\ \eta_{2n} = q^{n-1}\dfrac{k}{a^2} = \dfrac{k}{ab} = c; \end{cases}$$

dabei bedeutet a' den Tangentialpunkt von a, der also als zweite Ecke auftritt, c den dritten Schnitt von $\overline{ab}$, welcher die letzte Ecke bildet, während die vorletzte mit dem zweiten Fundamentalpunkt b zusammenfällt.

Weil die Punkte x_1, x_2, η_1 der drei Cyklen (6.), (7.) und (6*.) der $E_n(q)$ in einer Geraden liegen, so bilden diese Cyklen drei connexe Involutionsgruppen; es gilt also der Satz: „Die unpaaren und paaren Ecken eines *Steiner*schen Polygons und die unpaaren Ecken seines Kernpolygons bilden drei connexe Involutionsgruppen.“

Unter dem Abstand einer paaren und einer unpaaren Ecke soll die Differenz: „Ungerader Index — gerader Index“ verstanden werden. Ist δ eine *ungerade Zahl*, so haben die Ecken

$$x_{2\lambda+1} \quad x_{2\lambda-\delta+1}$$

den Abstand δ und es soll der dritte Schnittpunkt ihrer Verbindungslinie mit f_δ bezeichnet werden; dagegen haben die Ecken

$$x_{2\lambda+1} \quad x_{2\lambda+\delta+1}$$

den Abstand $-\delta$, der dritte Schnittpunkt ihrer Verbindungslinie sei $f_{-\delta}$. Nun ist auf Grund der Gleichungssysteme (6.) und (7.)

$$x_{2\lambda+1} = q^{n-\lambda}x_1,$$

$$x_{2\lambda-\delta+1} = q^{\lambda-\frac{1+\delta}{2}}\frac{k}{ax_1},$$

$$x_{2\lambda+\delta+1} = q^{\lambda-\frac{1-\delta}{2}}\frac{k}{ax_1},$$

folglich

$$f_\delta = \frac{k}{x_{2\lambda+1}x_{2\lambda-\delta+1}} = q^{\frac{1+\delta}{2}}a,$$

$$f_{-\delta} = \frac{k}{x_{2\lambda+1}x_{2\lambda+\delta+1}} = q^{\frac{1-\delta}{2}}a;$$

dies giebt zunächst den Satz: „Verbindet man in allen *Steiner*schen Polygonen von den Fundamentalpunkten a, b alle Eckenpaare von dem ungeraden Abstand δ und ebenso alle Eckenpaare vom Abstand $-\delta$, so gehen diese Verbindungslinien durch zwei feste Punkte der C_3, und zwar durch zwei unpaare Ecken des zugehörigen Kernpolygons.“

Weil ferner

$$f_\delta f_{-\delta} = qa^2 = ab,$$

so erkennt man weiter, „dass die zu verschiedenen δ gehörigen Punktepaare

$f_\delta f_{-\delta}$ der durch a, b bestimmten Paarinvolution angehören, deren Centrum c ist.“ (*Küpper*, p. 3.)

Man kann diesen Resultaten folgende bemerkenswerthe Fassung verleihen: „Zieht man in einem *Steiner*schen Polygon alle Diagonalen, welche eine bestimmte ungerade Anzahl δ von Seiten unterspannen, so bilden diese Diagonalen die Seiten eines neuen *Steiner*schen Polygons, dessen Fundamentalpunkte zwei unpaare Ecken des Kernpolygons sind.“ Man hat für die unpaaren und paaren Ecken dieses Polygons das Schema

$$\begin{array}{ll} x_1, & x_{1+\delta}, \\ x_{1+2\delta}, & x_{1+3\delta}, \\ x_{1+4\delta}, & x_{1+5\delta}, \\ \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot \\ x_{1+2(n-1)\delta}, & x_{1+(2n-1)\delta}, \end{array}$$

vorausgesetzt, dass δ und n keinen gemeinsamen Divisor haben; in diesem Falle ist also das Polygon der Diagonalen wieder ein $2n$-Eck, weil erst $x_{1+2n\delta}=x_1$ und $x_{1+(2n+1)\delta} = x_{1+\delta}$ wird. Haben dagegen n und δ den gemeinsamen Divisor $\varkappa$, so wird schon $x_{1+2\frac{n}{\varkappa}\delta} = x_1$ und $x_{1+\left(2\frac{n}{\varkappa}+1\right)\delta} = x_{1+\delta}$, so dass in diesem Falle sich das Polygon der Diagonalen in $\varkappa$ einfache Polygone von der Seitenzahl $2\frac{n}{\varkappa}$ auflöst.

Man bemerkt, dass die unpaaren wie die paaren Ecken des Diagonalenpolygons je einen Cyklus der $E^{2\delta}(q)$ bilden, und dass die zu δ und $2n-\delta$ gehörigen Polygone zusammenfallen, weil eine Diagonale, welche einerseits δ Seiten unterspannt, andererseits $2n-\delta$ Seiten lässt. Ist demnach n eine ungerade Zahl, so giebt es der Diagonalen-Polygone oder Polygoncomplexe $\frac{n-1}{2}$; wählt man insbesondere $\delta = n$, so wird $E^{2\delta}(q)$ eingliedrig, das Diagonalen-Polygon zerfällt in Zweiecke. Dies ergiebt den Satz: „In einem *Steiner*schen $2n$-Eck, für welches n ungerade ist, schneiden sich die Hauptdiagonalen in einem Punkte der Curve.“ Bei gerad-ungeradem n ist für $\delta = \frac{n}{2}$ der Cyklus von $E^{2\delta}(q)$ zweigliedrig, weil $x_{1+4\delta} = x_{1+2n} = x_1$, das Diagonalen-Polygon zerfällt also in Vierecke, in welchen gegenüberliegende Ecken conjugirte Punkte der C_3 sind.

Zur Erläuterung diene ein *Steiner*sches Zehneck und ein Zwölfeck.

Heissen die Ecken des ersten $x_1 x_2 \ldots x_{10}$, so kommt man zu folgenden Diagonal-Polygonen:

Für $\delta = 3$ und $\delta = 7$ zu dem Zehneck $x_1x_4x_7x_{10}x_3x_6x_9x_2x_5x_8$ mit den Fundamentalpunkten q^4a und q^2a;

für $\delta = 5$ zu den Hauptdiagonalen x_1x_6; x_2x_7; x_3x_8; x_4x_9; x_5x_{10} mit dem gemeinsamen Punkte q^3a.

Das Zwölfeck $x_1x_2 \dots x_{12}$ ergiebt folgende Diagonal-Polygone:

Für $\delta = 3$ und $\delta = 9$ die drei Vierecke $x_1x_4x_7x_{10}$; $x_3x_6x_9x_{12}$; $x_5x_8x_{11}x_2$; mit den Fundamentalpunkten q^5a und q^2a;

für $\delta = 5$ und $\delta = 7$ das Zwölfeck $x_1x_6x_{11}x_4x_9x_2x_7x_{12}x_5x_{10}x_3x_8$ mit den Fundamentalpunkten q^4a und q^3a.

5. Wir legen uns folgende Frage vor: Es sei a ein beliebiger Punkt der C_3; wie viele Punkte der Curve bilden mit a Paare von Fundamentalpunkten für eigentliche $2n$-Ecke?

Ihre Beantwortung läuft darauf hinaus, von den n^2-1 Lösungen, welche der Gleichung

$$x^n = a^n$$

ausser a zukommen, diejenigen zu zählen, welche nicht zugleich Lösungen einer niedrigeren Gleichung von derselben Form sind, wie etwa

$$x^\nu = a^\nu,$$

wo $\nu < n$. Mit Benutzung eines bei binomischen Gleichungen üblichen Sprachgebrauchs wollen wir solche Lösungen *primitive* Lösungen, die ihnen entsprechenden Punkte der C_3 *primitive Hauptpunkte der Involution* $J^n_{n-1}(a^n)$ nennen.

Ist n eine Primzahl, so sind alle Lösungen der obigen Gleichung primitiv, und es giebt somit zu jedem Punkte der C_3 n^2-1 andere Punkte, welche mit ihm Fundamentalpunkte eigentlicher $2n$-Ecke bilden.

Nun sei n zusammengesetzt und, in seine Primfactoren zerlegt,

$$n = p_1^{\pi_1} p_2^{\pi_2} \dots p_r^{\pi_r}; \tag{10.}$$

der Kürze halber werde $p_i^{\pi_i} = n_i$ gesetzt.

Die Gleichung

$$y^{n_1} = a^{n_1}$$

besitze neben a N_1 primitive Lösungen, eine davon sei y_α. Die mit dieser gebildete Gleichung

$$z^{n_2} = y_\alpha^{n_2}$$

möge, von y_α abgesehen, N_2 primitive Lösungen zulassen; dann ergeben

alle y_α ($\alpha = 1, 2, \ldots, N_1$) zusammen $N_1 N_2$ primitive Lösungen der Gleichung

$$x^{n_1 n_2} = a^{n_1 n_2};$$

eine derselbe heisse z_β. Die mit ihr gebildete Gleichung

$$t^{n_3} = z_\beta^{n_3}$$

besitze (ausser z_β) N_3 primitive Lösungen; dann führen alle z_β ($\beta = 1, 2, \ldots, N_1 N_2$) zusammen $N_1 N_2 N_3$ primitive Lösungen der Gleichung

$$x^{n_1 n_2 n_3} = a^{n_1 n_2 n_3}$$

herbei. In dieser Weise fortfahrend kommt man schliesslich zu dem Resultate, dass die Gleichung

$$v^{n_r} = u_x^{n_r},$$

in welcher u_x eine primitive Lösung von $x^{n_1 n_2 \ldots n_{r-1}} = a^{n_1 n_2 \ldots n_{r-1}}$ bedeutet, $N_1 N_2 \ldots N_r$ primitive Lösungen der Gleichung

$$x^{n_1 n_2 \ldots n_r} = a^{n_1 n_2 \ldots n_r}$$

oder

$$x^n = a^n$$

ergiebt. Die verlangte Anzahl ist also zunächst

$$\text{(11.)} \qquad N = N_1 N_2 \ldots N_r$$

Es kommt nur noch darauf an, die Anzahl der primitiven Lösungen einer Gleichung von der Form

$$\text{(12.)} \qquad x^{p^\pi} = a^{p^\pi}$$

zu bestimmen, wenn p eine Primzahl bedeutet. Ihre nichtprimitiven Lösungen kommen Gleichungen wie

$$x^\theta = a^\theta$$

zu, wo θ ein Divisor von p^π ist; aber alle Divisoren von p^π, mit Ausnahme dieser Zahl selbst, sind Divisoren von $p^{\pi-1}$, daher ergeben sich *alle* Lösungen von Gleichungen der letztangeschriebenen Form, also alle nicht-primitiven Lösungen und nur solche aus der Gleichung

$$\text{(13.)} \qquad x^{p^{\pi-1}} = a^{p^{\pi-1}}.$$

Nun giebt die Gleichung (12.), von a abgesehen, $p^{2\pi}-1$ Lösungen, die

Gleichung (13.) $p^{2\pi-2}-1$, folglich ist die Anzahl der primitiven

$$p^{2\pi}-1-(p^{2\pi-2}-1) = p^{2\pi}\left(1-\frac{1}{p^2}\right).$$

Setzt man demnach in (11.) für die einzelnen N_i die entsprechenden Werthe ein, so wird

$$N = p_1^{2\pi_1}p_2^{2\pi_2}\dots p_r^{2\pi r}\left(1-\frac{1}{p_1^2}\right)\left(1-\frac{1}{p_2^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{p_r^2}\right)$$

oder mit Rücksicht darauf, dass $p_1^{\pi_1}\dots p_r^{\pi_r} = n$ ist,

$$N = n^2\left(1-\frac{1}{p_1^2}\right)\left(1-\frac{1}{p_2^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{p_r^2}\right).$$

„Setzt sich also die Zahl n aus den Primzahlen $p_1 p_2 \dots p_r$ in beliebigen Potenzen zusammen, so gehören zu einem Punkte a

$$n^2 \prod_1^r{}_i\left(1-\frac{1}{p_i^2}\right)$$

Punkte auf C_3, welche mit ihm *Steiner*sche Paare $n$ter Ordnung bilden.“ (Vgl. *Weyr,* p. 1729—1735.)

Hiermit ist zugleich die Anzahl der cyklischen E-Beziehungen mit n-gliedrigen Cyklen bestimmt.

6. Wir schliessen hieran die Besprechung einiger besonderen Fälle.

α) Ist $n = 2^\lambda$, so giebt es $2^{2\lambda}-2^{2\lambda-2}$ verschiedene cyklische Beziehungen mit n-gliedrigen Gruppen. Bezeichnet man mit a, b ein Paar von Punkten der C_3, mit a', b'; a'', b''; ..., $a^{(\lambda)}$, $b^{(\lambda)}$ ihre ersten, zweiten, ..., λten Tangentialpunkte, so führt die Reihe der Beziehungen

$$\begin{aligned} a^2 a' &= b^2 b', \\ a'^2 a'' &= b'^2 b'' \\ &\dots\dots \end{aligned}$$

zu der Relation

$$a^{2^\lambda}\{a^{(\lambda)}\}^{(-1)^{\lambda-1}} = b^{2^\lambda}\{b^{(\lambda)}\}^{(-1)^{\lambda-1}};$$

hiernach sind a, b Fundamentalpunkte für eigentliche $2n$-Ecke, wenn $a^{(\lambda)} = b^{(\lambda)}$, ohne dass eine niedrigere Gleichung dieser Art erfüllt wäre. „Zwei Punkte der C_3 sind also Fundamentalpunkte für *Steiner*sche $2^{\lambda+1}$-Ecke, wenn ihre λten Tangentialpunkte, und keine früheren, zusammenfallen“.

β) Für $n = 3$ ergeben sich acht verschiedene dreigliedrig-cyklische E-Beziehungen. Wählt man einen Punkt a auf C_3, so sind die Punkte,

welche mit ihm *Steiner*sche Paare dritter Ordnung bilden, durch die Gleichung

$$x^3 = a^3$$

bestimmt und lassen sich mit Hülfe der Inflexionspunkte wie folgt darstellen:

$$b_1 = \frac{i_1 a}{i_2}, \quad b_2 = \frac{i_1 a}{i_3}, \quad \cdots, \quad b_8 = \frac{i_1 a}{i_9};$$

thatsächlich sind diese acht Werthe unter einander und von a verschieden und erfüllen wegen $i_a^3 = k$ die obige Gleichung. Heisst o der dritte Schnittpunkt von $\overline{i_1 a}$ mit C_3 und projicirt man aus demselben die neun Inflexionspunkte auf C_3, so ergeben sich die Punkte

$$\frac{k}{oi_1} = a; \quad \frac{k}{oi_2} = \frac{i_1}{i_2} a = b_1, \quad \frac{k}{oi_3} = \frac{i_1}{i_3} a = b_2, \quad \cdots, \quad \frac{k}{oi_9} = \frac{i_1}{i_9} a = b_8.$$

Es bildet also a mit den ihm zugeordneten Punkten b eine Inflexionsgruppe. „Jede zwei Punkte einer Inflexionsgruppe bilden demnach ein Paar Fundamentalpunkte für *Steiner*sche Sechsecke.“

γ) Die Anzahl der verschiedenen E-Beziehungen mit fünfgliedrigen Cyklen ist 24. Um die Bedingung zu finden, welcher zwei Punkte genügen müssen, damit $E(a, b)$ solche Cyklen liefere, bezeichne man mit a', b' ihre Tangentialpunkte und setze die Gleichungen an:

$$a^3 = b^3,$$
$$a^2 a' = b^2 b';$$

durch Multiplication derselben erhält man

$$a^5 a' = b^5 b';$$

und es wird somit $a^5 = b^5$, wenn $a' = b'$. „Wenn also zwei Punkte einer Inflexionsgruppe einen gemeinschaftlichen Tangentialpunkt haben, so bilden sie Fundamentalpunkte für *Steiner*sche Zehnecke.“

Das von *Steiner* für diesen Fall angegebene Kriterium ist in leichtverständlicher Weise durch die Gleichungen

$$a^2 a' = b^2 b',$$
$$a b' a_2 = b a' b_2 (= k),$$
$$a b_2 a_3 = b a_2 b_3 (= k),$$
$$a b_3 = b a_3$$

zum Ausdruck gebracht, in welchen a', b' die Tangentialpunkte von a, b

und $a_2 b_2$, $a_3 b_3$ Punkte sind, deren Bedeutung aus den Gleichungen deutlich zu entnehmen ist; thatsächlich führt Multiplication zu $a^5 = b^5$.

δ) Zu jedem Punkte der C_3 gehören 24 andere Punkte, welche mit ihm Paare von Fundamentalpunkten *Steiner*scher Zwölfecke ergeben. Es seien α, β zwei Punkte einer Inflexionsgruppe; man ziehe aus jedem derselben eine Tangente an C_3 und bezeichne die respectiven Berührungspunkte mit a, b; dann folgt aus $a^2\alpha = b^2\beta$ durch Erheben in die dritte Potenz $a^6\alpha^3 = b^6\beta^3$, woraus sich wegen $\alpha^3 = \beta^3$ die charakteristische Beziehung $a^6 = b^6$ ergiebt. „Zwei Punkte, deren Tangentialpunkte zwei verschiedene Punkte einer Inflexionsgruppe sind, bilden also Fundamentalpunkte für *Steiner*sche Zwölfecke."

Wien, Juni 1894.

Ueber den analytischen Ausdruck des *Huygens*schen Princips.

(Von Herrn *A. Gutzmer.*)

Die analytische Behandlung der Optik hat *G. Kirchhoff* bekanntlich auf einen Satz gegründet, der eine Präcisirung und Verallgemeinerung des *Huygens*schen Princips darstellt*) und sich folgendermassen ausspricht:

Genügt die Function $\varphi(x, y, z, t)$ innerhalb eines durch die Fläche S vollständig begrenzten Raumes der partiellen Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = a^2 \Delta\varphi, \tag{1.}$$

wo a eine Constante und Δ das bekannte Operationssymbol ist, so besteht für jeden innerhalb dieses Raumes gelegenen Punkt (x_0, y_0, z_0) die Gleichung

$$(2.)\quad \begin{cases} 4\pi\varphi(x_0, y_0, z_0, t) = \int ds\,\Omega, \\ \text{wo} \\ \Omega = \dfrac{\partial}{\partial n}\dfrac{\varphi\left(t-\frac{r}{a}\right)}{r} - \dfrac{1}{r}f\left(t-\frac{r}{a}\right) \end{cases}$$

ist. Die Integration ist dabei über alle Elemente ds der Begrenzungsfläche S zu erstrecken, n ist die nach dem Innern gerichtete Normale der letzteren, und es ist zur Abkürzung gesetzt:

$$r = \left|\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}\right|,$$

$$f(t) = \frac{\partial\varphi(t)}{\partial n},$$

$$\varphi(t) = \varphi(x, y, z, t).$$

*) Sitzungsberichte der K. Preuss. Akademie der Wissenschaften, 1882, S. 641 ff. — S. a. die von Herrn *K. Hensel* herausgegebenen Vorlesungen über Mathematische Optik, Leipzig 1891, S. 22 ff.

Um diesen Satz herzuleiten, benutzt *Kirchhoff* eine Hülfsfunction von besonderer Beschaffenheit, die aber in dem Resultat nicht mehr auftritt. Dieser Umstand hat mich bereits vor mehreren Jahren bei der Beschäftigung mit dem *Green*schen Satze veranlasst, einen von diesem Uebelstande freien Beweis aufzustellen, den ich mir im Nachstehenden mitzutheilen erlaube, und an dessen Veröffentlichung ich bisher durch eine Reihe äusserer Umstände verhindert war.

Ich habe erst kürzlich bemerkt, dass auch von anderer Seite das Bedürfniss nach einer anderweitigen Begründung für den analytischen Ausdruck des *Huygens*schen Princips empfunden worden ist. In einer Abhandlung „Sulla propagazione libera e perturbata delle onde luminose in un mezzo isotropico"*) hat Herr *G. A. Maggi* einen neuen Beweis für das in Rede stehende Theorem gegeben, ohne Hinzuziehung einer Hülfsfunction, während Herr *Beltrami* in zwei Mittheilungen „Sulla principio di *Huygens*"**) und „Sull' espressione analitica del principio di *Huygens*"***) im Anschluss an *Kirchhoff* zwei neue Herleitungen für *Kirchhoff*s analytischen Ausdruck des *Huygens*schen Princips veröffentlicht hat.

Es lässt sich nun leicht einsehen, dass das *Huygens*sche Princip im Wesentlichen nichts anderes ist als eine Umformung einer bekannten Gleichung der Potentialtheorie, nämlich der Gleichung†):

$$4\pi V(x_0, y_0, z_0) = \int\left(V\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n} - \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial n}\right)ds - \int\frac{1}{r}\cdot\Delta V d\tau,$$

wo $d\tau$ ein Element des von S umschlossenen Raumes darstellt. Diese Gleichung gilt für jede Function V, die nebst ihren Ableitungen gewissen bekannten Stetigkeitsbedingungen genügt. Man darf daher im Besonderen

$$V = \varphi\left(x, y, z, t-\frac{r}{a}\right)$$

setzen und erhält dann unter Berücksichtigung des Umstandes, dass r für

*) Annali di Matematica, t. XVI, 1888.

**) Rendiconti del R. Instituto Lombardo, Serie II, vol. XXII, 1889.

***) Rendiconti della Reale Accademia dei Lincei, 1892, 1° Semestre, p. 99.

†) *Green,* An Essay on the application of Mathematical Analysis to the theories of Electricity and Magnetism, 1828, art. 3, eq. (3); Mathematical papers, p. 27.

x_0, y_0, z_0 gleich Null ist, die Gleichung:

$$(3.)\quad \begin{cases} 4\pi\varphi(x_0, y_0, z_0, t) = \int\left[\dfrac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n}\varphi\left(t-\frac{r}{a}\right)-\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial\varphi\left(t-\frac{r}{a}\right)}{\partial n}\right]ds \\ \qquad\qquad -\int\dfrac{1}{r}\Delta\varphi\left(t-\frac{r}{a}\right)d\tau. \end{cases}$$

Diese Gleichung enthält bereits den analytischen Ausdruck für das *Huygens*sche Princip, wenn man hinzufügt, dass φ der Differentialgleichung (1.) genügen soll, und es erfordert nur eine einfache Rechnung, um die Form (3.) in die *Kirchhoff*sche Form (2.) überzuführen. Es ist zu dem Zwecke nur das in (3.) auftretende Raumintegral unter Berücksichtigung von (1.) in ein Oberflächenintegral umzuwandeln.

Bezeichnet man nun der Kürze halber

$$\frac{\partial\varphi(t)}{\partial x} = \varphi_1(t), \quad \frac{\partial^2\varphi(t)}{\partial x^2} = \varphi_{11}(t)$$

und entsprechend die Ableitungen von $\varphi(t)$ nach y und z, so folgt:

$$\frac{\partial\varphi\left(t-\frac{r}{a}\right)}{\partial x} = \varphi_1\left(t-\frac{r}{a}\right)-\frac{1}{a}\frac{\partial\varphi\left(t-\frac{r}{a}\right)}{\partial t}\cdot\frac{\partial r}{\partial x},$$

$$\frac{\partial^2\varphi\left(t-\frac{r}{a}\right)}{\partial x^2} = \varphi_{11}\left(t-\frac{r}{a}\right)-\frac{2}{a}\frac{\partial\varphi_1\left(t-\frac{r}{a}\right)}{\partial t}\cdot\frac{\partial r}{\partial x}-\frac{1}{a}\frac{\partial\varphi\left(t-\frac{r}{a}\right)}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2 r}{\partial x^2}$$
$$+\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2\varphi\left(t-\frac{r}{a}\right)}{\partial t^2}\cdot\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2.$$

Addirt man zu dieser Gleichung die entsprechenden für y und z und beachtet dabei, dass

$$\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial r}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial r}{\partial z}\right)^2 = 1,$$
$$\Delta r = \frac{\partial^2 r}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 r}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 r}{\partial z^2} = \frac{2}{r}$$

und nach (1.)

$$\Delta\varphi\left(t-\frac{r}{a}\right) = \varphi_{11}\left(t-\frac{r}{a}\right)+\varphi_{22}\left(t-\frac{r}{a}\right)+\varphi_{33}\left(t-\frac{r}{a}\right) = \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2\varphi\left(t-\frac{r}{a}\right)}{\partial t^2}$$

ist, so erhält man die folgende Gleichung:

$$\Delta\varphi\left(t-\frac{r}{a}\right) = -\frac{2}{a}\frac{\partial}{\partial t}\left\{\varphi_1\left(t-\frac{r}{a}\right)\frac{\partial r}{\partial x}+\varphi_2\left(t-\frac{r}{a}\right)\frac{\partial r}{\partial y}+\varphi_3\left(t-\frac{r}{a}\right)\frac{\partial r}{\partial z}\right.$$
$$\left.-\frac{1}{a}\frac{\partial\varphi\left(t-\frac{r}{a}\right)}{\partial t}\right\}-\frac{2}{a}\frac{\partial}{\partial t}\frac{\varphi\left(t-\frac{r}{a}\right)}{r}.$$

Man erkennt nun leicht, dass der in Klammern stehende Ausdruck nichts anderes ist als

$$\frac{\partial\varphi\left(t-\frac{r}{a}\right)}{\partial r},$$

so dass die vorstehende Gleichung in

$$\Delta\varphi\left(t-\frac{r}{a}\right) = -\frac{2}{a}\frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{\partial\varphi\left(t-\frac{r}{a}\right)}{\partial r}+\frac{\varphi\left(t-\frac{r}{a}\right)}{r}\right\}$$

übergeht. Hieraus folgt aber

$$(4.)\quad \int\frac{\Delta\varphi\left(t-\frac{r}{a}\right)}{r}d\tau = -\frac{2}{a}\frac{\partial}{\partial t}\left\{\int\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi\left(t-\frac{r}{a}\right)}{\partial r}d\tau+\int\frac{\varphi\left(t-\frac{r}{a}\right)}{r^2}d\tau\right\},$$

wo die Integration über den von S umschlossenen Raum zu erstrecken ist.

Denkt man sich nun um den Punkt (x_0, y_0, z_0) mit der Einheit als Radius eine Kugel ω beschrieben, so wird $d\tau = r^2 d\omega dr$ und mithin

$$\int\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi\left(t-\frac{r}{a}\right)}{\partial r}d\tau = \int d\omega\int_0^R\frac{\partial\varphi\left(t-\frac{r}{a}\right)}{\partial r}\cdot r dr,$$

wenn R den Abstand des Elementes ds der Begrenzungsfläche S vom Punkte (x_0, y_0, z_0) bedeutet.

Da nun

$$\int_0^R\frac{\partial\varphi\left(t-\frac{r}{a}\right)}{\partial r}r dr = R\varphi\left(t-\frac{R}{a}\right)-\int_0^R\varphi\left(t-\frac{r}{a}\right)dr$$

ist, so wird

$$\int\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi\left(t-\frac{r}{a}\right)}{\partial r}d\tau = \int R\varphi\left(t-\frac{R}{a}\right)d\omega-\int d\omega\int_0^R\varphi\left(t-\frac{r}{a}\right)dr.$$

Substituirt man diesen Ausdruck in die Gleichung (4.), so bleibt

rechts nur noch ein Integral übrig, und dieses lässt sich unter Benutzung der Beziehung $R^2 d\omega = -\cos(n, r) ds = -\frac{\partial r}{\partial n} ds$ in einfachster Weise so umformen, dass die Gleichung (4.) in die Form

$$\int \frac{\Delta\varphi\left(t-\frac{r}{a}\right)}{r} d\tau = \frac{2}{a}\frac{\partial}{\partial t}\int \frac{\varphi\left(t-\frac{r}{a}\right)}{r}\frac{\partial r}{\partial n} ds$$

übergeht. Gehen wir nun auf die Gleichung (3.) zurück, so nimmt dieselbe vermöge der vorstehenden Gleichung folgende Gestalt an:

$$4\pi\varphi(x_0, y_0, z_0, t) = \int\left\{\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n}\varphi\left(t-\frac{r}{a}\right) - \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi\left(t-\frac{r}{a}\right)}{\partial n} - \frac{2}{a}\frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial n}\frac{\partial\varphi\left(t-\frac{r}{a}\right)}{\partial t}\right\} ds.$$

Es ist aber

$$\frac{\partial\varphi\left(t-\frac{r}{a}\right)}{\partial n} = f\left(t-\frac{r}{a}\right) + \frac{\partial\varphi\left(t-\frac{r}{a}\right)}{\partial\left(t-\frac{r}{a}\right)}\cdot\frac{\partial\left(t-\frac{r}{a}\right)}{\partial n}$$

$$= f\left(t-\frac{r}{a}\right) - \frac{1}{a}\frac{\partial\varphi\left(t-\frac{r}{a}\right)}{\partial t}\cdot\frac{\partial r}{\partial n},$$

also folgt:

$$4\pi\varphi(x_0, y_0, z_0, t) = \int\left\{\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n}\varphi\left(t-\frac{r}{a}\right) - \frac{1}{a}\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi\left(t-\frac{r}{a}\right)}{\partial t}\frac{\partial r}{\partial n} - \frac{1}{r}f\left(t-\frac{r}{a}\right)\right\} ds.$$

Dies stimmt aber mit der *Kirchhoff*schen Form (2.) genau überein, und es ist damit der von *Kirchhoff* angegebene analytische Ausdruck für das *Huygens*sche Princip auf neuem und einfachem Wege hergeleitet.

Zur Theorie der Krümmungen eindimensionaler, in höheren Mannigfaltigkeiten enthaltener Gebilde.

(Von Herrn *Georg Landsberg* in Heidelberg.)

Die bekannten in der Theorie der Raumcurven abgeleiteten ***Frenet***schen Formeln, welche Herr ***Kneser*** neuerdings in Beziehung auf die geometrische Bedeutung ihrer Vorzeichen einer eingehenden Untersuchung unterworfen hat*), besitzen eine Form, der man nicht ohne weiteres ansieht, in welcher Weise sich die Verallgemeinerung für den Raum von n Dimensionen zu vollziehen hat. Dieser Umstand veranlasste mich, die in Rede stehende Verallgemeinerung und damit die Krümmungen höherer Ordnung bei eindimensionalen Gebilden zu untersuchen. Durch die Gleichungen:

$$x_1 = \varphi_1(t), \quad x_2 = \varphi_2(t), \quad \ldots, \quad x_n = \varphi_n(t),$$

in welchen mit $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ reelle, einwerthige Functionen der reellen Variabeln t bezeichnet sein mögen, wird aus der Mannigfaltigkeit von n Dimensionen eine Curve (M_1) herausgehoben, deren Krümmungsverhältnisse untersucht werden sollen. Zu diesem Zwecke setzen wir:

$$\frac{d^h x_i}{dt^h} = x_{hi} \qquad (h, i = 1, 2, 3, \ldots, n)$$

und componiren das quadratische System:

$$(\mathfrak{A}.) \qquad \begin{pmatrix} x_{11}, & x_{12}, & \ldots, & x_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_{n1}, & x_{n2}, & \ldots, & x_{nn} \end{pmatrix}$$

mit seinem transponirten Systeme. Das Resultat der Zusammensetzung mag das symmetrische System:

$$(\mathfrak{B}.) \qquad (w_{hi}), \qquad (h, i = 1, 2, \ldots, n)$$

also:

$$(\mathfrak{C}.) \qquad w_{hi} = \sum_g x_{hg} x_{ig} = w_{ih} \qquad (g, h, i = 1, 2, \ldots, n)$$

*) *Kneser,* Bemerkungen über die *Frenet-Serret*schen Formeln, dieses Journal Bd. 113, S. 89.

sein. Ist für einen Punkt der Curve die Determinante des Systemes ($\mathfrak{A}$.) von Null verschieden, so mag derselbe als ein „*regulärer*" bezeichnet werden; für einen solchen ist nicht bloss die Determinante des Systemes ($\mathfrak{B}$.), sondern auch jede Hauptsubdeterminante dieses Systemes eine von Null verschiedene, positive Grösse, denn jede Hauptsubdeterminante νten Grades ist gleich der Quadratsumme der sämmtlichen Determinanten νten Grades, welche einer bestimmten Combination von ν Zeilen des Systemes ($\mathfrak{A}$.) entnommen werden können. Wir beschränken die Untersuchung auf reguläre Punkte der Curve.

Durch den Curvenpunkt P mit den Coordinaten $x_1, \ldots, x_n$ und die ν consecutiven Punkte ist ein unendlich kleines Prismatoid bestimmt, dessen Inhalt, multiplicirt mit einem Zahlenfactor r, gleich dem Absolutwerthe der Matrix:

$$\left\| \begin{matrix} x_{11}dt, & x_{12}dt, & \ldots, & x_{1n}dt \\ x_{21}dt^2, & x_{22}dt^2, & \ldots, & x_{2n}dt^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_{\nu 1}dt^\nu, & x_{\nu 2}dt^\nu, & \ldots, & x_{\nu n}dt^\nu \end{matrix} \right\|$$

ist; hierbei ist unter dem Absolutwerthe einer Matrix die positive Quadratwurzel aus der Quadratsumme aller Determinanten höchster Ordnung des Systemes verstanden. Bezeichnet man daher diesen r-fachen Inhalt mit $\mathfrak{P}_\nu$, so erhält man mit Hülfe der vorher eingeführten Grössen w_{hi}:

$$(\mathfrak{D}.)\qquad \begin{cases} \mathfrak{P}_\nu = \sqrt{W_\nu}.dt^{\frac{1}{2}\nu(\nu+1)}, \\ W_\nu = |w_{\alpha\beta}|. \end{cases} \qquad {\scriptstyle (\alpha,\, \beta = 1, 2, \ldots, \nu)}$$

Die Prismatoide $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots, \mathfrak{P}_n$, deren Inhalte sämmtlich von Null verschieden sind und deren erstes gleich dem Bogenelemente der Curve ist, charakterisiren in ihrer Gesammtheit die Krümmung der Curve, und zwar ist es angemessen, als erste, zweite, ..., $(n-1)$-te Krümmung der Curve die Grössen

$$\frac{\mathfrak{P}_2}{\mathfrak{P}_1^2.\mathfrak{P}_1},\quad \frac{\mathfrak{P}_1.\mathfrak{P}_3}{\mathfrak{P}_2^2.\mathfrak{P}_1},\quad \frac{\mathfrak{P}_2.\mathfrak{P}_4}{\mathfrak{P}_3^2.\mathfrak{P}_1},\quad \ldots,\quad \frac{\mathfrak{P}_{n-2}.\mathfrak{P}_n}{\mathfrak{P}_{n-1}^2.\mathfrak{P}_1}$$

zu definiren; diese Quotienten sind nämlich *endliche* Grössen, weil Zähler und Nenner unendlich kleine Grössen gleicher Ordnung:

$$\tfrac{1}{2}(\nu-1)\nu+\tfrac{1}{2}(\nu+1)(\nu+2) = \nu(\nu+1)+1$$

sind. Wir setzen daher:

$$(\mathfrak{E}.)\qquad \frac{1}{\varrho_\nu} = \frac{\mathfrak{P}_{\nu-1}.\mathfrak{P}_{\nu+1}}{\mathfrak{P}_\nu^2.\mathfrak{P}_1} = \frac{\sqrt{W_{\nu-1}}.\sqrt{W_{\nu+1}}}{W_\nu.\sqrt{W_1}}, \qquad {\scriptstyle (\nu = 1, 2, \ldots, n-1)}$$

wobei W_0 und $\mathfrak{P}_0$ für 1 steht.

Das Prismatoid $\mathfrak{P}_\nu$ ist in einer ebenen ν-fachen Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}_\nu$ gelegen, welche mit Hülfe von ν Parametern $\lambda_1^{(\nu)}, \lambda_2^{(\nu)}, \ldots, \lambda_\nu^{(\nu)}$ dargestellt werden kann, nämlich durch die Gleichungen:

$$\xi_g - x_g = \sum_{a=1}^{a=\nu} \lambda_a^{(\nu)} x_{ag}, \qquad (g=1, 2, \ldots, n)$$

wobei $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ die laufenden Coordinaten bedeuten. In dieser ebenen Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}_\nu$ giebt es eine einzige, ganz bestimmte Gerade ($\mathfrak{M}_1$), welche durch den Punkt P geht und zur vorhergehenden Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}_{\nu-1}$ senkrecht ist; die letzte Bedingung kommt natürlich für $\nu=1$ in Fortfall. Bezeichnet man die Richtungscosinus dieser Geraden mit $c_{\nu 1}, c_{\nu 2}, \ldots, c_{\nu n}$, wobei ν successive die Werthe 1 bis n annimmt, so hat die Bestimmung dieser Richtungscosinus aus dem Gleichungssystem:

$$(\mathfrak{F}_1.) \qquad c_{\nu g} = \sum_{a=1}^{a=\nu} \lambda_a^{(\nu)} x_{ag}, \qquad (g=1, 2, \ldots, n)$$

$$(\mathfrak{F}_2.) \qquad \sum_{g=1}^{g=n} c_{\nu g} x_{\beta g} = 0, \qquad (\beta=1, 2, \ldots, \nu-1)$$

$$(\mathfrak{F}_3.) \qquad \sum_{g=1}^{g=n} c_{\nu g}^2 = 1$$

zu erfolgen; in der That hat man $n+\nu$ Gleichungen für ebensoviel Unbekannte $\lambda_1^{(\nu)}, \lambda_2^{(\nu)}, \ldots, \lambda_\nu^{(\nu)}$; $c_{\nu 1}, c_{\nu 2}, \ldots, c_{\nu n}$. Das so bestimmte quadratische System:

$$(c_{\nu g}) \qquad (\nu, g=1, 2, \ldots, n)$$

ist ein orthogonales, denn aus den Gleichungen ($\mathfrak{F}_1.$) und ($\mathfrak{F}_2.$) folgt ohne weiteres, dass

$$(\mathfrak{F}'.) \qquad \sum_{g=1}^{g=n} c_{\nu g} c_{\beta g} = 0$$

ist, falls $\beta < \nu$ ist, und diese Gleichungen, verbunden mit den Gleichungen ($\mathfrak{F}_3.$), beweisen die aufgestellte Behauptung.

Um nunmehr das Gleichungssystem ($\mathfrak{F}.$) aufzulösen, eliminiren wir zunächst aus ($\mathfrak{F}_1.$) und ($\mathfrak{F}_2.$) die Grössen $c_{\nu g}$, wodurch wir erhalten:

$$\sum_{a=1}^{a=\nu} \lambda_a^{(\nu)} w_{a\beta} = 0. \qquad (\beta=1, 2, \ldots, \nu-1)$$

Diese Gleichungen bestimmen die ν Parameter $\lambda_1^{(\nu)}, \ldots, \lambda_\nu^{(\nu)}$ ihren Verhältnissen nach; bezeichnen wir in der durch ($\mathfrak{D}.$) definirten Determinante W_ν die Adjuncte des Elementes $w_{\nu a}$ mit $W_\nu^{(a)}$, so erhalten wir mit Hülfe eines Proportionalitätsfactors P_ν:

$$\lambda_a^{(\nu)} = P_\nu . W_\nu^{(a)}, \qquad (a=1, 2, \ldots, \nu)$$

also:

$$c_{\nu g} = P_\nu . \sum_{\alpha=1}^{\alpha=\nu} W_\nu^{(\alpha)} x_{\alpha g}.$$

Die Bestimmung des Proportionalitätsfactors erfolgt durch die Gleichung ($\mathfrak{F}_3$.); man findet:

$$\frac{1}{P_\nu^2} = \sum_{\alpha=1}^{\alpha=\nu} \sum_{\beta=1}^{\beta=\nu} W_\nu^{(\alpha)} W_\nu^{(\beta)} w_{\alpha\beta} = W_\nu^{(\nu)} W_\nu,$$

oder, da der Definition zufolge $W_\nu^{(\nu)} = W_{\nu-1}$ ist:

$$\frac{1}{P_\nu} = \sqrt{W_{\nu-1}.W_\nu},$$

und man erhält hiernach für die $c_{\nu g}$ die Ausdrücke:

$$(\mathfrak{G}.) \qquad c_{\nu g} = \frac{\sum_{\alpha=1}^{\alpha=\nu} W_\nu^{(\alpha)} x_{\alpha g}}{\sqrt{W_{\nu-1}}\sqrt{W_\nu}}, \qquad (\nu, g = 1, 2, \ldots, n)$$

in welchen für die Quadratwurzeln durchweg die positiven Werthe genommen werden mögen. Aus diesen Gleichungen folgt, dass das System ($\mathfrak{F}$.) durch die Gleichung:

$$(\mathfrak{F}_4.) \qquad \sum_{g=1}^{g=n} c_{\nu g} x_{\nu g} = \frac{\sqrt{W_\nu}}{\sqrt{W_{\nu-1}}}$$

vervollständigt werden kann.

Wollen wir nun die Differentialquotienten der Grössen $c_{\nu g}$ nach der Variablen t bilden, so gehen wir von den Gleichungen ($\mathfrak{F}_1$.) aus und berücksichtigen bei der Differentiation, dass

$$dx_{ik} = x_{i+1,k} dt$$

ist. Hiernach ergiebt sich:

$$dc_{\nu g} = \sum_{\alpha=1}^{\alpha=\nu} d\lambda_\alpha^{(\nu)} . x_{\alpha g} + \sum_{\alpha=1}^{\alpha=\nu} \lambda_\alpha^{(\nu)} x_{\alpha+1,g} dt$$

oder $\qquad (\nu, g = 1, 2, \ldots, n)$

$$dc_{\nu g} = \sum_{\alpha=1}^{\alpha=\nu+1} x_{\alpha g}(d\lambda_\alpha^{(\nu)} + \lambda_{\alpha-1}^{(\nu)} dt),$$

in welch letzterer Gleichung $\lambda_0^{(\nu)}$ und $\lambda_{\nu+1}^{(\nu)}$ gleich Null zu setzen sind. Andererseits ergiebt sich aus demselben System ($\mathfrak{F}_1$.), wenn man ν durch $(\nu+1)$ ersetzt, dass

$$c_{\nu+1,g} = \sum_{\alpha=1}^{\alpha=\nu+1} x_{\alpha g} \lambda_\alpha^{(\nu+1)} \qquad (\nu, g = 1, 2, \ldots, n)$$

ist, ein Gleichungssystem, welches auch noch für $\nu = n$ zugelassen werden kann, falls $c_{n+1,g} = \lambda_\alpha^{(n+1)} = 0$ gesetzt wird. Nun sind die Coefficienten von

$x_{\nu+1,g}$ in den beiden letzten Gleichungen resp.:

$$\lambda_{\nu}^{(\nu)} dt = \sqrt{\frac{W_{\nu-1}}{W_\nu}}\, dt \quad \text{und} \quad \lambda_{\nu+1}^{(\nu+1)} = \sqrt{\frac{W_\nu}{W_{\nu+1}}};$$

multiplicirt man daher die zweite Gleichung mit:

$$\frac{\sqrt{W_{\nu-1}}\cdot\sqrt{W_{\nu+1}}}{W_\nu}\, dt = \frac{ds}{\varrho_\nu},$$

wobei mit ds das Bogenelement $\sqrt{W_1}\,dt$ und mit ϱ_ν die durch die Gleichung ($\mathfrak{E}$.) definirte νte Krümmung bezeichnet ist, und subtrahirt alsdann die zweite Gleichung von der ersten, so fällt der letzte Term fort, und man erhält:

$$(\mathfrak{H}.)\quad \begin{cases} dc_{\nu g} - \dfrac{ds}{\varrho_\nu} c_{\nu+1,g} = \sum\limits_{a=1}^{\nu} x_{ag}\cdot p_a, & (\nu, g = 1, 2, \ldots, n) \\ p_a = d\lambda_a^{(\nu)} + \lambda_{a-1}^{(\nu)} dt - \lambda_a^{(\nu+1)} \dfrac{\sqrt{W_{\nu-1}}\sqrt{W_{\nu+1}}}{W_\nu}\, dt. \end{cases}$$

In der Gleichung ($\mathfrak{H}$.) muss aber nothwendigerweise auch noch der letzte mit dem Factor p_ν behaftete Term fortfallen; denn multiplicirt man die Gleichung mit $c_{\nu g}$ und summirt über g von 1 bis n, so sind die Summen:

$$\sum_{g=1}^{g=n} c_{\nu g} dc_{\nu g}, \quad \sum_{g=1}^{g=n} c_{\nu g} c_{\nu+1,g}, \quad \sum_{g=1}^{g=n} c_{\nu g} x_{1g}, \quad \ldots, \quad \sum_{g=1}^{g=n} c_{\nu g} x_{\nu-1,g}$$

gleich Null, wie aus den Gleichungen ($\mathfrak{F}_3$.), ($\mathfrak{F}'$.) und ($\mathfrak{F}_2$.) hervorgeht, die letzte Summe $\sum\limits_{g=1}^{g=n} c_{\nu g} x_{\nu g}$, mit welcher p_ν multiplicirt ist, ist hingegen nicht Null, sondern nach ($\mathfrak{F}_4$.) gleich der positiven Grösse $\frac{\sqrt{W_\nu}}{\sqrt{W_{\nu-1}}}$, und folglich muss:

$$p_\nu = d\lambda_\nu^{(\nu)} + dt\left(\frac{W_\nu^{(\nu-1)}}{\sqrt{W_\nu}\cdot\sqrt{W_{\nu-1}}} - \frac{W_{\nu+1}^{(\nu)}\cdot\sqrt{W_{\nu-1}}}{W_\nu\cdot\sqrt{W_\nu}}\right)$$

verschwinden. Aber zu den Gleichungen:

$$(\mathfrak{H}'.)\qquad dc_{\nu g} - \frac{ds}{\varrho_\nu} c_{\nu+1,g} = \sum_{a=1}^{\nu-1} x_{ag} p_a$$

treten, falls $\nu > 2$ ist, noch hinzu die weiteren:

$$(\mathfrak{H}''.)\qquad \sum_{g=1}^{g=n}\left(dc_{\nu g} - \frac{ds}{\varrho_\nu} c_{\nu+1,g}\right) x_{\beta g} = 0; \qquad (\beta = 1, 2, \ldots, \nu-2)$$

denn aus den Gleichungen ($\mathfrak{F}_2$.) folgt entweder direct oder durch Differentiation, dass:

$$\sum_{g=1}^{g=n} c_{\nu+1,g} x_{\beta g} = 0 \qquad (\beta = 1, 2, \ldots, \nu-2)$$

und

$$\sum_{g=1}^{g=n} dc_{\nu g}.x_{\beta g} = 0 \qquad (\beta = 1, 2, \ldots, \nu-2)$$

ist. Die Gleichungen ($\mathfrak{H}'$.) und ($\mathfrak{H}''$.), verglichen mit dem System der Gleichungen ($\mathfrak{F}_1$.) und ($\mathfrak{F}_2$.) beweisen aber, dass die Grössen:

$$dc_{\nu g} - \frac{ds}{\varrho_\nu} c_{\nu+1,g}$$

denselben *homogenen* Gleichungen genügen wie die Grössen $c_{\nu-1,g}$ und folglich mit diesen proportional sind. Daher ist:

$$(\mathfrak{J}.) \qquad dc_{\nu g} - \frac{ds}{\varrho_\nu} c_{\nu+1,g} = Q_\nu . c_{\nu-1,g},$$

wobei Q_ν den noch zu bestimmenden Proportionalitätsfactor bedeutet. Man gelangt zu demselben, wenn man berücksichtigt, dass die Differentiation der *letzten* Gleichung ($\mathfrak{F}_2$.) ergiebt:

$$\sum_{g=1}^{g=n} dc_{\nu g}.x_{\nu-1,g} = -dt.\sum_{g=1}^{g=n} c_{\nu g} x_{\nu g} = -\frac{\sqrt{W_\nu}}{\sqrt{W_{\nu-1}}} dt.$$

Multiplicirt man daher die Gleichung ($\mathfrak{J}$.) mit $x_{\nu-1,g}$ und summirt über g, so erhält man für Q_ν die Gleichung:

$$-dt \cdot \frac{\sqrt{W_\nu}}{\sqrt{W_{\nu-1}}} = Q_\nu \cdot \frac{\sqrt{W_{\nu-1}}}{\sqrt{W_{\nu-2}}},$$

also

$$Q_\nu = -\frac{\sqrt{W_\nu}\sqrt{W_{\nu-2}}}{W_{\nu-1}} dt = -\frac{ds}{\varrho_{\nu-1}}.$$

Hiernach ergeben sich schliesslich für die Differentialquotienten der Elemente des orthogonalen Systemes ($c_{\nu g}$) nach dem Bogenelemente s die Gleichungen:

$$(\mathfrak{K}.) \qquad \frac{dc_{\nu g}}{ds} = \frac{c_{\nu+1,g}}{\varrho_\nu} - \frac{c_{\nu-1,g}}{\varrho_{\nu-1}}, \qquad (\nu, g = 1, 2, \ldots, n)$$

in welchen, wie aus dem Früheren hervorgeht, c_{0g} und $c_{n+1,g}$ gleich Null zu setzen sind; ***diese Formeln sind offenbar das vollkommene Analogon der Frenetschen Formeln der Infinitesimalgeometrie der Raumcurven, sie beziehen sich auf beliebige eindimensionale Gebilde einer n-fachen ebenen Mannigfaltigkeit.***

Es erübrigt noch zu ermitteln, ob sich bei der getroffenen Vorzeichenbestimmung das orthogonale System als eines der ersten oder der zweiten Art ergiebt, oder mit anderen Worten, ob die Determinante $|c_{\nu g}|$ gleich $+1$ oder gleich -1 ist. Diese Frage entscheiden wir, indem wir den Elementen c_{ng} der letzten Zeile des Systemes eine zweite Form ertheilen. Setzen wir nämlich die Determinante des Systemes ($\mathfrak{A}$.) gleich X und bezeichnen

die Adjuncte des Elementes x_{hi} mit adj. x_{hi}, so ist:

$$W_n^{(a)} = \sum_{g=1}^{g=n} \text{adj.}\, x_{ng} . \text{adj.}\, x_{ag}, \qquad (a = 1, 2, \ldots, n)$$

also:

$$c_{nh} = \frac{\sum\limits_{a=1}^{a=n} W_n^{(a)} x_{ah}}{\sqrt{W_{n-1}}\sqrt{W_n}} = \frac{1}{\sqrt{W_{n-1}}\sqrt{W_n}} . \sum_{ag} x_{ah} \text{adj.}\, x_{ag} . \text{adj.}\, x_{ng} \qquad (a, g = 1, 2, \ldots, n)$$

$$= \frac{X . \text{adj.}\, x_{nh}}{\sqrt{W_{n-1}} . \sqrt{W_n}} .$$

Aber da $W_n = X^2$ ist, so hat man auch:

$$c_{nh} = \varepsilon \frac{\text{adj.}\, x_{nh}}{\sqrt{W_{n-1}}},$$

wobei $\varepsilon = \text{sgn.}\, X$ ist. Bildet man nun die Determinante

$$|c_{ih}| \qquad (i, h = 1, 2, \ldots, n)$$

und führt für die Elemente der letzten Zeile die soeben erhaltenen Ausdrücke ein, so findet man nach dem Multiplicationstheorem der Determinantentheorie:

$$|c_{ih}| = \frac{\varepsilon}{\sqrt{W_{n-1}}} . \left| \sum_{g=1}^{g=n} c_{\alpha g} x_{\beta g} \right| . \qquad \left({i, h = 1, 2, \ldots, n \atop \alpha, \beta = 1, 2, \ldots, n-1} \right)$$

Aber in der Determinante $(n-1)$-ter Ordnung, welche auf der rechten Seite der Gleichung steht, verschwinden nach den Gleichungen ($\mathfrak{J}_2$.) alle Elemente unterhalb der Diagonale, und für das Product der Diagonalglieder findet man nach ($\mathfrak{J}_4$.)

$$\frac{\sqrt{W_1}}{\sqrt{W_0}} . \frac{\sqrt{W_2}}{\sqrt{W_1}} . \frac{\sqrt{W_3}}{\sqrt{W_2}} \cdots \frac{\sqrt{W_{n-1}}}{\sqrt{W_{n-2}}} = \sqrt{W_{n-1}} .$$

Folglich ist:

$$(\mathfrak{L}.) \qquad |c_{ih}| = \varepsilon = \text{sgn.}\, X. \qquad (i, h = 1, 2, \ldots, n)$$

Das orthogonale System (c_{ih}) *ist also von der ersten oder von der zweiten Art, je nachdem die Determinante* $X = |x_{ih}|$ *positiv oder negativ ist.*

Heidelberg, im Juni 1894.

Erweiterung des *Laplace*schen Determinanten-Zerlegungssatzes.

(Von Herrn *Eugen Netto* in Giessen.)

Bei der Ableitung einer Eigenschaft der orthogonalen Determinanten bedurfte ich einer Formel über Subdeterminanten eines Systems, welche mich dazu führte, die *Laplace*schen Zerlegungstheoreme zu erweitern. Die anzuwendende Methode lieferte zugleich einen neuen Beweis für den *Sylvester*schen Satz, den Herr *Frobenius* in diesem Journal (Band 86, S. 54) und den ich später (Acta mathematica; Band 17, S. 201) bewiesen haben. Dieser Satz trat hier als Glied einer Kette von Theoremen auf, welche Herr *Sylvester* bereits in dem Phil. Mag. von 1851 ohne Beweise angiebt und die im Folgenden gleichfalls bewiesen und zum Theil erweitert werden sollen.

Um complicirte Indices-Angaben bei den Determinanten zu vermeiden, werde ich das zu befolgende Verfahren an einigen Beispielen darlegen, die so gewählt sind, dass die Wirksamkeit des Vorgehens auch für den allgemeinen Fall ersichtlich wird, und dass die allgemeinen Formeln selbst deutlich hervortreten.

Die Elemente a_{ik} will ich kürzer durch ik bezeichnen. Zerlegen wir eine Determinante vierter Ordnung $\varDelta = |ik|$ gemäss dem *Laplace*schen Satze nach den Elementen der ersten drei und der letzten Zeile, so entsteht

$$(1.)\quad \begin{vmatrix} 11 & 12 & 13 & 14 \\ 21 & 22 & 23 & 24 \\ 31 & 32 & 33 & 34 \\ \hline 41 & 42 & 43 & 44 \end{vmatrix} = \varDelta_{11,22,33}\varDelta_{44} - \varDelta_{11,22,34}\varDelta_{43} + \varDelta_{11,23,34}\varDelta_{42} - \varDelta_{12,23,34}\varDelta_{41},$$

wobei $\varDelta_{\alpha\beta,\gamma\delta,\ldots}$ diejenige Subdeterminannte von $\varDelta$ bezeichnet, welche durch Fortlassung der Zeilen von der Ordnung $\alpha, \gamma, \ldots$ und der Colonnen von der Ordnung $\beta, \delta, \ldots$ aus der ursprünglichen Determinante $\varDelta$ hervorgeht.

Jetzt rändern wir die beiden durch den Horizontalstrich getrennten Theile von (1.) in folgender Art

$$(2.)\qquad \left|\begin{array}{cccccccc} 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & . & . \\ 21 & 22 & 23 & 24 & 25 & 26 & . & . \\ 31 & 32 & 33 & 34 & 35 & 36 & . & . \\ 51 & 52 & 53 & 54 & 55 & 56 & . & . \\ 61 & 62 & 63 & 64 & 65 & 66 & . & . \\ \hline 41 & 42 & 43 & 44 & . & . & 45 & 46 \\ 51 & 52 & 53 & 54 & . & . & 55 & 56 \\ 61 & 62 & 63 & 64 & . & . & 65 & 66 \end{array}\right|,$$

wobei die Punkte .. Nullen bedeuten sollen. Die Anordnung ist derart getroffen, dass im oberen Theile die beiden Colonnen der Ordnung 5 und 6, im unteren die beiden letzten stets zur Bildung der Subdeterminanten benutzt werden müssen. Das Resultat der Entwickelung nach dem *Laplace*schen Satze stimmt daher genau mit der rechten Seite von (1.) überein, sobald für Δ die Determinante $|ik|$ $(i, k = 1, 2, \dots, 6)$ gesetzt wird. Durch einfache Zeilen- und Colonnen-Combination geht (2.) in

$$(3.)\qquad \left|\begin{array}{cccccccc} 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & . & . \\ 21 & 22 & 23 & 24 & 25 & 26 & . & . \\ 31 & 32 & 33 & 34 & 35 & 36 & . & . \\ 41 & 42 & 43 & 44 & 45 & 46 & 45 & 46 \\ 51 & 52 & 53 & 54 & 55 & 56 & . & . \\ 61 & 62 & 63 & 64 & 65 & 66 & . & . \\ \hline . & . & . & . & . & . & 55 & 56 \\ . & . & . & . & . & . & 65 & 66 \end{array}\right| = \Delta . \Delta_{11,22,33,44}$$

über. Der hierdurch erhaltene Satz gilt offenbar allgemein, so dass wir für Determinanten Δ der $n$ten Ordnung die Formel haben

$$(4.)\qquad \Delta_{11,22,33}\Delta_{44} - \Delta_{11,22,34}\Delta_{43} + \Delta_{11,23,34}\Delta_{42} - \Delta_{12,23,34}\Delta_{41} = \Delta\Delta_{11,22,33,44}.$$

Zweitens zerlegen wir in ähnlicher Art die Determinante vierter Ordnung nach den Elementen von 2 und 2 Zeilen; dann entsteht

$$(5.)\qquad \left|\begin{array}{cccc} 11 & 12 & 13 & 14 \\ 21 & 22 & 23 & 24 \\ \hline 31 & 32 & 33 & 34 \\ 41 & 42 & 43 & 44 \end{array}\right| = \begin{array}{l} \Delta_{11,22}\Delta_{33,44} - \Delta_{11,23}\Delta_{32,44} + \Delta_{11,24}\Delta_{32,43} \\ + \Delta_{12,23}\Delta_{31,44} - \Delta_{12,24}\Delta_{31,43} + \Delta_{13,24}\Delta_{31,42}. \end{array}$$

Hier liefert die Hinzufügung von zwei weiteren Zeilen und Colonnen in der oben besprochenen Art zu den beiden ersten und zu den beiden letzten Zeilen das folgende Schema:

$$\left|\begin{array}{cccccccc} 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & . & . \\ 21 & 22 & 23 & 24 & 25 & 26 & . & . \\ 51 & 52 & 53 & 54 & 55 & 56 & . & . \\ 61 & 62 & 63 & 64 & 65 & 66 & . & . \\ \hline 31 & 32 & 33 & 34 & . & . & 35 & 36 \\ 41 & 42 & 43 & 44 & . & . & 45 & 46 \\ 51 & 52 & 53 & 54 & . & . & 55 & 56 \\ 61 & 62 & 63 & 64 & . & . & 65 & 66 \end{array}\right| = \left|\begin{array}{cccccccc} 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & . & . \\ 21 & 22 & 23 & 24 & 25 & 26 & . & . \\ 31 & 32 & 33 & 34 & 35 & 36 & 35 & 36 \\ 41 & 42 & 43 & 44 & 45 & 45 & 45 & 46 \\ 51 & 52 & 53 & 54 & 55 & 56 & . & . \\ 61 & 62 & 63 & 64 & 65 & 66 & . & . \\ \hline . & . & . & . & . & . & 55 & 56 \\ . & . & . & . & . & . & 65 & 66 \end{array}\right|,$$

d. h. für diese Determinante gilt der Satz

$$(6.)\qquad \Delta_{11,22}\Delta_{33,44} - \cdots + \Delta_{13,24}\Delta_{31,42} = \Delta . \Delta_{11,22,33,44};$$

aber genau wie bei (4.) so erkennt man auch hier, dass die Einschränkung auf die Ordnungszahl 6 ganz überflüssig ist und dass die bewiesene Formel allgemeine Gültigkeit besitzt.

Um zu dem umfassenderen Theoreme zu kommen, müssen wir noch ein Beispiel wählen, in welchem die Zerlegung nach mehr als zwei Zeilensystemen stattfindet. Wir bleiben wieder bei $n=4$ und zerlegen

$$\left|\begin{array}{cccc} 11 & 12 & 13 & 14 \\ 21 & 22 & 23 & 24 \\ \hline 31 & 32 & 33 & 34 \\ \hline 41 & 42 & 43 & 44 \end{array}\right| = \Delta_{33,44}\Delta_{11,22,44}\Delta_{11,22,33} - \cdots .$$

An jedes der drei Zeilensysteme wird das System zweier neuen Zeilen und Colonnen angefügt:

$$\left|\begin{array}{cccccccccc} 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & . & . & . & . \\ 21 & 22 & 23 & 24 & 25 & 26 & . & . & . & . \\ 51 & 52 & 53 & 54 & 55 & 56 & . & . & . & . \\ 61 & 62 & 63 & 64 & 65 & 66 & . & . & . & . \\ \hline 31 & 32 & 33 & 34 & . & . & 35 & 36 & . & . \\ 51 & 52 & 53 & 54 & . & . & 55 & 56 & . & . \\ 61 & 62 & 63 & 64 & . & . & 65 & 66 & . & . \\ \hline 41 & 42 & 43 & 44 & . & . & . & . & 45 & 46 \\ 51 & 52 & 53 & 54 & . & . & . & . & 55 & 56 \\ 61 & 62 & 63 & 64 & . & . & . & . & 65 & 66 \end{array}\right|,$$

und diese Determinante verwandelt sich durch Zeilen- und Colonnen-Combinationen in

$$\left|\begin{array}{cccccccccc} 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & . & . & . & . \\ 21 & 22 & 23 & 24 & 25 & 26 & . & . & . & . \\ 31 & 32 & 33 & 34 & 35 & 36 & 35 & 36 & . & . \\ 41 & 42 & 43 & 44 & 45 & 46 & . & . & 45 & 46 \\ 51 & 52 & 53 & 54 & 55 & 56 & . & . & . & . \\ 61 & 62 & 63 & 64 & 65 & 66 & . & . & . & . \\ \hline . & . & . & . & . & . & 55 & 56 & . & . \\ . & . & . & . & . & . & 65 & 66 & . & . \\ \hline . & . & . & . & . & . & . & . & 55 & 56 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & 65 & 66 \end{array}\right| = \Delta . \Delta^2_{11,22,33,44}.$$

So folgt, und zwar nicht nur für die Ordnung 6, sondern ganz allgemein, die Formel

$$(7.)\qquad \Delta_{33,44}\Delta_{11,22,44}\Delta_{11,22,33}-\cdots = \Delta\Delta^2_{11,22,33,44}.$$

Nun erkennt man ohne Weiteres die Richtigkeit des Theorems:

Aus jeder durch die Laplacesche Zerlegung gegebenen Formel für Determinanten $n$ter Ordnung, bei welcher die Elemente der Productsummen durch Subdeterminanten ausgedrückt sind, kann man eine ähnliche Formel für Determinanten $(n+m)$-ter Ordnung herleiten, indem man der Determinante Δ den Factor $\Delta^{\mu-1}_{11,22,\dots,nn}$ hinzufügt. μ giebt dabei die Zahl der Factoren an, welche jedes einzelne Glied der Productsumme enthält.

Insbesondere bemerkenswerth ist der *Sylvester*sche Specialfall, bei welchem die Determinante Δ der $n$ten Ordnung in der einfachsten Weise als Summe von Producten von n Subdeterminanten der ersten Ordnung aufgefasst wird. Bei etwas geänderter Bezeichnung entsteht:

Es sei

$$|c_{ik}| = C \quad {\scriptstyle (i,\,k=1,\,2,\,\dots,\,n)}, \qquad |c_{ik}| = D, \quad {\scriptstyle (i,\,k=1,\,2,\,\dots,\,m;\; m<n)}$$

$$\begin{vmatrix} c_{11} & \dots & c_{1m} & c_{1\beta} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{m1} & \dots & c_{mm} & c_{m\beta} \\ c_{\alpha 1} & \dots & c_{\alpha m} & c_{\alpha\beta} \end{vmatrix} = E_{\alpha\beta}, \qquad {\scriptstyle (\alpha,\,\beta=m+1,\,\dots,\,n)}$$

dann ist

$$|E_{\alpha\beta}| = C.D^{n-m-1}. \qquad {\scriptstyle (\alpha,\,\beta=m+1,\,\dots,\,n)}$$

Eine andere Reihe von Formeln knüpfe ich, dieselbe Beweismethode benutzend, an das bekannte Theorem über die aus allen Subdeterminanten $(n-1)$-ter Ordnung von Δ gebildete Determinante an. Den Beweis für diesen Satz kann man nach der Analogie des folgenden Beispiels liefern. Es liefert für $n=4$ das einfach zu übersehende Schema:

$$(8.)\qquad \left|\begin{array}{cccccccccccc}
11 & 12 & 13 & 14 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
21 & 22 & 23 & 24 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
31 & 32 & 33 & 34 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \hline
11 & 12 & 13 & 14 & 11 & 12 & 13 & 14 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
21 & 22 & 23 & 24 & 21 & 22 & 23 & 24 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
41 & 42 & 43 & 44 & 41 & 42 & 43 & 44 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \hline
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 11 & 12 & 13 & 14 & 11 & 12 & 13 & 14 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 31 & 32 & 33 & 34 & 31 & 32 & 33 & 34 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 41 & 42 & 43 & 44 & 41 & 42 & 43 & 44 \\ \hline
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 21 & 22 & 23 & 24 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 31 & 32 & 33 & 34 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 41 & 42 & 43 & 44
\end{array}\right| = (-1)^{\frac{4.3.2}{1.2.3}}|\Delta_{ik}|, \quad {\scriptstyle (i,\,k=1,\,2,\,3,\,4)}$$

und andererseits geht die linke Seite durch Zeilencombination allein in

$$(8^*.)\qquad (-1)^{\frac{4.3.2}{1.2.3}}\varDelta^3$$

über. Im allgemeinen Falle tritt an die Stelle der aus (8.), (8*.) folgenden Gleichung die nachstehende:

$$(9.)\qquad (-1)^{\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}}|\varDelta_{ik}| = (-1)^{\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}}\varDelta^{n-1}, \qquad (i, k = 1, 2, \dots, n)$$

und damit ist das Theorem bewiesen.

Benutzt man nun wieder bei (8.) oder gleich im allgemeinen Falle das Princip der Ränderung bei den einzelnen Zeilensystemen, so bleibt der Werth auf der linken Seite von (9.) ungeändert, während bei der Umwandlung, die auf die rechte Seite von (9.) führt, noch $\varDelta_{11,22,\dots,nn}$ als Factor hinzutritt. Somit erhalten wir die Formel

$$(10.)\qquad |\varDelta_{ik}| = \varDelta^{n-1}.\varDelta_{11,22,\dots,nn}, \qquad (i, k = 1, 2, \dots, n)$$

wobei $\varDelta$ von einer beliebig hohen Ordnung $n+m$ sein kann.

Bevor andere nach derselben Richtung hingehende Sätze angegeben werden, wollen wir noch einen Schluss aus dem Umstande ziehen, dass bei der Ableitung von (9.) lediglich Umstellung und Combination der Zeilen unter einander gebraucht worden ist. Wir benutzen wieder das Beispiel (8.). Die vier ersten Colonnen lassen wir ungeändert; in den vier nächsten ersetzen wir die Elemente a_{ik} durch andere a'_{ik}, und in den vier letzten durch a''_{ik}. Dann erhält man statt (8*.)

$$\varDelta.\varDelta'.\varDelta'',$$

wenn $\varDelta'$ bezw. $\varDelta''$ die Determinanten der Elemente a'_{ik} bezw. a''_{ik} bedeuten. Die Form von (8.) gestaltet sich dadurch eigenthümlich, dass die Determinanten, die als Factoren der einzelnen Summanden in die *Laplace*sche Zerlegung eingehen, ihre Glieder aus denen der Determinanten $\varDelta$, $\varDelta'$, $\varDelta''$ mischen. So wird in unserem Falle $n = 4$ das Anfangsglied

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{14} & a'_{11} & a'_{12} \\ a_{24} & a'_{21} & a'_{22} \\ a_{44} & a'_{41} & a'_{42} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a'_{13} & a'_{14} & a''_{11} \\ a'_{33} & a'_{34} & a''_{31} \\ a'_{43} & a'_{44} & a''_{41} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a''_{22} & a''_{23} & a''_{24} \\ a''_{32} & a''_{33} & a''_{34} \\ a''_{42} & a''_{43} & a''_{44} \end{vmatrix},$$

und bei $n = 3$ heisst die ganze Formel:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} c & \alpha \\ c_2 & \alpha_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \beta_1 & \gamma_1 \\ \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a & c \\ a_1 & c_1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b & \alpha \\ b_2 & \alpha_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \beta_1 & \gamma_1 \\ \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & c \\ b_1 & c_1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a & \alpha \\ a_2 & \alpha_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \beta_1 & \gamma_1 \\ \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix}$$

$$- \begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} c & \beta \\ c_2 & \beta_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \alpha_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \gamma_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & c \\ a_1 & c_1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b & \beta \\ b_2 & \beta_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \alpha_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \gamma_2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} b & c \\ b_1 & c_1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a & \beta \\ a_2 & \beta_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \alpha_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \gamma_2 \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} c & \gamma \\ c_2 & \gamma_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a & c \\ a_1 & c_1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b & \gamma \\ b_2 & \gamma_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & c \\ b_1 & c_1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a & \gamma \\ a_2 & \gamma_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix}$$

$$= - \begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix}.$$

Um die entsprechende allgemeine Formel niederzuschreiben, bedenken wir, dass in der μten Determinante jedes der betreffenden Producte der linken Seite die durch den Index $(n+1-\mu)$ charakterisirte Zeile fehlt. Die Zeilen, welche vorkommen, sind also völlig durch die Bezeichnung

$$\overline{\Delta}_\mu$$

bestimmt. Ebenso ergeben sich die $(\mu-1)$ ersten in $\overline{\Delta}_\mu$ eingehenden Colonnen, welche dem Systeme der $a_{ik}^{(\mu-1)}$ entnommen sind, als Restcolonnen zu den in $\overline{\Delta}_{\mu-1}$ eintretenden; diese brauchen deshalb nicht besonders bezeichnet zu werden. Es ist also nur noch nöthig, die Indices der $(n-\mu)$ Colonnen aus $a_{ik}^{(\mu)}$ anzugeben. Daher genügt die Bezeichnung

$$\overline{\Delta}_\mu(i_1^{(\mu)} i_2^{(\mu)} \dots i_{n-\mu}^{(\mu)}),$$

wo sonach $i_1^{(\mu)}, i_2^{(\mu)}, \dots, i_{n-\mu}^{(\mu)}$ eine beliebige geordnete Combination von $(n-\mu)$ Gliedern aus der Reihe $1, 2, \dots, n$ darstellt. Das dem Producte zu ertheilende Vorzeichen wird in der bekannten Weise bestimmt. Hiermit heisst der allgemeine Satz:

Es ist

$$(11.) \quad \begin{cases} \Sigma \pm \overline{\Delta}_1(i_1' i_2' \dots i_{n-1}') \overline{\Delta}_2(i_1'' \dots i_{n-2}'') \overline{\Delta}_3(i_1''' \dots i_{n-3}''') \dots \overline{\Delta}_{n-1}(i_1^{(n-1)}) \overline{\Delta}_n \\ \qquad = \Delta . \Delta' . \Delta'' \dots \Delta^{(n-1)}. \end{cases}$$

Ein Blick auf das Schema (8.) zeigt, dass auch hier wieder eine Ränderung nach der früheren Methode möglich ist; doch muss bei allen einzelnen Determinanten Δ die Ränderung durch dieselben Elemente vorgenommen werden, weil die betreffenden Colonnen addirt bezw. subtrahirt werden. Auf die rechte Seite von (11.) tritt dabei noch der Factor

$$\Delta_{11,22,\dots,nn} = \Delta'_{11,22,\dots,nn} = \cdots.$$

Wir machen nun endlich noch von den in (4.), (6.), (7.), ... gegebenen Sätzen Gebrauch, um ein allgemeines von Herrn *Sylvester* (l. c. S. 304) gegebenes Theorem abzuleiten.

Es mögen die Determinanten

$$\varDelta = |a_{ik}| \quad (i, k = 1, 2, \dots, m+n), \qquad \varDelta_1 = |a_{ik}| \quad (i, k = 1, 2, \dots, m)$$

gegeben sein. Ist nun r eine Zahl $< m$, dann giebt es $\binom{m}{r}$ wohlgeordnete Combinationen von je r der m Elemente $1, 2, \dots, m$, die wir allgemein mit $i_1, i_2, \dots, i_r$ oder auch mit $k_1, k_2, \dots, k_r$ bezeichnen wollen. Nun bilden wir

$$(12.) \qquad |\varDelta_{i_1 k_1, \dots, i_r k_r}|,$$

indem wir die i und die k alle wohlgeordneten Combinationen durchlaufen lassen. (12.) wird in hinsichtlich seiner Elemente von der Ordnung $\binom{m}{r}$, und diese einzelnen Elemente sind von der Ordnung $n+m-r$. Um den Werth von (12.) zu bestimmen, bilden wir die complementäre Determinante

$$(13.) \qquad |\varDelta_{g_1 h_1, \dots, g_{m-r} h_{m-r}}|,$$

bei der wir die g und die h alle wohlgeordneten Combinationen von je $m-r$ aus der Reihe $1, 2, \dots, m$ genommenen Elementen durchlaufen lassen. Hier sind die einzelnen Glieder von (13.) von der Ordnung r und die Determinante selbst eine solche der Ordnung

$$\binom{m}{m-r} = \binom{m}{r}.$$

Die Forderung, dass (13.) zu (12.) complementär sein soll, spricht sich dadurch aus, dass die Indices i jeder Zeile von (12.) durch die Indices h der Colonne gleichen Ranges von (13.) zur Zahlenreihe $1, 2, \dots, m$ ergänzt werden, und dass das Gleiche mit den k und den g stattfindet. Multiplicirt man daher (12.) und (13.) nach Zeilen und Colonnen mit einander, dann treten genau solche Producte auf, wie wir sie im Anfange der Arbeit behandelt und berechnet haben. Die Glieder der Hauptdiagonale des Products werden sämmtlich gleich $\varDelta . \varDelta_1$, und die übrigen sind gleich Null, da in ihnen gleiche Zeilen- oder Colonnen-Indices auftreten, und dies dieselbe Wirkung ausübt, als ob in $\varDelta$ zwei Zeilen oder Colonnen gleiche Elemente hätten. Es folgt somit

$$|\varDelta_{i_1 k_1, \dots, i_r k_r}| \cdot |\varDelta_{g_1 h_1, \dots, g_{m-r} h_{m-r}}| = \varDelta^{\binom{m}{r}} \varDelta_1^{\binom{m}{r}},$$

und also ist der erste Factor links ein Theiler der rechten Seite. Da nun

jede der beiden Determinanten rechts als lineare Function der Elemente unzerlegbar ist, so muss (12.) den Werth

$$\text{cst. } \Delta^{\mu} \Delta_1^{\nu} \qquad \left(\mu+\nu=\binom{m}{r}\right)$$

haben. Um die Grössen μ, ν, cst. zu bestimmen, wählen wir das Beispiel:

$$a_{ik} = 0 \quad (i \neq k), \qquad a_{ii} = a, \qquad (i = 1, 2, \ldots, m)$$
$$a_{ii} = b. \qquad (i = m+1, m+2, \ldots, m+n)$$

Dann wird

$$\Delta_{i_1 i_1, i_2 i_2, \ldots, i_r i_r} = a^{m-r} b^n,$$

während alle anderen, ausserhalb der Hauptdiagonale von (12.) stehenden Glieder verschwinden. Es muss also

$$(a^{m-r} b^n)^{\binom{m}{r}} = \text{cst.}(a^m b^n)^{\mu} (b^n)^{\nu}$$

$$(m-r)\binom{m}{r} = m\mu, \quad n\binom{m}{r} = n\mu + n\nu, \quad \text{cst.} = 1,$$

$$\mu = \binom{m-1}{r}, \quad \nu = \binom{m-1}{r-1}$$

sein, und damit erhält man schliesslich

$$|\Delta_{i_1 k_1, \ldots, i_r k_r}| = \Delta^{\binom{m-1}{r}} \Delta_1^{\binom{m-1}{r-1}}.$$

In dieser Formel ist eine Anzahl der früheren enthalten.

Giessen, im Juni 1894.

† Hermann von Helmholtz.

Die Redaction erfüllt die schmerzliche Pflicht, an dieser Stelle des schweren Verlustes zu gedenken, welchen die wissenschaftliche Welt durch das am 8. September v. J. erfolgte Dahinscheiden von ***Hermann v. Helmholtz*** erlitten hat. Es kann nicht unsere Aufgabe sein, die Verdienste des grossen Forschers an dieser Stelle zu würdigen. An diesen Verdiensten sind so zahlreiche und verschiedenartige Gebiete menschlichen Wissens betheiligt, dass nur das Zusammenwirken der verschiedenen Vertreter dieser Gebiete ein getreues Bild der wissenschaftlichen Thätigkeit des Dahingeschiedenen wird schaffen können. Unserem Journal wird alsdann die Ehre zufallen, für die Würdigung seiner ausgezeichneten mathematischen Leistungen die wesentliche Quelle darzubieten. Seit dem Jahre 1858, wo *H. v. Helmholtz* im 55. Bande seine berühmte Arbeit über die Integrale der hydrodynamischen Differentialgleichungen veröffentlichte, hat derselbe das Journal durch eine lange Reihe von mathematisch-physikalischen Arbeiten geziert, von welchen jede einzelne als Fundament einer Disciplin betrachtet werden muss.

H. v. Helmholtz hat aber unserem Journal auch noch in weiterem Sinne sein Interesse erwiesen. Er hat es nicht nur gestattet, dass vom 104. Bande an auf dem Titelblatte unter die Namen der Mitwirkenden auch der seinige aufgenommen werde, sondern er hat auch seine Mitwirkung durch wirkliche Antheilnahme gern bethätigt, wenn dieselbe in Anspruch genommen wurde. Die Redaction darf daher die Ehre in Anspruch nehmen, unter denjenigen, welche die wissenschaftliche Thätigkeit des grossen Mannes zu besonderem Danke verpflichtet hat, in vorderster Reihe zu stehen.



Fig. 3.

Fig. 1.

